Antennes

Compléments de cours

S. Pioch

1 Équations d'Helmholtz vectorielles

En régime harmonique, avec une dépendance temporelle $e^{+\mathrm{i}\omega t}$, et dans un milieu LHI (Linéaire, Homogène et Isotrope), les équations de Maxwell sont :

$$\begin{array}{lrcl} \textsf{M.F.} & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathscr{E}} & = & -\mathrm{i}\omega\mu\overrightarrow{\mathscr{H}} \quad (1)\\ \textsf{M.A.} & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathscr{H}} & = & \overrightarrow{\mathscr{J}} + \mathrm{i}\omega\varepsilon\overrightarrow{\mathscr{E}} \quad (2)\\ \textsf{M.G.} & \mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathscr{E}} & = & \underline{\rho}/\varepsilon \quad (3)\\ \textsf{M.T.} & \mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathscr{B}} & = & 0 \quad (4) \end{array}$$

Ces quatre équations s'accompagnent également de l'équation de continuité de la charge :

$$\mathrm{div}\overrightarrow{\mathscr{J}} + \mathrm{i}\omega\underline{\rho} = 0 \tag{5}$$

En prenant le rotationnel de la relation M.F., il vient :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathscr{E}}\right) = -\mathrm{i}\omega\mu\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{\mathscr{H}}$$

Substituant l'identité remarquable $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div} - \overrightarrow{\Delta}$ et M.A. dans l'expression précédente, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\overrightarrow{\mathscr{E}}\right) - \overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{\mathscr{E}} = -\mathrm{i}\omega\mu\left(\overrightarrow{\mathscr{J}} + \mathrm{i}\omega\varepsilon\overrightarrow{\mathscr{E}}\right)$$

Cette dernière devient, en exploitant M.G. et en reconnaissant l'expression du nombre d'onde $k = \omega/c \mid c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$:

$$\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{\mathscr{E}} + k^2\overrightarrow{\mathscr{E}} = \frac{1}{\varepsilon}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\underline{\rho} + \mathrm{i}\omega\mu\overrightarrow{\mathscr{J}} \tag{6}$$

Enfin, l'application du gradient sur (5) injecté dans (6) et la factorisation par le terme $\mathrm{i}/\omega\varepsilon$ donnent l'équation d'Helmholtz du vecteur-phaseur champ électrique :

$$\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{\mathscr{E}} + k^2\overrightarrow{\mathscr{E}} = \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\overrightarrow{\mathscr{J}}\right) + k^2\overrightarrow{\mathscr{J}}\right) \tag{7}$$

Un raisonnement similaire peut s'appliquer au vecteur-phaseur champ magnétique. Pour cela, il suffit d'effectuer les étapes suivantes :

a) prendre le rotationnel de M.A. ;

b) utiliser l'identité remarquable $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div} \; - \; \overrightarrow{\Delta}$;

c) exploiter la relation de M.T. et de M.F.

Par conséquent, les équations de Helmholtz pour les vecteurs-phaseurs champ électrique et champ magnétique sont, sous une forme compacte :

$$\left(\overrightarrow{\Delta} + k^2\right) \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathscr{E}} \\ \overrightarrow{\mathscr{H}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}) + k^2\right) \\ -\,\overrightarrow{\mathrm{rot}} \end{Bmatrix} \overrightarrow{\mathscr{J}} \tag{8}$$

2 Solutions des équations d'Helmholtz vectorielles

Ces équations peuvent à nouveau se réduire de la façon suivante :

$$\left(\Delta + k^2\right) \overrightarrow{\mathscr{U}} = -\overrightarrow{\mathscr{S}} \tag{9}$$

avec $\overrightarrow{\mathscr{U}}$ le vecteur-phaseur champ électrique ou champ magnétique, et $\overrightarrow{\mathscr{S}}$ le terme source correspondant respectivement à chacun d'eux. L'unique solution (particulière) de l'équation (9) est :

$$\overrightarrow{\mathscr{U}} = \mathscr{G} * \overrightarrow{\mathscr{S}} = \overrightarrow{\mathscr{S}} * \mathscr{G} \tag{10}$$

où le symbole $*$ désigne le produit de convolution. $\mathscr{G}$ est la fonction de Green solution de la relation :

$$\left(\Delta + k^2\right) \mathscr{G} = -\delta \tag{11}$$

avec δ la distribution de Dirac, et telle que dans l'espace $\mathbb{R}^3$:

$$\mathscr{G}(\vec{r}) = \frac{e^{-\mathrm{i}kr}}{4\pi r} \tag{12}$$

Par ailleurs, cette fonction de Green vérifie la condition de rayonnement de Sommerfeld ou condition d'onde sortante :

$$\lim_{r \to +\infty} r\left(\mathscr{G}_{,r} + \mathrm{i}k\mathscr{G}\right) = 0 \tag{13}$$

ou sous une forme équivalente :

$$\mathscr{G}_{,r} + \mathrm{i}k\mathscr{G} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{r}\right) \qquad r \to +\infty \tag{14}$$

Donc, les expressions des vecteurs-phaseurs champ électrique et champ magnétique, solution des équations d'Helmholtz, sont :

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{\mathscr{E}}(\vec{r}) &= -\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\overrightarrow{\mathscr{J}}\right) + k^2\overrightarrow{\mathscr{J}}\right) * \mathscr{G} \\ \overrightarrow{\mathscr{H}}(\vec{r}) &= \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{\mathscr{J}}\right) * \mathscr{G} \end{aligned}} \tag{15}$$

3 Expressions des vecteurs-phaseurs champ électrique et champ magnétique

3.1 Vecteur-phaseur champ magnétique

L'expression de $\overrightarrow{\mathscr{H}}$ dans (15) fait intervenir la dérivation (opérateur $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$) et l'intégration (produit de convolution). Cette expression reste inchangée en permutant les deux opérations, auquel cas $\overrightarrow{\mathscr{H}}$ devient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathscr{H}}(\vec{r}) = \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{\mathscr{J}}\right) * \mathscr{G} &= \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathscr{J}} * \mathscr{G}\right) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\int_{\mathcal{V}} \overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\,\mathscr{G}(R)\ \mathrm{d}v'\right) \mid R = ||\vec{r} - \vec{r'}|| \\ \Longrightarrow\ \overrightarrow{\mathscr{H}}(\vec{r}) &= \int_{\mathcal{V}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\,\mathscr{G}(R)\right)\ \mathrm{d}v' \end{aligned} \tag{16}$$

Se rappelant de l'identité remarquable $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\vec{u}) = f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}f \wedge \vec{u}$ avec $f = \mathscr{G}(R)$ et $\vec{u} = \overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})$, il vient ici :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\,\mathscr{G}(R)\right) &= \mathscr{G}(R) \qquad \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})}_{=0 \text{ car dérive par rapport à } \vec{r}} \qquad + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathscr{G}(R) \wedge \overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'}) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathscr{G}(R) \wedge \overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'}) \end{aligned} \tag{17}$$

Or, le gradient de la fonction de Green (cf. §4) est :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathscr{G}(R) = \mathscr{G}_{,R}\,\frac{\vec{R}}{R} = -\left(\mathrm{i}k + \frac{1}{R}\right)\mathscr{G}\,\frac{\vec{R}}{R} \tag{18}$$

En remplaçant (18) dans (17), tout en permutant l'ordre du produit vectoriel entre $\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathscr{G}$ et $\vec{\mathscr{J}}$, il vient :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{\mathscr{J}}(\vec{r'})\,\mathscr{G}(R)\right) = \left(\mathrm{i}k + \frac{1}{R}\right)\mathscr{G}\,\vec{\mathscr{J}}(\vec{r'}) \wedge \frac{\vec{R}}{R} \tag{19}$$

Cette dernière relation substituée dans (16), après avoir factorisé par $\mathrm{i}k$, donne l'expression du vecteur-phaseur champ magnétique $\vec{\mathscr{H}}$:

$$\boxed{\vec{\mathscr{H}}(\vec{r}) = \mathrm{i}k\int_{\mathcal{V}}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{i}kR}\right)\mathscr{G}(R)\left(\vec{\mathscr{J}}(\vec{r'}) \wedge \frac{\vec{R}}{R}\right)\mathrm{d}v'} \tag{20}$$

3.2 Vecteur-phaseur champ électrique

D'après (15) et en permutant les opérateurs comme dans le cas précédent, le vecteur-phaseur champ électrique $\vec{\mathscr{E}}$ admet alors l'expression :

$$\begin{aligned}\vec{\mathscr{E}}(\vec{r}) &= -\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\vec{\mathscr{J}}\right) * \mathscr{G} + k^2\vec{\mathscr{J}} * \mathscr{G}\right)\\ &= -\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\int_{\mathcal{V}}\overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\left(\vec{\mathscr{J}}(\vec{r'})\,\mathscr{G}(R)\right) + k^2\vec{\mathscr{J}}(\vec{r'})\,\mathscr{G}(R)\ \mathrm{d}v'\end{aligned} \tag{21}$$

À la lecture de cette relation, on comprend bien que la difficulté réside dans la simplification de la quantité :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\left(\vec{\mathscr{J}}(\vec{r'})\,\mathscr{G}(R)\right) \tag{22}$$

Pour cela, nous procédons en deux étapes :

a) Nous calculons la divergence :

$$\begin{aligned}\text{div}\left(\vec{\mathscr{J}}(\vec{r'})\,\mathscr{G}(R)\right) &= \mathscr{G}(R)\quad\underbrace{\text{div}\left(\vec{\mathscr{J}}(\vec{r'})\right)}_{=0 \text{ car dérive par rapport à } \vec{r}}\quad + \overrightarrow{\text{grad}}\,\mathscr{G}(R)\cdot\vec{\mathscr{J}}(\vec{r'})\\ &= \mathscr{G}_{,R}\frac{\vec{R}}{R}\cdot\vec{\mathscr{J}}(\vec{r'}) \qquad \text{d'après (18)}\end{aligned} \tag{23}$$

b) Nous prenons le gradient du résultat de (23) :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\,\mathscr{G}(R)\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathscr{G}_{,R}\frac{\overrightarrow{R}}{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\right) \tag{24}$$

Celle-ci de la forme :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(fg) = g\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f + f\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g \quad | \quad f = \mathscr{G}_{,R} \quad \text{et} \quad g = \frac{\overrightarrow{R}}{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})$$

donne :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\,\mathscr{G}(R)\right) &= \frac{\overrightarrow{R}}{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\,\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathscr{G}_{,R}}_{=\mathscr{G}_{,RR}\overrightarrow{R}/R} + \mathscr{G}_{,R}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\overrightarrow{R}}{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\right)\\ &= \mathscr{G}_{,RR}\left(\frac{\overrightarrow{R}}{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\right)\frac{\overrightarrow{R}}{R} + \mathscr{G}_{,R}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\overrightarrow{R}}{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\right)\end{aligned} \tag{25}$$

À présent, nous cherchons à calculer le gradient à droite de la somme de (25) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\overrightarrow{R}}{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\right) &= \frac{1}{R}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\right) + \overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\;\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\frac{1}{R}}_{=-R^{-2}\overrightarrow{R}/R}\\ &= \frac{1}{R}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\right) - \frac{1}{R}\left(\frac{\overrightarrow{R}}{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\right)\frac{\overrightarrow{R}}{R}\end{aligned} \tag{26}$$

où nous identifions un résultat de l'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \overline{\overline{\nabla}}\vec{v}\cdot\vec{u} + \overline{\overline{\nabla}}\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} + \vec{v}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u} \tag{27}$$

avec $\vec{u} = \overrightarrow{R}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})$ qui donne :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\right) = \overline{\overline{\nabla}}\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\cdot\overrightarrow{R} + \overline{\overline{\nabla}}\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'}) + \overrightarrow{R}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'}) + \overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{R} \tag{28}$$

Comme on dérive par rapport à $\vec{r}$, alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{R} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'}) = \vec{0}, \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\nabla}}\,\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'}) = \vec{0} \tag{29}$$

et :

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\nabla}}\,\overrightarrow{R} &= \overline{\overline{\nabla}}\left(\vec{r} - \overrightarrow{r'}\right) \\
&= \begin{pmatrix} (x-x')_{,x} & (x-x')_{,y} & (x-x')_{,z} \\ (y-y')_{,x} & (y-y')_{,y} & (y-y')_{,z} \\ (z-z')_{,x} & (z-z')_{,y} & (z-z')_{,z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{I}_3 \qquad \text{matrice identité d'ordre 3}
\end{aligned} \tag{30}$$

Injectant les résultats (29) et (30) dans (28), il vient :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\right) = \overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'}) \tag{31}$$

Substituant (31) dans (26), on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\overrightarrow{R}}{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\right) = \frac{1}{R}\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'}) - \frac{1}{R}\left(\frac{\overrightarrow{R}}{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\right)\frac{\overrightarrow{R}}{R} \tag{32}$$

Et, cette dernière remplacée dans (25) donne :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\,\mathscr{G}(R)\right) &= \mathscr{G}_{,RR}\left(\frac{\overrightarrow{R}}{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\right)\frac{\overrightarrow{R}}{R} \\
&\quad + \mathscr{G}_{,R}\left[\frac{1}{R}\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'}) - \frac{1}{R}\left(\frac{\overrightarrow{R}}{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\right)\frac{\overrightarrow{R}}{R}\right] \\
&= \left(\mathscr{G}_{,RR} - \mathscr{G}_{,R}\frac{1}{R}\right)\left(\frac{\overrightarrow{R}}{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\right)\frac{\overrightarrow{R}}{R} + \mathscr{G}_{,R}\frac{1}{R}\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})
\end{aligned} \tag{33}$$

Avant de poursuivre, calculons $\mathscr{G}_{,RR}$ en s'appuyant sur (18) :

$$\begin{aligned}\mathscr{G}_{,RR} = (\mathscr{G}_{,R})_{,R} &= \left(-\left[\mathrm{i}k + \frac{1}{R}\right]\mathscr{G}\right)_{,R} \\ &= -\left(-\frac{1}{R^2}\mathscr{G} - \left[\mathrm{i}k + \frac{1}{R}\right]\left[\mathrm{i}k + \frac{1}{R}\right]\mathscr{G}\right) \\ &= \left(\frac{2}{R^2} + \frac{\mathrm{i}2k}{R} - k^2\right)\mathscr{G}\end{aligned} \tag{34}$$

laquelle permet de simplifier la quantité $\mathscr{G}_{,RR} - \mathscr{G}_{,R}\dfrac{1}{R}$ présente dans (33) :

$$\begin{aligned}\mathscr{G}_{,RR} - \mathscr{G}_{,R}\frac{1}{R} &= \left(\frac{2}{R^2} + \frac{\mathrm{i}2k}{R} - k^2\right)\mathscr{G} + \left(\mathrm{i}k + \frac{1}{R}\right)\mathscr{G}\frac{1}{R} \\ &= \left(\frac{3}{R^2} + \frac{\mathrm{i}3k}{R} - k^2\right)\mathscr{G}\end{aligned} \tag{35}$$

Ainsi, remplaçant (35) et $\mathscr{G}_{,R}$ dans (33), on obtient :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\,\mathscr{G}(R)\right) = \left(\frac{3}{R^2} + \frac{\mathrm{i}3k}{R} - k^2\right)\mathscr{G}(R)\left(\frac{\vec{R}}{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\right)\frac{\vec{R}}{R} - \left(\mathrm{i}k + \frac{1}{R}\right)\frac{\mathscr{G}(R)}{R}\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'}) \tag{36}$$

qui après factorisation par $k^2\,\mathscr{G}(R)$ devient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\,\mathscr{G}(R)\right) = k^2\Bigg[&\left(-1 + \frac{\mathrm{i}3}{kR} + \frac{3}{(kR)^2}\right)\left(\frac{\vec{R}}{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\right)\frac{\vec{R}}{R} \\ &- \left(\frac{\mathrm{i}}{kR} + \frac{1}{(kR)^2}\right)\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\Bigg]\mathscr{G}(R)\end{aligned} \tag{37}$$

Finalement, ajoutant $k^2\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})$ à (37), l'expression du vecteur-phaseur champ électrique est :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathscr{E}} = \frac{\mathrm{i}k^2}{\omega\varepsilon}\int_{\mathcal{V}}\Bigg[&\left(1 + \frac{3}{\mathrm{i}kR} - \frac{3}{(kR)^2}\right)\left(\frac{\vec{R}}{R}\cdot\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\right)\frac{\vec{R}}{R} \\ &- \left(1 + \frac{1}{\mathrm{i}kR} - \frac{1}{(kR)^2}\right)\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\Bigg]\mathscr{G}(R)\ \mathrm{d}v'\end{aligned} \tag{38}$$

3.3 Formule des antennes

À une très grande distance des sources, c'est-à-dire $kR \gg 1$ ou $\lambda \ll R$, la distance $||\overrightarrow{R}|| = R$ se simplifie :

$$||\overrightarrow{R}|| = R = ||\vec{r} - \vec{r'}|| \approx r \tag{39}$$

et entraîne :

$$\overrightarrow{R} = r\,\hat{e}_\mathrm{r} \quad \text{et} \quad \frac{\overrightarrow{R}}{R} = \frac{r\,\hat{e}_\mathrm{r}}{r} = \hat{e}_\mathrm{r} \tag{40}$$

Pour la fonction de Green $\mathscr{G}$, l'amplitude (terme au dénominateur) est aussi $R = r$. Et, la distance R présente dans la phase (terme dans l'exponentielle) devient, en vertu du théorème d'Al-Kashi :

$$\begin{aligned}
R &= \left(r^2 + r'^2 - 2r\,r'\cos\alpha\right)^{1/2} \\
&= r\left(1 - 2\frac{r\,r'\cos\alpha}{r^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)^{1/2} \\
&= r\left(1 - 2\frac{r'\cos\alpha}{r} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)^{1/2} \\
&= r\left(1 - 2\frac{r'\cos\alpha}{2r} + \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right) && \text{dév. limité usuel en 0 de } (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \mathrm{O}(x^{n+1}) \\
\implies R &= r\left(1 - \frac{r'\cos\alpha}{r}\right) && r' < r
\end{aligned} \tag{41}$$

D'où, le terme $e^{-\mathrm{i}kR}$ se transforme en un produit de deux exponentielles :

$$e^{-\mathrm{i}kR} = e^{-\mathrm{i}kr} \cdot e^{\mathrm{i}kr'\cos\alpha} = e^{-\mathrm{i}kr} \cdot e^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r'}} \mid \vec{k} = k\,\hat{e}_\mathrm{r} \tag{42}$$

Ainsi, la fonction de Green $\mathscr{G}$ admet la relation, en champ lointain :

$$\mathscr{G}(r) = \frac{e^{-\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\, e^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r'}} \tag{43}$$

Par conséquent, en champ lointain ($kR \gg 1$) et en considérant les résultats (40) et (43), les vecteurs-phaseurs champ magnétique et champ électrique ont pour relation :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathscr{H}}(\vec{r}) &= -\mathrm{i}k\,\frac{e^{-\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\left(\hat{e}_\mathrm{r} \wedge \overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r})\right)\\ \overrightarrow{\mathscr{E}}(\vec{r}) &= \frac{\mathrm{i}k^2}{\omega\varepsilon}\,\frac{e^{-\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\left(\left[\hat{e}_\mathrm{r} \cdot \overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r})\right]\hat{e}_\mathrm{r} - \overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r})\right)\end{aligned} \tag{44}$$

avec $\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r})$ la transformée de Fourier de la densité de courant $\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})$, telle que :

$$\overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} \overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})e^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r'}}\ \mathrm{d}v' \tag{45}$$

Les expressions données en (44) sont plus communément connues sous le nom « formules des antennes ».

Remarque. — À grande distance, le champ électromagnétique a localement la structure d'une onde plane. Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{\mathscr{E}}$, $\overrightarrow{\mathscr{H}}$ et $\hat{e}_\mathrm{r}$ forment un trièdre direct vérifiant la relation :

$$\overrightarrow{\mathscr{E}} = Z\left(\overrightarrow{\mathscr{H}} \wedge \hat{e}_\mathrm{r}\right) \mid Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Pour preuve, il vient en exploitant (44) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathscr{E}} &= Z(-\mathrm{i}k)\,\frac{e^{-\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\left(\left[\hat{e}_\mathrm{r} \wedge \overrightarrow{\mathscr{J}}\right] \wedge \hat{e}_\mathrm{r}\right)\\ &= -\mathrm{i}Zk\,\frac{e^{-\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\left(\left[\underbrace{\hat{e}_\mathrm{r} \cdot \hat{e}_\mathrm{r}}_{=1}\right]\overrightarrow{\mathscr{J}} - \left[\hat{e}_\mathrm{r} \cdot \overrightarrow{\mathscr{J}}\right]\hat{e}_\mathrm{r}\right)\\ &= \frac{\mathrm{i}k^2}{\omega\epsilon}\,\frac{e^{-\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\left(\left[\hat{e}_\mathrm{r} \cdot \overrightarrow{\mathscr{J}}\right]\hat{e}_\mathrm{r} - \overrightarrow{\mathscr{J}}\right) \qquad \text{avec } Zk = \frac{k^2}{\omega\varepsilon} \text{ et multiplier par -1}\end{aligned}$$

■

3.4 Application au dipôle infinitésimal

Dans le cas du dipôle infinitésimal localisé au centre du repère cartésien orthonormé, orienté dans la direction $\hat{e}_3$ et parcouru par le courant I_0, le vecteur $\vec{r'}$ est alors un vecteur nul et le vecteur $\overrightarrow{\mathscr{I}}(\vec{r})$ devient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathscr{I}}(\vec{r}) &= \int_{\mathcal{V}} \overrightarrow{\mathscr{J}}(\vec{r'})\,\mathrm{d}v' \\
&= I_0\,\hat{e}_3 \int_{-l/2}^{l/2} \mathrm{d}z' \quad \text{intégrale de volume réduite à une intégrale curviligne} \\
&\Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathscr{I}}(\vec{r}) = I_0 l\,\hat{e}_3}
\end{aligned} \tag{46}$$

De ce fait, l'application (44) donne directement l'expression du vecteur-phaseur champ magnétique :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathscr{H}}(\vec{r}) &= -\,\mathrm{i}k\,\frac{e^{-\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\,\hat{e}_\mathrm{r} \wedge I_0 l\,\hat{e}_3 \\
&= -\,\mathrm{i}kI_0 l\,\frac{e^{-\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\,\hat{e}_\mathrm{r} \wedge \hat{e}_3 \\
&= -\,\mathrm{i}kI_0 l\,\frac{e^{-\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\,\hat{e}_\mathrm{r} \wedge (\cos\theta\,\hat{e}_\mathrm{r} - \sin\theta\,\hat{e}_\theta) \\
&\Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathscr{H}}(\vec{r}) = \mathrm{i}kI_0 l\,\frac{e^{-\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\,\sin\theta\,\hat{e}_\phi}
\end{aligned} \tag{47}$$

et l'expression du vecteur-phaseur champ électrique :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathscr{E}}(\vec{r}) &= \underbrace{\frac{\mathrm{i}k^2}{\omega\epsilon}\,\frac{e^{-\mathrm{i}kr}}{4\pi r} I_0 l}_{=\{\ldots\}}\left([\hat{e}_\mathrm{r}\cdot\hat{e}_3]\,\hat{e}_\mathrm{r} - \hat{e}_3\right) \\
&= \{\ldots\}\Big(\big[\hat{e}_\mathrm{r}\cdot(\cos\theta\,\hat{e}_\mathrm{r} - \sin\theta\,\hat{e}_\theta)\big]\hat{e}_\mathrm{r} - \cos\theta\,\hat{e}_\mathrm{r} + \sin\theta\,\hat{e}_\theta\Big) \\
&= \{\ldots\}\Big(\cancel{\cos\theta\,\hat{e}_\mathrm{r}} - \cancel{\cos\theta\,\hat{e}_\mathrm{r}} + \sin\theta\,\hat{e}_\theta\Big) \\
&\Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathscr{E}}(\vec{r}) = \mathrm{i}Z_0 I_0 lk\,\frac{e^{-\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\sin\theta\,\hat{e}_\theta} \quad \text{avec } \frac{k^2}{\omega\varepsilon} = Z_0 k
\end{aligned} \tag{48}$$

Les relations (47) et (48) sont bien identiques à celles données dans le polycopié de cours en slide 12.

4 Annexe

On se propose de détailler le calcul du gradient de la fonction de Green $\mathscr{G}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathscr{G}(R) = \frac{1}{4\pi}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{e^{-\mathrm{i}kR}}{R}\right) = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} \left(\dfrac{e^{-\mathrm{i}kR}}{R}\right)_{,x} \\ \left(\dfrac{e^{-\mathrm{i}kR}}{R}\right)_{,y} \\ \left(\dfrac{e^{-\mathrm{i}kR}}{R}\right)_{,z} \end{pmatrix} \tag{49}$$

avec :

$$R = \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}$$

Tout d'abord, nous nous concentrons sur le calcul de la composante dans la direction $\hat{e}_1$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^{-\mathrm{i}kR}}{R}\right)_{,x} &= \frac{1}{R^2}\left(\left[e^{-\mathrm{i}kR}\right]_{,x} R - e^{-\mathrm{i}kR} R_{,x}\right) \\ &= \frac{1}{R^2}\left(-\mathrm{i}kR_{,x}\, e^{-\mathrm{i}kR} R - e^{-\mathrm{i}kR} R_{,x}\right) \\ &= -\frac{e^{-\mathrm{i}kR}}{R^2}\left(1+\mathrm{i}kR\right) R_{,x} \end{aligned} \tag{50}$$

et :

$$\begin{aligned} R_{,x} &= \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}(x-x')\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-1/2} \\ \Longrightarrow\ R_{,x} &= \frac{x-x'}{R} \end{aligned} \tag{51}$$

d'où :

$$\left(\frac{e^{-\mathrm{i}kR}}{R}\right)_{,x} = -\frac{e^{-\mathrm{i}kR}}{R^3}\left(1+\mathrm{i}kR\right)(x-x') \tag{52}$$

De ce résultat, on déduit aisément les expressions pour les directions $\hat{e}_2$ et $\hat{e}_3$:

$$\left(\frac{e^{-\mathrm{i}kR}}{R}\right)_{,y} = -\frac{e^{-\mathrm{i}kR}}{R^3}\left(1+\mathrm{i}kR\right)(y-y') \tag{53}$$

$$\left(\frac{e^{-\mathrm{i}kR}}{R}\right)_{,z} = -\,\frac{e^{-\mathrm{i}kR}}{R^3}\,(1+\mathrm{i}kR)\,(z-z') \tag{54}$$

En sommant les résultats (52) à (54), l'expression du gradient de $\mathscr{G}$ devient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathscr{G}(R) &= -\,\frac{1}{4\pi}\,\frac{e^{-\mathrm{i}kR}}{R^3}\,(1+\mathrm{i}kR)\,\underbrace{\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \\ z-z' \end{pmatrix}}_{=\overrightarrow{R}} \\
&= -\,\frac{e^{-\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\,\frac{1+\mathrm{i}kR}{R}\,\frac{\overrightarrow{R}}{R} \\
&= -\left(\frac{1}{R}+\mathrm{i}k\right)\mathscr{G}\,\frac{\overrightarrow{R}}{R}
\end{aligned} \tag{55}$$

Par ailleurs, le calcul de la dérivée de la fonction de Green par rapport à R donne :

$$\begin{aligned}
\mathscr{G}_{,R} = \left(\frac{e^{-\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\right)_{,R} &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{-\mathrm{i}ke^{-\mathrm{i}kR}R - e^{-\mathrm{i}kR}}{R^2}\right) \\
&= -\,\frac{e^{-\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\,\frac{1+\mathrm{i}kR}{R} \\
&\implies \mathscr{G}_{,R} = -\left(\frac{1}{R}+\mathrm{i}k\right)\mathscr{G}
\end{aligned} \tag{56}$$

Par conséquent, le gradient de la fonction de Green $\mathscr{G}$ admet l'expression :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathscr{G}(R) = \mathscr{G}_{,R}\frac{\overrightarrow{R}}{R} = -\left(\frac{1}{R}+\mathrm{i}k\right)\mathscr{G}\,\frac{\overrightarrow{R}}{R}} \tag{57}$$