Quelques remarques sur la vie de Pierre de Fermat

Votre Nom

28 juin 2013

Table des matières

Introduction

Pierre de Fermat, né dans la première décennie du XVII^{e} siècle à Beaumont-de-Lomagne et mort le 12 janvier 1665 à Castres, est un magistrat et mathématicien français, surnommé «le prince des amateurs». Il est en même temps un habile latiniste et helléniste. Il s'est aussi intéressé aux sciences physiques ; on lui doit notamment le principe de Fermat en optique.

Remarque. Les éléments biographiques sont tirés de `http://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat`

Figure 1 – Pierre de Fermat

1 Quelques résultats mathématiques marquants

Fermat partage avec Viète, dont il utilise les notations, et Descartes, avec qui il fut en conflit, la gloire d'avoir appliqué l'algèbre à la géométrie.

D'Alembert voyait dans ses travaux la première application du calcul infinitésimal. Il imagina, en effet, pour déterminer les tangentes, une méthode, dite *de maximis et minimis*, qui le fait regarder comme le premier inventeur du calcul différentiel et le premier à utiliser des formules de dérivation.

Fermat contribue dans son échange épistolaire avec Blaise Pascal à élaborer les bases du calcul des probabilités, une mathématique du hasard que provoque l'étude du problème des partis du chevalier de Méré. Mais sa contribution majeure concerne la théorie des nombres et les équations diophantiennes. Auteur de plusieurs théorèmes ou conjectures dans ce domaine, il est au cœur de la «théorie moderne des nombres».

1.1 Les «théorèmes de Fermat »

Il est très connu pour deux «théorèmes» :
- le «petit théorème de Fermat» ;
- le «dernier théorème de Fermat»(ce dernier n'était qu'une conjecture et l'est resté durant plus de trois siècles de recherches fiévreuses).

Théorème 1.1 (Petit théorème de Fermat)**.** *Si p est un nombre premier et a un entier naturel non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.*

Démonstration. Fermat n'a pas fourni sa démonstration du théorème 1.1. Le 18 octobre 1640, il écrit à Frénicle de Bessy :

> «Tout nombre premier mesure infailliblement une des puissances -1 de quelque progression que ce soit, et l'exposant de la dite puissance est sous-multiple du nombre premier donné $-1 \ldots$ Et cette proposition est généralement vraie en toutes progressions et en tous nombres premiers ; de quoi je vous envoierois la démonstration, si je n'appréhendois d'être trop long.»

□

Théorème 1.2 (Dernier théorème de Fermat)**.** *Lorsque n est un entier strictement supérieur à 2, il n'existe pas d'ensemble d'entiers strictement positifs x, y, z vérifiant l'équation*

$$x^n + y^n = z^n.$$

Remarque. Ce théorème fut démontré par le mathématicien anglais Andrew Wiles de l'Université de Princeton, avec l'aide de Richard Taylor. Après une première présentation en juin 1993, puis la découverte d'une erreur et un an de travaux supplémentaires, la preuve fut finalement publiée en 1995 dans *Annals of Mathematics*.

Pierre de Fermat lui-même annotait dans la marge de son exemplaire des Arithmétiques qu'il en avait découvert une démonstration vraiment remarquable, mais manquait de place pour la donner à cet endroit :

«J'ai trouvé une merveilleuse démonstration de cette proposition, mais la marge est trop étroite pour la contenir.»

Il semble assez improbable que Pierre de FERMAT ait réellement réussi à démontrer ce théorème dans le cas général ; en effet, la démonstration réalisée par Andrew WILES (même si le dernier théorème de Fermat n'en est qu'un corollaire) utilise des outils mathématiques d'une grande complexité dont on ne semble guère pouvoir se passer. Compte tenu des connaissances de son époque, FERMAT ne pouvait pas les soupçonner.

1.2 Les nombres de Fermat

Un nombre de FERMAT est un entier naturel qui peut s'écrire sous la forme $2^{2^n}+1$, avec n entier. Le n-ème nombre de FERMAT est noté F_n.

Ces nombres doivent leur nom à FERMAT qui émit la conjecture que tous ces nombres étaient premiers. Cette conjecture se révéla fausse, F_5 étant composé, de même que tous les nombres de FERMAT jusqu'à F_{32}. On ne sait pas si les nombres à partir de F_{33} sont premiers ou composés. Les seuls nombres de Fermat premiers connus sont donc F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4.

1.2.1 Propriétés

La suite des nombres de Fermat possède plusieurs relations de récurrence. Par exemple, si $n \geq 2$, on a

$$F_n = (F_{n-1}-1)^2+1 \qquad \text{ou} \qquad F_n = F_{n-1}^2 - 2(F_{n-2}-1)^2$$

ou encore, avec des produits de nombres de FERMAT,

$$F_n = 2 + \prod_{i=0}^{n-1} F_i \qquad \text{ou} \qquad F_n = F_{n-1} + 2^{(2^{n-1})} \prod_{i=0}^{n-2} F_i.$$

On en déduit le théorème

Théorème 1.3 (GOLDBACH)**.** *Deux nombres de* FERMAT *distincts sont premiers entre eux.*

Soit $D(n,b)$ le nombre de chiffres utilisés pour écrire F_n en base b, alors [1]

$$\begin{aligned} D(n,b) &= \lfloor 1 + \log_b \left(2^{2^n}+1\right) \rfloor & (1)\\ &\approx \lfloor 1 + \log_b \left(2^{2^n}\right) \rfloor & (2)\\ &= 1 + \lfloor 2^n \log_b(2) \rfloor. & (3) \end{aligned}$$

Par exemple, en notation décimale,

1. $F_0 = 3$ et $D(0,10) = 1$,

1. Les crochets désignent la fonction partie entière et $\log_b$ le logarithme de base b.

2. $F_1 = 5$ et $D(1, 10) = 1$,
3. $F_2 = 17$ et $D(2, 10) = 2$,
4. $F_3 = 257$ et $D(3, 10) = 3$,
5. $F_4 = 65537$ et $D(4, 10) = 5$,
6. $F_5 = 4294967297$ et $D(5, 10) = 10$.

La raison historique de l'étude des nombres de FERMAT est la recherche de nombres premiers. FERMAT connaissait déjà la proposition suivante

Proposition 1.4. *Soit k un entier strictement positif, si le nombre $2^k + 1$ est premier alors k est une puissance de 2.*

Démonstration. Il existe deux entiers a impair et b tels que $k = a2^b$. En posant $c = 2^{2^b}$, on dispose alors des égalités suivantes

$$1 + 2^k = 1 + c^a = (1 + c) \sum_{i=0}^{a-1} (-1)^i c^i,$$

qui montrent que $1 + c$ est un diviseur du nombre premier $1 + 2^k$ et donc lui est égal, si bien que $k = 2^b$. □

Fermat a conjecturé (erronément) que la réciproque était vraie et il a montré que F_n est premier pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Actuellement, on ne connaît que cinq nombres de FERMAT premiers, ceux cités ci-dessus.

1.2.2 Factorisation des nombres de Fermat composés

F_n	$D(n, 10)$	Nombre de facteurs	Facteurs
5	10	2	3 et 7
6	20	2	6 et 14
7	39	2	17 et 22
8	78	3	16 et 62
9	155	3	7, 49 et 99
10	309	4	8, 10, 40 et 252
11	617	5	6, 6, 21, 22 et 564