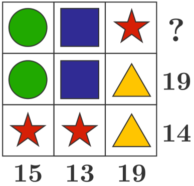
1. Systèmes linéaires

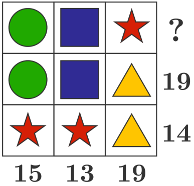
Introduction

Testez-vous

Dans ce puzzle, chaque forme correspond à une valeur.
Le numéro à coté de chaque ligne ou colonne représente la somme des valeurs dans cette ligne ou colonne.
Que vaut le point d'interrogation ?



Introduction



Testez-vous

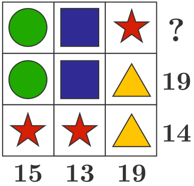
Dans ce puzzle, chaque forme correspond à une valeur. Le numéro à coté de chaque ligne ou colonne représente la somme des valeurs dans cette ligne ou colonne.
Que vaut le point d'interrogation ?

Correction

On doit calculer $\bullet + \blacksquare + \bigstar$ sachant que

$$\begin{cases} \bullet + \blacksquare + \blacktriangle = 19 \\ 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ 2\bullet + \bigstar = 15 \\ 2\blacksquare + \bigstar = 13 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$$

Introduction



Testez-vous

Dans ce puzzle, chaque forme correspond à une valeur. Le numéro à coté de chaque ligne ou colonne représente la somme des valeurs dans cette ligne ou colonne.
Que vaut le point d'interrogation ?

Correction

On doit calculer $\bullet + \blacksquare + \bigstar$ sachant que

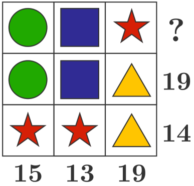
$$\begin{cases} \bullet + \blacksquare + \blacktriangle = 19 \\ 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ 2\bullet + \bigstar = 15 \\ 2\blacksquare + \bigstar = 13 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$$

La deuxième et la dernière équations $\begin{cases} 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$ donnent $\begin{cases} \bigstar = 3 \\ \blacktriangle = 8 \end{cases}$

Introduction

Testez-vous

Dans ce puzzle, chaque forme correspond à une valeur.
Le numéro à coté de chaque ligne ou colonne représente la somme des valeurs dans cette ligne ou colonne.
Que vaut le point d'interrogation ?



Correction

On doit calculer $\bullet + \blacksquare + \bigstar$ sachant que

$$\begin{cases} \bullet + \blacksquare + \blacktriangle = 19 \\ 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ 2\bullet + \bigstar = 15 \\ 2\blacksquare + \bigstar = 13 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$$

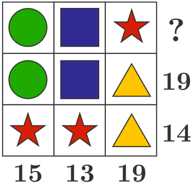
La deuxième et la dernière équations $\begin{cases} 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$ donnent $\begin{cases} \bigstar = 3 \\ \blacktriangle = 8 \end{cases}$

En injectant ces résultats dans la troisième équation on trouve $\bullet = 6$ et dans la quatrième $\blacksquare = 5$.

Introduction

Testez-vous

Dans ce puzzle, chaque forme correspond à une valeur.
Le numéro à coté de chaque ligne ou colonne représente la somme des valeurs dans cette ligne ou colonne.
Que vaut le point d'interrogation ?



Correction

On doit calculer $\bullet + \blacksquare + \bigstar$ sachant que

$$\begin{cases} \bullet + \blacksquare + \blacktriangle = 19 \\ 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ 2\bullet + \bigstar = 15 \\ 2\blacksquare + \bigstar = 13 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$$

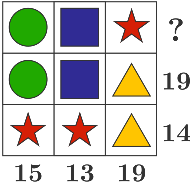
La deuxième et la dernière équations $\begin{cases} 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$ donnent $\begin{cases} \bigstar = 3 \\ \blacktriangle = 8 \end{cases}$

En injectant ces résultats dans la troisième équation on trouve $\bullet = 6$ et dans la quatrième $\blacksquare = 5$.
La première équation est "en trop" : le système est sur-déterminé ! Puisque $\bullet + \blacksquare + \blacktriangle = 6 + 5 + 8 = 19$, elle est vérifiée et on a bien trouvé l'unique solution de ce système linéaire.

Introduction

Testez-vous

Dans ce puzzle, chaque forme correspond à une valeur.
Le numéro à coté de chaque ligne ou colonne représente la somme des valeurs dans cette ligne ou colonne.
Que vaut le point d'interrogation ?



Correction

On doit calculer $\bullet + \blacksquare + \bigstar$ sachant que

$$\begin{cases} \bullet + \blacksquare + \blacktriangle = 19 \\ 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ 2\bullet + \bigstar = 15 \\ 2\blacksquare + \bigstar = 13 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$$

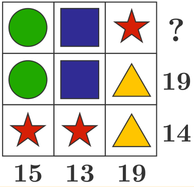
La deuxième et la dernière équations $\begin{cases} 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$ donnent $\begin{cases} \bigstar = 3 \\ \blacktriangle = 8 \end{cases}$

En injectant ces résultats dans la troisième équation on trouve $\bullet = 6$ et dans la quatrième $\blacksquare = 5$.
La première équation est "en trop" : le système est sur-déterminé ! Puisque $\bullet + \blacksquare + \blacktriangle = 6 + 5 + 8 = 19$, elle est vérifiée et on a bien trouvé l'unique solution de ce système linéaire.
Conclusion : $\bullet + \blacksquare + \bigstar = 14$.

Introduction

Testez-vous

Dans ce puzzle, chaque forme correspond à une valeur. Le numéro à coté de chaque ligne ou colonne représente la somme des valeurs dans cette ligne ou colonne. Que vaut le point d'interrogation ?



Correction

On doit calculer $\bullet + \blacksquare + \bigstar$ sachant que

$$\begin{cases} \bullet + \blacksquare + \blacktriangle = 19 \\ 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ 2\bullet + \bigstar = 15 \\ 2\blacksquare + \bigstar = 13 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$$

La deuxième et la dernière équations $\begin{cases} 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$ donnent $\begin{cases} \bigstar = 3 \\ \blacktriangle = 8 \end{cases}$

En injectant ces résultats dans la troisième équation on trouve $\bullet = 6$ et dans la quatrième $\blacksquare = 5$.
La première équation est "en trop" : le système est sur-déterminé ! Puisque $\bullet + \blacksquare + \blacktriangle = 6 + 5 + 8 = 19$, elle est vérifiée et on a bien trouvé l'unique solution de ce système linéaire.
Conclusion : $\bullet + \blacksquare + \bigstar = 14$.
Astuce : la somme de toutes les colonne vaut $15 + 13 + 19 = 47$; la somme de toutes les lignes vaut $? + 19 + 14$. Ces deux quantités devant être égale, on obtient $? = 47 - 33 = 14$.

Introduction

Exemple

Si on mélange de la soude caustique et de l'acide sulfurique, on obtient du sulfate de sodium et de l'eau :

$$\underbrace{?\mathrm{NaOH}}_{\text{soude caustique}} + \underbrace{?\mathrm{H_2SO_4}}_{\text{acide sulfurique}} \to \underbrace{?\mathrm{Na_2SO_4}}_{\text{sulfate de sodium}} + ?\mathrm{H_2O}$$

Pour que cette réaction ait lieu, il faut que tous les atomes (par exemple de sodium) qui sont à gauche se retrouvent à droite et vice-versa.

$$\underbrace{x\,\mathrm{NaOH}}_{\text{soude caustique}} + \underbrace{y\,\mathrm{H_2SO_4}}_{\text{acide sulfurique}} \to \underbrace{z\,\mathrm{Na_2SO_4}}_{\text{sulfate de sodium}} + w\,\mathrm{H_2O}$$

On voit bien qu'il nous faut au moins 2 molécules de NaOH à gauche pour tomber sur le Na_2 de droite. On pose alors $x = 2$ (mieux, un multiple de 2) et $z = 1$:

$$2\mathrm{NaOH} + y\mathrm{H_2SO_4} \to \mathrm{Na_2SO_4} + w\mathrm{H_2O}$$

Le 2OH à gauche venant de la soude et la yH_2 venant de l'acide sulfurique se combinent pour donner wH_2O. On peut alors poser $y = 1$ et $w = 2$:

$$2\mathrm{NaOH} + \mathrm{H_2SO_4} \to \mathrm{Na_2SO_4} + 2\mathrm{H_2O}$$

Le SO_4 se trouve bien à gauche et à droite et l'équation est alors équilibrée.

Introduction

Exemple

Si on mélange de la soude caustique et de l'acide sulfurique, on obtient du sulfate de sodium et de l'eau :

$$\underbrace{?\mathrm{NaOH}}_{\text{soude caustique}} + \underbrace{?\mathrm{H_2SO_4}}_{\text{acide sulfurique}} \to \underbrace{?\mathrm{Na_2SO_4}}_{\text{sulfate de sodium}} + ?\mathrm{H_2O}$$

Pour que cette réaction ait lieu, il faut que tous les atomes (par exemple de sodium) qui sont à gauche se retrouvent à droite et vice-versa.

$$\underbrace{x\,\mathrm{NaOH}}_{\text{soude caustique}} + \underbrace{y\,\mathrm{H_2SO_4}}_{\text{acide sulfurique}} \to \underbrace{z\,\mathrm{Na_2SO_4}}_{\text{sulfate de sodium}} + w\,\mathrm{H_2O}$$

On voit bien qu'il nous faut au moins 2 molécules de NaOH à gauche pour tomber sur le Na_2 de droite. On pose alors $x = 2$ (mieux, un multiple de 2) et $z = 1$:

$$2\mathrm{NaOH} + y\mathrm{H_2SO_4} \to \mathrm{Na_2SO_4} + w\mathrm{H_2O}$$

Le 2OH à gauche venant de la soude et la $y\mathrm{H_2}$ venant de l'acide sulfurique se combinent pour donner $w\mathrm{H_2O}$. On peut alors poser $y = 1$ et $w = 2$:

$$2\mathrm{NaOH} + \mathrm{H_2SO_4} \to \mathrm{Na_2SO_4} + 2\mathrm{H_2O}$$

Le SO_4 se trouve bien à gauche et à droite et l'équation est alors équilibrée.

Introduction

Exemple

Si on mélange de la soude caustique et de l'acide sulfurique, on obtient du sulfate de sodium et de l'eau :

$$\underbrace{?\mathrm{NaOH}}_{\text{soude caustique}} + \underbrace{?\mathrm{H_2SO_4}}_{\text{acide sulfurique}} \rightarrow \underbrace{?\mathrm{Na_2SO_4}}_{\text{sulfate de sodium}} + ?\mathrm{H_2O}$$

Pour que cette réaction ait lieu, il faut que tous les atomes (par exemple de sodium) qui sont à gauche se retrouvent à droite et vice-versa.

$$\underbrace{x\,\mathrm{NaOH}}_{\text{soude caustique}} + \underbrace{y\,\mathrm{H_2SO_4}}_{\text{acide sulfurique}} \rightarrow \underbrace{z\,\mathrm{Na_2SO_4}}_{\text{sulfate de sodium}} + w\,\mathrm{H_2O}$$

On voit bien qu'il nous faut au moins 2 molécules de NaOH à gauche pour tomber sur le $\mathrm{Na_2}$ de droite. On pose alors $x = 2$ (mieux, un multiple de 2) et $z = 1$:

$$2\mathrm{NaOH} + y\mathrm{H_2SO_4} \rightarrow \mathrm{Na_2SO_4} + w\mathrm{H_2O}$$

Le 2OH à gauche venant de la soude et la $y\mathrm{H_2}$ venant de l'acide sulfurique se combinent pour donner $w\mathrm{H_2O}$. On peut alors poser $y = 1$ et $w = 2$:

$$2\mathrm{NaOH} + \mathrm{H_2SO_4} \rightarrow \mathrm{Na_2SO_4} + 2\mathrm{H_2O}$$

Le $\mathrm{SO_4}$ se trouve bien à gauche et à droite et l'équation est alors équilibrée.

Introduction

Exemple

Si on mélange de la soude caustique et de l'acide sulfurique, on obtient du sulfate de sodium et de l'eau :

$$\underbrace{?NaOH}_{\text{soude caustique}} + \underbrace{?H_2SO_4}_{\text{acide sulfurique}} \rightarrow \underbrace{?Na_2SO_4}_{\text{sulfate de sodium}} + ?H_2O$$

Pour que cette réaction ait lieu, il faut que tous les atomes (par exemple de sodium) qui sont à gauche se retrouvent à droite et vice-versa.

$$\underbrace{x\,NaOH}_{\text{soude caustique}} + \underbrace{y\,H_2SO_4}_{\text{acide sulfurique}} \rightarrow \underbrace{z\,Na_2SO_4}_{\text{sulfate de sodium}} + w\,H_2O$$

On voit bien qu'il nous faut au moins 2 molécules de NaOH à gauche pour tomber sur le Na_2 de droite. On pose alors $x = 2$ (mieux, un multiple de 2) et $z = 1$:

$$2NaOH + yH_2SO_4 \rightarrow Na_2SO_4 + wH_2O$$

Le 2OH à gauche venant de la soude et la yH_2 venant de l'acide sulfurique se combinent pour donner wH_2O. On peut alors poser $y = 1$ et $w = 2$:

$$2NaOH + H_2SO_4 \rightarrow Na_2SO_4 + 2H_2O$$

Le SO_4 se trouve bien à gauche et à droite et l'équation est alors équilibrée.

Introduction

Testez-vous

Équilibrer l'équation

$$x_1\,\mathrm{CuSCN} + x_2\,\mathrm{KIO_3} + x_3\,\mathrm{HCl} \to x_4\,\mathrm{CuSO_4} + x_5\,\mathrm{KCl} + x_6\,\mathrm{HCN} + x_7\,\mathrm{ICl} + x_8\,\mathrm{H_2O}$$

Correction

Chaque élément chimique en jeu fournit une équation :

$$\text{Le sulfure de cuire CuS donne } x_1 = x_4 \tag{1}$$
$$\text{Le cyanure CN donne } x_1 = x_6 \tag{2}$$
$$\text{Le potassium K donne } x_2 = x_5 \tag{3}$$
$$\text{Le iode I donne } x_2 = x_7 \tag{4}$$
$$\text{Le chlore Cl donne } x_3 = x_5 + x_7 \tag{5}$$
$$\text{L'oxygène O donne } 3x_2 = 4x_4 + x_8 \tag{6}$$
$$\text{L'hydrogène H donne } x_3 = x_6 + 2x_8 \tag{7}$$

On a alors

$$x_1 \overset{(1)}{=} x_4 \overset{(2)}{=} x_6, \tag{8}$$
$$x_2 \overset{(3)}{=} x_5 \overset{(4)}{=} x_7, \tag{9}$$
$$x_3 \overset{(5)}{=} x_5 + x_7 \overset{(8)}{=} 2x_2 \tag{10}$$

De plus

$$x_8 \overset{(6)}{=} 3x_2 - 4x_4 \overset{(8)}{=} 3x_2 - 4x_1 \tag{11}$$
$$2x_8 \overset{(7)}{=} x_3 - x_1 \overset{(8)}{=} 2x_2 - x_1 \tag{12}$$

donc

$$2x_2 - x_1 \overset{(12)}{=} 2x_8 \overset{(11)}{=} 2(3x_2 - 4x_1)$$

Cela donne

$$4x_2 = 7x_1 \tag{13}$$

d'où

$$4x_8 \overset{(12)}{=} 2(2x_2 - x_1) = 4x_2 - 2x_1 \overset{(13)}{=} 7x_1 - 2x_1 = 5x_1 \tag{14}$$

Enfin on a

$$2x_3 \overset{(7)}{=} 2(x_6 + 2x_8) \overset{(8)-(14)}{=} 2x_1 + 5x_1 = 7x_1$$

Conclusion :

$$x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_3 = \frac{7}{2}x_1$$
$$x_4 = x_1$$
$$x_5 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_6 = x_1$$
$$x_7 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_8 = \frac{5}{4}x_1$$

On choisit $x_1 = 4$ (pour ne pas avoir de fractions) ainsi

$$4\mathrm{CuSCN} + 7\mathrm{KIO_3} + 14\mathrm{HCl} \to 4\mathrm{CuSO_4} + 7\mathrm{KCl} + 4\mathrm{HCN} + 7\mathrm{ICl} + 5\mathrm{H_2O}$$

Existe-t-il une méthode générale pour résoudre un système linéaire ?

Introduction

Testez-vous

Équilibrer l'équation

$$x_1\,\mathrm{CuSCN} + x_2\,\mathrm{KIO_3} + x_3\,\mathrm{HCl} \to x_4\,\mathrm{CuSO_4} + x_5\,\mathrm{KCl} + x_6\,\mathrm{HCN} + x_7\,\mathrm{ICl} + x_8\,\mathrm{H_2O}$$

Correction

Chaque élément chimique en jeu fournit une équation :

$$\text{Le sulfure de cuire CuS donne } x_1 = x_4 \tag{1}$$
$$\text{Le cyanure CN donne } x_1 = x_6 \tag{2}$$
$$\text{Le potassium K donne } x_2 = x_5 \tag{3}$$
$$\text{Le iode I donne } x_2 = x_7 \tag{4}$$
$$\text{Le chlore Cl donne } x_3 = x_5 + x_7 \tag{5}$$
$$\text{L'oxygène O donne } 3x_2 = 4x_4 + x_8 \tag{6}$$
$$\text{L'hydrogène H donne } x_3 = x_6 + 2x_8 \tag{7}$$

On a alors

$$x_1 \overset{(1)}{=} x_4 \overset{(2)}{=} x_6, \tag{8}$$
$$x_2 \overset{(3)}{=} x_5 \overset{(4)}{=} x_7, \tag{9}$$
$$x_3 \overset{(5)}{=} x_5 + x_7 \overset{(8)}{=} 2x_2 \tag{10}$$

De plus

$$x_8 \overset{(6)}{=} 3x_2 - 4x_4 \overset{(8)}{=} 3x_2 - 4x_1 \tag{11}$$
$$2x_8 \overset{(7)}{=} x_3 - x_1 \overset{(8)}{=} 2x_2 - x_1 \tag{12}$$

donc

$$2x_2 - x_1 \overset{(12)}{=} 2x_8 \overset{(11)}{=} 2(3x_2 - 4x_1)$$

Cela donne

$$4x_2 = 7x_1 \tag{13}$$

d'où

$$4x_8 \overset{(12)}{=} 2(2x_2 - x_1) = 4x_2 - 2x_1 \overset{(13)}{=} 7x_1 - 2x_1 = 5x_1 \tag{14}$$

Enfin on a

$$2x_3 \overset{(7)}{=} 2(x_6 + 2x_8) \overset{(8)-(14)}{=} 2x_1 + 5x_1 = 7x_1$$

Conclusion :

$$x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_3 = \frac{7}{2}x_1$$
$$x_4 = x_1$$
$$x_5 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_6 = x_1$$
$$x_7 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_8 = \frac{5}{4}x_1$$

On choisit $x_1 = 4$ (pour ne pas avoir de fractions) ainsi

$$4\mathrm{CuSCN} + 7\mathrm{KIO_3} + 14\mathrm{HCl} \to 4\mathrm{CuSO_4} + 7\mathrm{KCl} + 4\mathrm{HCN} + 7\mathrm{ICl} + 5\mathrm{H_2O}$$

Existe-t-il une méthode générale pour résoudre un système linéaire ?

Introduction

Testez-vous

Équilibrer l'équation

$$x_1\,\mathrm{CuSCN} + x_2\,\mathrm{KIO_3} + x_3\,\mathrm{HCl} \to x_4\,\mathrm{CuSO_4} + x_5\,\mathrm{KCl} + x_6\,\mathrm{HCN} + x_7\,\mathrm{ICl} + x_8\,\mathrm{H_2O}$$

Correction

Chaque élément chimique en jeu fournit une équation :

$$\text{Le sulfure de cuire CuS donne } x_1 = x_4 \tag{1}$$
$$\text{Le cyanure CN donne } x_1 = x_6 \tag{2}$$
$$\text{Le potassium K donne } x_2 = x_5 \tag{3}$$
$$\text{Le iode I donne } x_2 = x_7 \tag{4}$$
$$\text{Le chlore Cl donne } x_3 = x_5 + x_7 \tag{5}$$
$$\text{L'oxygène O donne } 3x_2 = 4x_4 + x_8 \tag{6}$$
$$\text{L'hydrogène H donne } x_3 = x_6 + 2x_8 \tag{7}$$

On a alors

$$x_1 \overset{(1)}{=} x_4 \overset{(2)}{=} x_6, \tag{8}$$
$$x_2 \overset{(3)}{=} x_5 \overset{(4)}{=} x_7, \tag{9}$$
$$x_3 \overset{(5)}{=} x_5 + x_7 \overset{(8)}{=} 2x_2 \tag{10}$$

De plus

$$x_8 \overset{(6)}{=} 3x_2 - 4x_4 \overset{(8)}{=} 3x_2 - 4x_1 \tag{11}$$
$$2x_8 \overset{(7)}{=} x_3 - x_1 \overset{(8)}{=} 2x_2 - x_1 \tag{12}$$

donc

$$2x_2 - x_1 \overset{(12)}{=} 2x_8 \overset{(11)}{=} 2(3x_2 - 4x_1)$$

Cela donne

$$4x_2 = 7x_1 \tag{13}$$

d'où

$$4x_8 \overset{(12)}{=} 2(2x_2 - x_1) = 4x_2 - 2x_1 \overset{(13)}{=} 7x_1 - 2x_1 = 5x_1 \tag{14}$$

Enfin on a

$$2x_3 \overset{(7)}{=} 2(x_6 + 2x_8) \overset{(8)-(14)}{=} 2x_1 + 5x_1 = 7x_1$$

Conclusion :

$$x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_3 = \frac{7}{2}x_1$$
$$x_4 = x_1$$
$$x_5 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_6 = x_1$$
$$x_7 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_8 = \frac{5}{4}x_1$$

On choisit $x_1 = 4$ (pour ne pas avoir de fractions) ainsi

$$4\mathrm{CuSCN} + 7\mathrm{KIO_3} + 14\mathrm{HCl} \to 4\mathrm{CuSO_4} + 7\mathrm{KCl} + 4\mathrm{HCN} + 7\mathrm{ICl} + 5\mathrm{H_2O}$$

Existe-t-il une méthode générale pour résoudre un système linéaire ?

Introduction

Testez-vous

Équilibrer l'équation

$$x_1\, \mathrm{CuSCN} + x_2\, \mathrm{KIO_3} + x_3\, \mathrm{HCl} \to x_4\, \mathrm{CuSO_4} + x_5\, \mathrm{KCl} + x_6\, \mathrm{HCN} + x_7\, \mathrm{ICl} + x_8\, \mathrm{H_2O}$$

Correction

Chaque élément chimique en jeu fournit une équation :

$$\text{Le sulfure de cuire CuS donne } x_1 = x_4 \tag{1}$$
$$\text{Le cyanure CN donne } x_1 = x_6 \tag{2}$$
$$\text{Le potassium K donne } x_2 = x_5 \tag{3}$$
$$\text{Le iode I donne } x_2 = x_7 \tag{4}$$
$$\text{Le chlore Cl donne } x_3 = x_5 + x_7 \tag{5}$$
$$\text{L'oxygène O donne } 3x_2 = 4x_4 + x_8 \tag{6}$$
$$\text{L'hydrogène H donne } x_3 = x_6 + 2x_8 \tag{7}$$

On a alors

$$x_1 \overset{(1)}{=} x_4 \overset{(2)}{=} x_6, \tag{8}$$
$$x_2 \overset{(3)}{=} x_5 \overset{(4)}{=} x_7, \tag{9}$$
$$x_3 \overset{(5)}{=} x_5 + x_7 \overset{(8)}{=} 2x_2 \tag{10}$$

De plus

$$x_8 \overset{(6)}{=} 3x_2 - 4x_4 \overset{(8)}{=} 3x_2 - 4x_1 \tag{11}$$
$$2x_8 \overset{(7)}{=} x_3 - x_1 \overset{(8)}{=} 2x_2 - x_1 \tag{12}$$

donc

$$2x_2 - x_1 \overset{(12)}{=} 2x_8 \overset{(11)}{=} 2(3x_2 - 4x_1)$$

Cela donne

$$4x_2 = 7x_1 \tag{13}$$

d'où

$$4x_8 \overset{(12)}{=} 2(2x_2 - x_1) = 4x_2 - 2x_1 \overset{(13)}{=} 7x_1 - 2x_1 = 5x_1 \tag{14}$$

Enfin on a

$$2x_3 \overset{(7)}{=} 2(x_6 + 2x_8) \overset{(8)-(14)}{=} 2x_1 + 5x_1 = 7x_1$$

Conclusion :

$$x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_3 = \frac{7}{2}x_1$$
$$x_4 = x_1$$
$$x_5 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_6 = x_1$$
$$x_7 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_8 = \frac{5}{4}x_1$$

On choisit $x_1 = 4$ (pour ne pas avoir de fractions) ainsi

$$4\mathrm{CuSCN} + 7\mathrm{KIO_3} + 14\mathrm{HCl} \to 4\mathrm{CuSO_4} + 7\mathrm{KCl} + 4\mathrm{HCN} + 7\mathrm{ICl} + 5\mathrm{H_2O}$$

Existe-t-il une méthode générale pour résoudre un système linéaire ?

Introduction

Testez-vous

Équilibrer l'équation

$$x_1\,\mathrm{CuSCN} + x_2\,\mathrm{KIO_3} + x_3\,\mathrm{HCl} \to x_4\,\mathrm{CuSO_4} + x_5\,\mathrm{KCl} + x_6\,\mathrm{HCN} + x_7\,\mathrm{ICl} + x_8\,\mathrm{H_2O}$$

Correction

Chaque élément chimique en jeu fournit une équation :

$$\text{Le sulfure de cuire CuS donne } x_1 = x_4 \tag{1}$$
$$\text{Le cyanure CN donne } x_1 = x_6 \tag{2}$$
$$\text{Le potassium K donne } x_2 = x_5 \tag{3}$$
$$\text{Le iode I donne } x_2 = x_7 \tag{4}$$
$$\text{Le chlore Cl donne } x_3 = x_5 + x_7 \tag{5}$$
$$\text{L'oxygène O donne } 3x_2 = 4x_4 + x_8 \tag{6}$$
$$\text{L'hydrogène H donne } x_3 = x_6 + 2x_8 \tag{7}$$

On a alors

$$x_1 \overset{(1)}{=} x_4 \overset{(2)}{=} x_6, \tag{8}$$
$$x_2 \overset{(3)}{=} x_5 \overset{(4)}{=} x_7, \tag{9}$$
$$x_3 \overset{(5)}{=} x_5 + x_7 \overset{(8)}{=} 2x_2 \tag{10}$$

De plus

$$x_8 \overset{(6)}{=} 3x_2 - 4x_4 \overset{(8)}{=} 3x_2 - 4x_1 \tag{11}$$
$$2x_8 \overset{(7)}{=} x_3 - x_1 \overset{(8)}{=} 2x_2 - x_1 \tag{12}$$

donc

$$2x_2 - x_1 \overset{(12)}{=} 2x_8 \overset{(11)}{=} 2(3x_2 - 4x_1)$$

Cela donne

$$4x_2 = 7x_1 \tag{13}$$

d'où

$$4x_8 \overset{(12)}{=} 2(2x_2 - x_1) = 4x_2 - 2x_1 \overset{(13)}{=} 7x_1 - 2x_1 = 5x_1 \tag{14}$$

Enfin on a

$$2x_3 \overset{(7)}{=} 2(x_6 + 2x_8) \overset{(8)-(14)}{=} 2x_1 + 5x_1 = 7x_1$$

Conclusion :

$$x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_3 = \frac{7}{2}x_1$$
$$x_4 = x_1$$
$$x_5 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_6 = x_1$$
$$x_7 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_8 = \frac{5}{4}x_1$$

On choisit $x_1 = 4$ (pour ne pas avoir de fractions) ainsi

$$4\mathrm{CuSCN} + 7\mathrm{KIO_3} + 14\mathrm{HCl} \to 4\mathrm{CuSO_4} + 7\mathrm{KCl} + 4\mathrm{HCN} + 7\mathrm{ICl} + 5\mathrm{H_2O}$$

Existe-t-il une méthode générale pour résoudre un système linéaire ?

Introduction

Testez-vous

Équilibrer l'équation

$$x_1\,\mathrm{CuSCN} + x_2\,\mathrm{KIO_3} + x_3\,\mathrm{HCl} \to x_4\,\mathrm{CuSO_4} + x_5\,\mathrm{KCl} + x_6\,\mathrm{HCN} + x_7\,\mathrm{ICl} + x_8\,\mathrm{H_2O}$$

Correction

Chaque élément chimique en jeu fournit une équation :

$$\text{Le sulfure de cuire CuS donne } x_1 = x_4 \tag{1}$$
$$\text{Le cyanure CN donne } x_1 = x_6 \tag{2}$$
$$\text{Le potassium K donne } x_2 = x_5 \tag{3}$$
$$\text{Le iode I donne } x_2 = x_7 \tag{4}$$
$$\text{Le chlore Cl donne } x_3 = x_5 + x_7 \tag{5}$$
$$\text{L'oxygène O donne } 3x_2 = 4x_4 + x_8 \tag{6}$$
$$\text{L'hydrogène H donne } x_3 = x_6 + 2x_8 \tag{7}$$

On a alors

$$x_1 \overset{(1)}{=} x_4 \overset{(2)}{=} x_6, \tag{8}$$
$$x_2 \overset{(3)}{=} x_5 \overset{(4)}{=} x_7, \tag{9}$$
$$x_3 \overset{(5)}{=} x_5 + x_7 \overset{(8)}{=} 2x_2 \tag{10}$$

De plus

$$x_8 \overset{(6)}{=} 3x_2 - 4x_4 \overset{(8)}{=} 3x_2 - 4x_1 \tag{11}$$
$$2x_8 \overset{(7)}{=} x_3 - x_1 \overset{(8)}{=} 2x_2 - x_1 \tag{12}$$

donc

$$2x_2 - x_1 \overset{(12)}{=} 2x_8 \overset{(11)}{=} 2(3x_2 - 4x_1)$$

Cela donne

$$4x_2 = 7x_1 \tag{13}$$

d'où

$$4x_8 \overset{(12)}{=} 2(2x_2 - x_1) = 4x_2 - 2x_1 \overset{(13)}{=} 7x_1 - 2x_1 = 5x_1 \tag{14}$$

Enfin on a

$$2x_3 \overset{(7)}{=} 2(x_6 + 2x_8) \overset{(8)-(14)}{=} 2x_1 + 5x_1 = 7x_1$$

Conclusion :

$$x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_3 = \frac{7}{2}x_1$$
$$x_4 = x_1$$
$$x_5 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_6 = x_1$$
$$x_7 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_8 = \frac{5}{4}x_1$$

On choisit $x_1 = 4$ (pour ne pas avoir de fractions) ainsi

$$4\mathrm{CuSCN} + 7\mathrm{KIO_3} + 14\mathrm{HCl} \to 4\mathrm{CuSO_4} + 7\mathrm{KCl} + 4\mathrm{HCN} + 7\mathrm{ICl} + 5\mathrm{H_2O}$$

Existe-t-il une méthode générale pour résoudre un système linéaire ?

Introduction

Testez-vous

Équilibrer l'équation

$$x_1 \, CuSCN + x_2 \, KIO_3 + x_3 \, HCl \longrightarrow x_4 \, CuSO_4 + x_5 \, KCl + x_6 \, HCN + x_7 \, ICl + x_8 \, H_2O$$

Correction

Chaque élément chimique en jeu fournit une équation :

Le sulfure de cuire CuS donne $x_1 = x_4$ (1)

Le cyanure CN donne $x_1 = x_6$ (2)

Le potassium K donne $x_2 = x_5$ (3)

Le iode I donne $x_2 = x_7$ (4)

Le chlore Cl donne $x_3 = x_5 + x_7$ (5)

L'oxygène O donne $3x_2 = 4x_4 + x_8$ (6)

L'hydrogène H donne $x_3 = x_6 + 2x_8$ (7)

On a alors

$$x_1 \overset{(1)}{=} x_4 \overset{(2)}{=} x_6, \tag{8}$$

$$x_2 \overset{(3)}{=} x_5 \overset{(4)}{=} x_7, \tag{9}$$

$$x_3 \overset{(5)}{=} x_5 + x_7 \overset{(8)}{=} 2x_2 \tag{10}$$

De plus

$$x_8 \overset{(6)}{=} 3x_2 - 4x_4 \overset{(8)}{=} 3x_2 - 4x_1 \tag{11}$$

$$2x_8 \overset{(7)}{=} x_3 - x_1 \overset{(8)}{=} 2x_2 - x_1 \tag{12}$$

donc

$$2x_2 - x_1 \overset{(12)}{=} 2x_8 \overset{(11)}{=} 2(3x_2 - 4x_1)$$

Cela donne

$$4x_2 = 7x_1 \tag{13}$$

d'où

$$4x_8 \overset{(12)}{=} 2(2x_2 - x_1) = 4x_2 - 2x_1 \overset{(13)}{=} 7x_1 - 2x_1 = 5x_1 \tag{14}$$

Enfin on a

$$2x_3 \overset{(7)}{=} 2(x_6 + 2x_8) \overset{(8)-(14)}{=} 2x_1 + 5x_1 = 7x_1$$

Conclusion :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{7}{4}x_1 \\ x_3 &= \frac{7}{2}x_1 \\ x_4 &= x_1 \\ x_5 &= x_2 = \frac{7}{4}x_1 \\ x_6 &= x_1 \\ x_7 &= x_2 = \frac{7}{4}x_1 \\ x_8 &= \frac{5}{4}x_1 \end{aligned}$$

On choisit $x_1 = 4$ (pour ne pas avoir de fractions) ainsi

$$4CuSCN + 7KIO_3 + 14HCl \longrightarrow 4CuSO_4 + 7KCl + 4HCN + 7ICl + 5H_2O$$

Existe-t-il une méthode générale pour résoudre un système linéaire ?

Introduction

Testez-vous

Équilibrer l'équation

$$x_1\,CuSCN + x_2\,KIO_3 + x_3\,HCl \to x_4\,CuSO_4 + x_5\,KCl + x_6\,HCN + x_7\,ICl + x_8\,H_2O$$

Correction

Chaque élément chimique en jeu fournit une équation :

Le sulfure de cuire CuS donne $x_1 = x_4$ (1)

Le cyanure CN donne $x_1 = x_6$ (2)

Le potassium K donne $x_2 = x_5$ (3)

Le iode I donne $x_2 = x_7$ (4)

Le chlore Cl donne $x_3 = x_5 + x_7$ (5)

L'oxygène O donne $3x_2 = 4x_4 + x_8$ (6)

L'hydrogène H donne $x_3 = x_6 + 2x_8$ (7)

On a alors

$$x_1 \overset{(1)}{=} x_4 \overset{(2)}{=} x_6, \tag{8}$$

$$x_2 \overset{(3)}{=} x_5 \overset{(4)}{=} x_7, \tag{9}$$

$$x_3 \overset{(5)}{=} x_5 + x_7 \overset{(8)}{=} 2x_2 \tag{10}$$

De plus

$$x_8 \overset{(6)}{=} 3x_2 - 4x_4 \overset{(8)}{=} 3x_2 - 4x_1 \tag{11}$$

$$2x_8 \overset{(7)}{=} x_3 - x_1 \overset{(8)}{=} 2x_2 - x_1 \tag{12}$$

donc

$$2x_2 - x_1 \overset{(12)}{=} 2x_8 \overset{(11)}{=} 2(3x_2 - 4x_1)$$

Cela donne

$$4x_2 = 7x_1 \tag{13}$$

d'où

$$4x_8 \overset{(12)}{=} 2(2x_2 - x_1) = 4x_2 - 2x_1 \overset{(13)}{=} 7x_1 - 2x_1 = 5x_1 \tag{14}$$

Enfin on a

$$2x_3 \overset{(7)}{=} 2(x_6 + 2x_8) \overset{(8)-(14)}{=} 2x_1 + 5x_1 = 7x_1$$

Conclusion :

$$x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_3 = \frac{7}{2}x_1$$
$$x_4 = x_1$$
$$x_5 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_6 = x_1$$
$$x_7 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_8 = \frac{5}{4}x_1$$

On choisit $x_1 = 4$ (pour ne pas avoir de fractions) ainsi

$$4CuSCN + 7KIO_3 + 14HCl \to 4CuSO_4 + 7KCl + 4HCN + 7ICl + 5H_2O$$

Existe-t-il une méthode générale pour résoudre un système linéaire ?

Définitions

Soit $n, p \geq 1$ des entiers. Un système linéaire $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

- Les coefficients a_{ij} et les secondes membres b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{R}$.
- Les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{R}$.
- Une solution de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- Un système est impossible, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution.
  Un système est possible, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- Deux systèmes sont équivalents s'ils admettent les mêmes solutions.
- Le système homogène associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.
- Un système est carré si $n = p$.

Définitions

Soit $n, p \geq 1$ des entiers. Un système linéaire $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

- Les coefficients a_{ij} et les secondes membres b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{R}$.
- Les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{R}$.
- Une solution de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- Un système est impossible, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution.
  Un système est possible, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- Deux systèmes sont équivalents s'ils admettent les mêmes solutions.
- Le système homogène associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.
- Un système est carré si $n = p$.

Définitions

Soit $n, p \geq 1$ des entiers. Un système linéaire $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \ldots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

- Les coefficients a_{ij} et les secondes membres b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{R}$.
- Les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{R}$.
- Une solution de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- Un système est impossible, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution.
  Un système est possible, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- Deux systèmes sont équivalents s'ils admettent les mêmes solutions.
- Le système homogène associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.
- Un système est carré si $n = p$.

Définitions

Soit $n, p \geq 1$ des entiers. Un système linéaire $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

- Les coefficients a_{ij} et les secondes membres b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{R}$.
- Les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{R}$.
- Une solution de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- Un système est impossible, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution.
  Un système est possible, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- Deux systèmes sont équivalents s'ils admettent les mêmes solutions.
- Le système homogène associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.
- Un système est carré si $n = p$.

Définitions

Soit $n, p \geq 1$ des entiers. Un système linéaire $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

- Les coefficients a_{ij} et les secondes membres b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{R}$.
- Les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{R}$.
- Une solution de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- Un système est impossible, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution.
  Un système est possible, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- Deux systèmes sont équivalents s'ils admettent les mêmes solutions.
- Le système homogène associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.
- Un système est carré si $n = p$.

Définitions

Soit $n, p \geq 1$ des entiers. Un système linéaire $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

- Les coefficients a_{ij} et les secondes membres b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{R}$.
- Les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{R}$.
- Une solution de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- Un système est impossible, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution.
  Un système est possible, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- Deux systèmes sont équivalents s'ils admettent les mêmes solutions.
- Le système homogène associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.
- Un système est carré si $n = p$.

Définitions

Soit $n, p \geq 1$ des entiers. Un système linéaire $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

- Les coefficients a_{ij} et les secondes membres b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{R}$.
- Les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{R}$.
- Une solution de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- Un système est impossible, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution.
  Un système est possible, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- Deux systèmes sont équivalents s'ils admettent les mêmes solutions.
- Le système homogène associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.
- Un système est carré si $n = p$.

Définitions

Notation matricielle

Le système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

s'écrit de manière compacte comme le tableau à n ligne et $p+1$ colonnes suivant :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} & b_n \end{array}\right]$$

Exemple

Système

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+4y-3z=5 \\ 3x+6y-5z=2 \end{cases}$$

Matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 5 \\ 3 & 6 & -5 & 2 \end{array}\right]$$

Définitions

Système échelonné

Un système est en escalier, ou échelonné, si le nombre de premiers coefficients nuls successifs de chaque équation est strictement croissant.

Exemple

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrcl} 5x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & & +x_6 & = & b_1 \\ & & 3x_3 & -x_4 & +2x_5 & & = & b_2 \\ & & & & -x_5 & +x_6 & = & b_3 \\ & & & & & 5x_6 & = & b_4 \\ & & & & & 0 & = & b_5 \end{array}\right. \qquad (S)$$

Définitions

Système échelonné

Un système est en escalier, ou échelonné, si le nombre de premiers coefficients nuls successifs de chaque équation est strictement croissant.

Exemple

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} 5x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & & +x_6 & = & b_1 \\ & & 3x_3 & -x_4 & +2x_5 & & = & b_2 \\ & & & & -x_5 & +x_6 & = & b_3 \\ & & & & & 5x_6 & = & b_4 \\ & & & & & 0 & = & b_5 \end{array}\right. \qquad (S)$$

Quand un système échelonné contient une équation du type

$$0x_1 + \cdots + 0x_p = b,$$

- si $b \neq 0$ le système est impossible,
- si $b = 0$, on peut supprimer cette équation, ce qui conduit à un système équivalent à (S) dit système réduit.

Définitions

Résolution d'un système échelonné

Exemple

$$\begin{cases} x+y+z = 6, \\ \quad y+z = 5, \\ \qquad z = 3. \end{cases}$$

Ce système est possible et admet une et une seule solution : en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$z = 3,$

$y = 5 - z = 5 - 3 = 2,$

$x = 6 - y - z = 6 - 2 - 3 = 1.$

Définitions

Résolution d'un système échelonné

Exemple

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ y+z=5, \\ z=3. \end{cases}$$

Ce système est possible et admet une et une seule solution : en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$z=3,$$
$$y=5-z=5-3=2,$$
$$x=6-y-z=6-2-3=1.$$

Exemple

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ y+z=5, \\ 0=0. \end{cases}$$

Ce système est possible et admet une infinité de solutions : en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$z=\kappa \in \mathbb{R},$$
$$y=5-\kappa,$$
$$x=6-y-z=1.$$

Définitions

Résolution d'un système échelonné

Exemple

$$\begin{cases} x+y+z = 6, \\ y+z = 5, \\ z = 3. \end{cases}$$

Ce système est possible et admet une et une seule solution : en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$z = 3,$$
$$y = 5 - z = 5 - 3 = 2,$$
$$x = 6 - y - z = 6 - 2 - 3 = 1.$$

Exemple

$$\begin{cases} x+y+z = 6, \\ y+z = 5, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Ce système est possible et admet une infinité de solutions : en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$z = \kappa \in \mathbb{R},$$
$$y = 5 - \kappa,$$
$$x = 6 - y - z = 1.$$

Exemple

$$\begin{cases} x+y+z = 6, \\ y+z = 5, \\ 0 = 3. \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution car aucune valeur de z permet de résoudre $0z = 3$.

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Idée de la méthode

La méthode de Gauss transforme un système linéaire en un système échelonné équivalent.

Opérations possibles :

- remplacer une ligne par elle même $\pm$ un multiple d'une autre ligne

Exemple

$$\begin{cases} x+y+\quad z= 6, \\ \quad y+\quad z= 5, \\ \quad y+2z= 8, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{cases} x+y+z= 6, \\ y+z= 5, \\ z= 3. \end{cases}$$

- échanger deux lignes

Exemple

$$\begin{cases} x+y+z= 6, \\ z= 3, \\ y+z= 5, \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} x+y+z= 6, \\ y+z= 5, \\ z= 3. \end{cases}$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Algorithme

La méthode de Gauss transforme un système linéaire en un système échelonné équivalent.

Elle comporte $n-1$ étapes :

- à chaque étape j on "élimine" l'inconnue x_j dans les lignes L_i pour $i > j$:

Étape j de la méthode de Gauss :

On transforme toutes les lignes L_i avec $i > j$ selon la règle :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} L_j \qquad [\text{ou } L_i \leftarrow a_{jj} L_i - a_{ij} L_j]$$

- si, à l'étape j, le coefficient a_{jj} (appelé pivot de l'étape j) est $= 0$, on permute deux lignes (*i.e.* deux équations) du système linéaire.
- En réitérant le procédé pour i de 1 à $n-1$, on aboutit à un système échelonné simple à résoudre.

Variante de Jordan :

On transforme toutes les lignes L_i avec $i \neq j$ selon la règle :

$$L_i \leftarrow a_{jj} L_i - a_{ij} L_j \qquad [\text{ou } L_i \leftarrow a_{jj} L_i - a_{ij} L_j].$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\Longrightarrow$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\Longrightarrow$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=2 \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3 \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4-4L_1}} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1 \\ -x_2-2x_3-7x_4=0 \\ -2x_2-8x_3-10x_4=0 \\ -7x_2-10x_3-13x_4=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4-7L_2}} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1 \\ -x_2-2x_3-7x_4=0 \\ -4x_3+4x_4=0 \\ 4x_3+36x_4=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4+L_3} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1 \\ -x_2-2x_3-7x_4=0 \\ -4x_3+4x_4=0 \\ 40x_4=0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\Longrightarrow$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\Longrightarrow$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\Longrightarrow$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\Longrightarrow$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\Longrightarrow$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\Longrightarrow$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\Longrightarrow$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\Longrightarrow$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\Longrightarrow$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Système avec paramètres

Testez-vous

Pour quelles valeurs de a et c le système linéaire suivant admet aucune, une seule ou une infinité de solutions ?

$$\begin{cases} x \ +5y+z=0, \\ x \ +6y-z=2, \\ 2x+ay+z=c. \end{cases}$$

Correction

3 équations $\implies$ 2 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x \ +5y+z=0 \\ x \ +6y-z=2 \\ 2x+ay+z=c \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}} \begin{cases} x+5y \quad +z=0 \\ \quad y \quad -2z=2 \\ \quad (a-10)y-z=c \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=2]{L_3\leftarrow L_3-(a-10)L_2} \begin{cases} x+5y+z \quad =0 \\ \quad y \quad -2z \quad =2 \\ \quad (2a-21)z=c-2(a-10) \end{cases}$$

Étudions la dernière équation :

$$(2a-21)z=(c-2a+20)$$

- Si $a\neq\frac{21}{2}$ alors $z=\frac{c-2a+20}{2a-21}$ et on trouve y puis x en remontant : il existe une et une seule solution ;
- si $a=\frac{21}{2}$ alors
  - si $c-2a+20=0$ (*i.e.* $c=1$), alors $z=\kappa\in\mathbb{R}$ et on trouve y puis x en remontant : il existe une infinité de solutions ;
  - si $c-2a+20\neq 0$ (*i.e.* $c\neq 1$), alors il n'y a aucune solution.

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Système avec paramètres

Testez-vous

Pour quelles valeurs de a et c le système linéaire suivant admet aucune, une seule ou une infinité de solutions ?

$$\begin{cases} x + 5y + z = 0, \\ x + 6y - z = 2, \\ 2x + ay + z = c. \end{cases}$$

Correction

3 équations $\implies$ 2 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ x + 6y - z = 2 \\ 2x + ay + z = c \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ y - 2z = 2 \\ (a-10)y - z = c \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=2]{L_3 \leftarrow L_3 - (a-10)L_2} \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ y - 2z = 2 \\ (2a-21)z = c - 2(a-10) \end{cases}$$

Étudions la dernière équation :

$$(2a-21)z = (c - 2a + 20)$$

- Si $a \neq \frac{21}{2}$ alors $z = \frac{c-2a+20}{2a-21}$ et on trouve y puis x en remontant : il existe une et une seule solution ;
- si $a = \frac{21}{2}$ alors
  - si $c - 2a + 20 = 0$ (*i.e.* $c = 1$), alors $z = \kappa \in \mathbb{R}$ et on trouve y puis x en remontant : il existe une infinité de solutions ;
  - si $c - 2a + 20 \neq 0$ (*i.e.* $c \neq 1$), alors il n'y a aucune solution.

Système sur-déterminé

Si le système (S) a n équations et m inconnues avec $n > m$, on dit que le système est sur-déterminé. On considère alors (S') un sous-système carré d'ordre m qu'on peut résoudre par exemple par la méthode du pivot de Gauss. Parmi les solutions de ce système carré, on cherchera celles qui vérifient les équations de (S) qui n'apparaissent pas dans (S').

Exemple

Soit les systèmes linéaires de $n = 3$ équations et $m = 2$ inconnues

$$(S_1) \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ x + 3y = 4 \end{cases} \qquad (S_2) \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

Prenons comme sous-système carré d'ordre $m = 2$ celui constitué des deux premières équations et résolvons-le :

$$(S') \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + y = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ce système admet une seule solution : $x = y = 1$.
On vérifie si cette solution satisfait l'équation de (S_1) qui n'apparaît pas dans (S') :

$$x + 3y = 1 + 3 = 4$$

donc $x = y = 1$ est l'unique solution de (S_1).
On vérifie si cette solution satisfait l'équation de (S_2) qui n'apparaît pas dans (S') :

$$x + 3y = 1 + 3 = 4 \neq 0$$

donc (S_2) n'admet pas de solution.

Système sur-déterminé

Comment envoyer un message secret avec plusieurs espions.

In "real life"

Imaginons que l'on désire envoyer un message secret. Par codage, on peut remplacer ce message par un nombre, appelons-le n.

Considérons un polynôme $P(X) = a_k X^k + \cdots + a_1 X + n$ de degré k dont le terme indépendant vaut exactement n. En particulier, on a $P(0) = n$. Un corollaire du théorème fondamental de l'algèbre stipule que le polynôme P est complètement caractérisé par les valeurs qu'il prend en $k+1$ points, par exemple en $X = 1, 2, \ldots, k+1$.

On engage alors au moins $k+1$ espions (mieux en engager un peu plus au cas où certains seraient capturés par les «ennemis»). On donne au i-ème espion le nombre $P(i)$. Les espions se dispersent (par exemple, pour passer les lignes ennemies). Une fois qu'au moins $k+1$ espions sont arrivés à destination, il est aisé de reconstituer le polynôme (on a *un système d'au moins* $k+1$ *équations linéaires* pour retrouver les $k+1$ coefficients de P) et ainsi retrouver la valeur secrète n.
Si un espion est capturé et qu'il parle, les ennemis auront à leur disposition un des $P(i)$, cela ne leur permet nullement de retrouver n.
De même, si un espion étaient en fait un agent double, connaître $P(i)$ seul ne sert à rien.

Source : `http://michelrigo.wordpress.com/2010/01/30/partage-de-secrets-et-tfa/`

Système sur-déterminé

Comment envoyer un message secret avec plusieurs espions.

In "real life"

Imaginons que l'on désire envoyer un message secret. Par codage, on peut remplacer ce message par un nombre, appelons-le n.

Considérons un polynôme $P(X) = a_k X^k + \cdots + a_1 X + n$ de degré k dont le terme indépendant vaut exactement n. En particulier, on a $P(0) = n$. Un corollaire du théorème fondamental de l'algèbre stipule que le polynôme P est complètement caractérisé par les valeurs qu'il prend en $k+1$ points, par exemple en $X = 1, 2, \ldots, k+1$.

On engage alors au moins $k+1$ espions (mieux en engager un peu plus au cas où certains seraient capturés par les «ennemis»). On donne au i-ème espion le nombre $P(i)$. Les espions se dispersent (par exemple, pour passer les lignes ennemies). Une fois qu'au moins $k+1$ espions sont arrivés à destination, il est aisé de reconstituer le polynôme (on a *un système d'au moins* $k+1$ *équations linéaires* pour retrouver les $k+1$ coefficients de P) et ainsi retrouver la valeur secrète n.
Si un espion est capturé et qu'il parle, les ennemis auront à leur disposition un des $P(i)$, cela ne leur permet nullement de retrouver n.
De même, si un espion étaient en fait un agent double, connaître $P(i)$ seul ne sert à rien.

Source : `http://michelrigo.wordpress.com/2010/01/30/partage-de-secrets-et-tfa/`

Testez-vous

Calculer n si $k = 2$ et on envoie des espions avec les messages suivants :

- espion 1, message 45
- espion 2, message 50
- espion 3, message 57
- espion 4, message 66

Système sur-déterminé

Partage de secrets

Correction

$k = 2$ donc on cherche un polynôme de la forme $p(x) = a + bx + cx^2$ qui satisfait les conditions $p(1) = 45$, $p(2) = 50$, $p(3) = 57$ et $p(4) = 66$. Cela donne le système linéaire

$$\begin{cases} a + b + c = 45 \\ a + 2b + 2^2c = 50 \\ a + 3b + 3^2c = 57 \\ a + 4b + 4^2c = 66 \end{cases}$$

On a 4 équations et 3 inconnues : le système est sur-déterminé.
Négligeons pour le moment la dernière équation et résolvons avec Gauss

$$\begin{cases} a \ +b \ +c = 45 \\ a+2b+4c = 50 \\ a+3b+9c = 57 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \begin{cases} a+b \ +c = 45 \\ b \ +3c = 5 \\ 2b+8c = 12 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=2]{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{cases} a+b+c = 45 \\ b+3c = 5 \\ 2c = 2 \end{cases} \implies \begin{aligned} c &= 1 \\ b &= 5 - 3c = 2 \\ a &= 45 - b - c = 42 \end{aligned}$$

Vérifions si la dernière équation est bien satisfaite :

$$42 + 4 \times 2 + 4^2 \times 1 = 66.$$

Le message secret est donc $n = a = 42$.

Système sous-déterminé

Un système est sous-déterminé si, après échelonnage, le nombre d'équations significatives est inférieur au nombre d'inconnues.

Exemple

Échelonnons le système linéaire suivant de $n = 2$ équations et $m = 3$ inconnues

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y-z=4 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x+y+z=2 \\ -2y-2z=2 \end{cases}$$

Ce système admet une infinité de solutions : $z = \kappa \in \mathbb{R}$, $y = -1-\kappa$ et $x = 3$.

Exemple

Échelonnons le système linéaire suivant de $n = 3$ équations et $m = 3$ inconnues

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y-z=4 \\ 3x+y+z=8 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x+y+z=2 \\ -2y-2z=2 \\ -2y-2z=2 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{cases} x+y+z=2 \\ -2y-2z=2 \\ 0=0 \end{cases}$$

On obtient le même système que précédemment.

Système sous-déterminé

Équilibrage de réactions chimiques

In "real life"

Du point de vue mathématique, équilibrer une réaction chimique signifie trouver des coefficients (dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Q}$), appelés coefficients stœchiométriques, qui satisfont certaines contraintes.
Toutes ces contraintes dépendent linéairement des coefficients stœchiométriques, ce qui amène tout naturellement à l'écriture d'un système linéaire.
Typiquement on aura n inconnues mais seulement $n-1$ équations linéairement indépendantes : en effet, les coefficients stœchiométriques ne définissent pas des quantités absolues mais seulement les rapports entre les différents éléments. Par conséquent, si les coefficients trouvés équilibrent la réaction, alors tous les multiples entiers de ces coefficients équilibrent aussi la réaction.

Exemple

Considérons la réaction

$$H_2 + O_2 \longrightarrow H_2O.$$

Notons x_1, x_2 et x_3 les coefficients stœchiométriques

$$x_1H_2 + x_2O_2 \longrightarrow x_3H_2O.$$

Les contraintes sont :

- la conservation du nombre d'atomes d'hydrogène : $2x_1 = 2x_3$,
- la conservation du nombre d'atomes d'oxygène : $2x_2 = x_3$.

On note qu'on a 3 inconnues mais seulement 2 équations linéairement indépendantes.
Pour résoudre le problème sans paramètres, fixons arbitrairement un des coefficients, par exemple $x_3 = 1$. On doit alors résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} 2x_1 = 2 \\ 2x_2 = 1 \end{cases}$$

On trouve alors $x_1 = 1$ et $x_2 = 1/2$. Si nous voulons des coefficients stœchiométriques entiers, il suffit de multiplier tous les coefficients par 2 et on a ainsi

$$2H_2 + 1O_2 \longrightarrow 2H_2O.$$