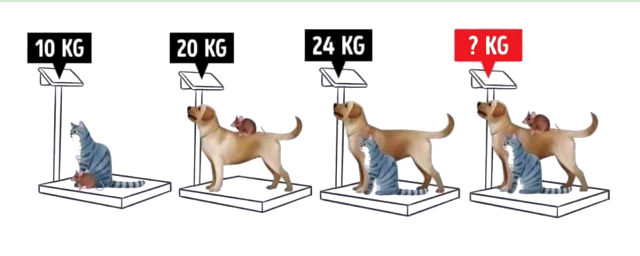
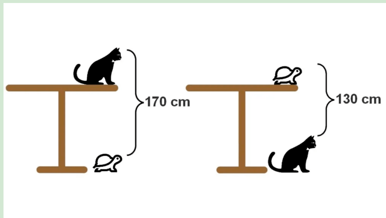
CHAPITRE 1

Contrôle par équipe du 9 mars 2023 : systèmes linéaires, valeurs/vecteurs propres

Exercice 1.1 (Résolution systèmes linéaires)



Déterminer la hauteur de la table.



Écrire les systèmes linéaires associés à ces deux problèmes et les résoudre avec la méthode de Gauss.
Pour mettre en équations les deux problèmes, on notera respectivement

- C le poids du chat, M celui de la sourie et D celui du chien ;
- C la hauteur du chat, T la hauteur de la table et t la hauteur de la tortue.

Correction

Chien Chat Souri On a le système

$$\begin{cases} C+M=10,\\ D+M=20,\\ C+D=24. \end{cases}$$

On a 3 inconnues et 3 équations linéaires. Avec la méthode de Gauss, si les inconnues sont dans l'ordre (C,M,D), la matrie augmentée est transformée comme suit :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 10\\ 0 & 1 & 1 & 20\\ 1 & 0 & 1 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 10\\ 0 & 1 & 1 & 20\\ 0 & -1 & 1 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 10\\ 0 & 1 & 1 & 20\\ 0 & 0 & 2 & 34 \end{array}\right).$$

Par remontée : $2D=34 \rightsquigarrow D=17$, la deuxième équation donne $M=20-D=3$ et enfin la première $C=10-M=7$. On conclut que $C+D+M=27$.

Astuce : on remarque que $(C+M)+(D+M)+(C+D)=2(C+D+M)$ donc $2(C+D+M)=10+20+24=54$ et finalement $C+D+M=27$.

Tortue Chat On a le système

$$\begin{cases} C+T-t=170,\\ t+T-C=130. \end{cases}$$

On a 3 inconnues et 2 équations linéaires : **le système est sous-déterminé.** Avec la méthode de Gauss nous avons :

$$\begin{cases} C+T-t=170,\\ -C+T+t=130, \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{cases} C+T-t=170,\\ 2T=300, \end{cases}$$

d'où $t=\kappa\in\mathbb{R}_*^+$, $T=150$ et $C=t+20$. Ainsi toutes les solutions s'écrivent $(C,T,t)=(\kappa+20,150,\kappa)$ et $T=150$.

Astuce : si on somme les deux équations on obtient $2T=300$ d'où $T=150$.

Exercice 1.2 (Système linéaire avec paramètre)

Soit k un réel et considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x+y+kz=2,\\ 2x+ky-z=1,\\ x+y+3z=k-1,\end{cases}$$

d'inconnues x, y, z. En utilisant le pivot de GAUSS, déterminer les valeurs de k de telle sorte que ce système possède :
a) une infinité de solutions;
b) aucune solution;
c) une solution unique.

Correction

$$[\mathbb{A}|\mathbf{b}]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2\\ 2 & k & -1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & k-1\end{array}\right)\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-L_1]{L_2\leftarrow L_2-\frac{1}{2}L_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2\\ 0 & k-2 & -1-2k & -3\\ 0 & 0 & 3-k & k-3\end{array}\right)$$

La dernière équation s'écrit donc

$$(3-k)z=-(3-k).$$

Il faut alors étudier séparément le cas où le coefficient devant z est nul et le cas où il est non nul, *i.e.* les deux cas $(3-k)=0$ et $(3-k)\neq 0$.

- Si $k=3$, la dernière équation correspond à $0z=0$, alors (S) possède une infinité de solutions car on pose $z=\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$ quelconque, puis on résout la deuxième équation $(k-2)y=-3+(1+2k)z$ qui devient $y=-3+7\alpha$ et enfin la première équation $x=2-y-kz$ qui devient $x=2+3-7\alpha-3\alpha=5-10\alpha$. Toutes les solutions s'écrivent

$$(x,y,z)=\Big(5-10\alpha, 7\alpha-3,\alpha\Big)$$

- si $k\neq 3$ alors $z=-1$ et la deuxième équation s'écrit $(k-2)y=-3+(1+2k)z$, soit encore

$$(k-2)y=-2(k+2).$$

  Il faut alors étudier séparément le cas où le coefficient devant y est nul et le cas où il est non nul, *i.e.* les deux cas $(k-2)=0$ et $(k-2)\neq 0$.
  - Si $k=2$ alors (S) ne possède aucune solution car la deuxième équation correspond à $0y=-8$;
  - si $k\neq 2$ alors (S) possède une solution unique : la deuxième équation devient $y=-3-(1+2k)=-4-2k$ puis la première $x=2-y-kz$ devient $x=2+4+2k+k=6+3k$ et on trouve

$$(x,y,z)=\left(\frac{(k+2)k}{k-2},-2\frac{k+2}{k-2}k,-1\right)$$

Exercice 1.3 (Matrice inverse, valeurs propres)

$$\mathbb{A}(\vartheta)=\begin{pmatrix}\cos(\vartheta) & \sin(\vartheta)\\ \sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta)\end{pmatrix},\qquad \vartheta\in\mathbb{R}.$$

1. Calculer $\det(\mathbb{A})$. En déduire l'existence ou la non existence de la matrice inverse. Si elle existe, la calculer.
2. Calculer ses valeurs propres. Dependent elles de ϑ?

Correction

1. $\mathbb{A}^{-1}$ existe pour tout ϑ car $\det(\mathbb{A})=-\cos^2(\vartheta)-\sin^2(\vartheta)=-1\neq 0$.
   Calculons $\mathbb{A}^{-1}$ en faisant attention à ne jamais diviser par 0 :

$$[\mathbb{A}|\mathbb{I}_2]=\left(\begin{array}{cc|cc}\cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) & 1 & 0\\ \sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta) & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[L_2\leftarrow\cos(\vartheta)L_2-\sin(\vartheta)L_1]{L_1\leftarrow\cos(\vartheta)L_1+\sin(\vartheta)L_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta)\\ 0 & -1 & -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta)\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2\leftarrow -L_2}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta)\\ 0 & 1 & \sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta)\end{array}\right)=[\mathbb{I}_2|\mathbb{A}^{-1}]$$

On remarque que $\mathbb{A}^{-1}=\mathbb{A}$.

Si on applique formellement la méthode de Gauss-Jordan sans se soucier des cas de division par zéro on a :

$$\begin{aligned}
[\mathbb{A}|\mathbb{I}_2]=\left(\begin{array}{cc|cc} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) & 1 & 0\\ \sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta) & 0 & 1\end{array}\right) &\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-\frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)}L_1}\left(\begin{array}{cc|cc} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) & 1 & 0\\ 0 & -\cos(\vartheta)-\frac{\sin^2(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} & -\frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} & 1\end{array}\right)\\
&=\left(\begin{array}{cc|cc} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{\cos(\vartheta)} & -\frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} & 1\end{array}\right)\\
&\xrightarrow{L_2\leftarrow -\cos(\vartheta)L_2}\left(\begin{array}{cc|cc} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) & 1 & 0\\ 0 & 1 & \sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta)\end{array}\right)\\
&\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1-\frac{1}{\sin(\vartheta)}L_2}\left(\begin{array}{cc|cc} \cos(\vartheta) & 0 & 1-\sin^2(\vartheta) & \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\\ 0 & 1 & \sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta)\end{array}\right)\\
&\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1/\cos(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta)\\ 0 & 1 & \sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta)\end{array}\right)=[\mathbb{I}_2|\mathbb{A}^{-1}]
\end{aligned}$$

Même méthode mais en simplifiant la première équation dès le début :

$$\begin{aligned}
[\mathbb{A}|\mathbb{I}_2]=\left(\begin{array}{cc|cc} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) & 1 & 0\\ \sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta) & 0 & 1\end{array}\right) &\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1/\cos(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} & \frac{1}{\cos(\vartheta)} & 0\\ \sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta) & 0 & 1\end{array}\right)\\
&\xrightarrow{L_2\leftarrow -\sin(\vartheta)L_1}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} & \frac{1}{\cos(\vartheta)} & 0\\ 0 & -\frac{1}{\cos(\vartheta)} & -\frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} & 1\end{array}\right)\\
&\xrightarrow{L_2\leftarrow -\cos(\vartheta)L_2}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} & \frac{1}{\cos(\vartheta)} & 0\\ 0 & 1 & \sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta)\end{array}\right)\\
&\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1-\frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)}L_2}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta)\\ 0 & 1 & \sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta)\end{array}\right)=[\mathbb{I}_2|\mathbb{A}^{-1}]
\end{aligned}$$

2. On doit calculer les racines du polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
p(\lambda)=\det(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}_2)=\begin{vmatrix}\cos(\vartheta)-\lambda & \sin(\vartheta)\\ \sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta)-\lambda\end{vmatrix}&=\big(\cos(\vartheta)-\lambda\big)\big(-\cos(\vartheta)-\lambda\big)-\big(\sin(\vartheta)\big)\big(\sin(\vartheta)\big)\\
&=-\cos^2(\vartheta)-\lambda\cos(\vartheta)+\lambda\cos(\vartheta)+\lambda^2-\sin^2(\vartheta)=\lambda^2-1=(\lambda-1)(\lambda+1).
\end{aligned}$$

La matrice $\mathbb{A}(\vartheta)$ admet les deux valeurs propres constantes ±1.

Exercice 1.4 (Valeurs/Vecteurs propres)

Considérons la matrice

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 4 & -5\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det(\mathbb{A})$. En déduire l'existence ou la non existence de la matrice inverse. Si elle existe, la calculer.
2. Calculer ses valeurs propres.
3. Calculer le vecteur propre associé à chaque valeur propre.
4. Diagonaliser, *i.e.* écrire les matrices $\mathbb{P}$ et $\mathbb{D}$ telles que $\mathbb{A}=\mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1}$. Vérifier qu'on a bien $\mathbb{A}\mathbb{P}=\mathbb{P}\mathbb{D}$.

Correction

1. *Déterminant et matrice inverse*
   Le déterminant est nul car $C_1+C_2=-C_3$, donc la matrice n'est pas inversible.
2. *Calcul des valeurs propres*
   Le polynôme caractéristique de $\mathbb{A}$ est

$$p(\lambda)=\det(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & -3\\ 1 & 4-\lambda & -5\\ 0 & 2 & -2-\lambda\end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix}4-\lambda & -5\\ 2 & -2-\lambda\end{pmatrix} - (1)\det\begin{pmatrix}2 & -3\\ 2 & -2-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)\big((4-\lambda)(-2-\lambda)+10\big) - \big(2(-2-\lambda)+6\big)$$
$$= (1-\lambda)\big(-\lambda^2-2\lambda-8+10\big) - 2\big(1-\lambda\big) = (1-\lambda)\big(-\lambda^2-2\lambda\big) = -\lambda(1-\lambda)(\lambda-2)$$

Nous avons trouvé 3 valeurs propres :
$$\lambda_1 = 0 \quad < \quad \lambda_2 = 1 \quad < \quad \lambda_3 = 2.$$

3. *Calcul des vecteurs propres*

- Calcul des vecteurs propres associés à la valeurs propre λ_1.
  On cherche $\mathbf{x}$ tel que
  $$(\mathbb{A}-\lambda_1\mathbb{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{pmatrix}1-\lambda_1 & 2 & -3\\ 1 & 4-\lambda_1 & -5\\ 0 & 2 & -2-\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$
  En utilisant la méthode de Gauss (le système étant homogène, on n'écrit pas le second membre) on a
  $$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 4 & -5\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Étape 1}]{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3}} \begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Étape 2}]{L_3\leftarrow L_3-L_2} \begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
  On obtient le système linéaire triangulaire supérieure
  $$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
  donc $x_3 = \kappa \in \mathbb{R}$, $x_2 = x_3 = \kappa$ et $x_1 = -2x_2 + 3x_3 = \kappa$ donc
  $$\mathbf{x} = \kappa\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$
  Pour faire simple, on choisira $\kappa = 1$.

- Calcul des vecteurs propres associés à la valeurs propre λ_2.
  On cherche $\mathbf{x}$ tel que
  $$(\mathbb{A}-\lambda_2\mathbb{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{pmatrix}1-\lambda_2 & 2 & -3\\ 1 & 4-\lambda_2 & -5\\ 0 & 2 & -2-\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$
  En utilisant la méthode de Gauss on a
  $$\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -5\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Étape 1}]{L_2\leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 0 & 2 & -3\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Étape 2}]{L_3\leftarrow L_3-L_2} \begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
  On obtient le système linéaire triangulaire supérieure
  $$\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
  donc $x_3 = \kappa \in \mathbb{R}$, $x_2 = \frac{3}{2}x_3 = \frac{3}{2}\kappa$ et $x_1 = -3x_2 + 5x_3 = \frac{1}{2}\kappa$ donc
  $$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\kappa\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}.$$
  Pour faire simple, on choisira $\kappa = 2$.

- Calcul des vecteurs propres associés à la valeurs propre λ_3.

On cherche $\mathbf{x}$ tel que

$$(\mathbb{A}-\lambda_3\mathbb{I})\mathbf{x}=\mathbf{0} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{pmatrix}1-\lambda_3 & 2 & -3\\ 1 & 4-\lambda_3 & -5\\ 0 & 2 & -2-\lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Gauss on a

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 1 & 2 & -5\\ 0 & 2 & -4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Étape 1}]{L_2\leftarrow L_2+L_1} \begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 0 & 4 & -8\\ 0 & 2 & -4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Étape 2}]{L_3\leftarrow L_3-L_2/2} \begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 0 & 4 & -8\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

On obtient le système linéaire triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 0 & 4 & -8\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

donc $x_3=\kappa\in\mathbb{R}$, $x_2=2x_3=2\kappa$ et $x_1=2x_2-3x_3=\kappa$ donc

$$\mathbf{x}=\kappa\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Pour faire simple, on choisira $\kappa=1$.

4. *Diagonalisation*
On peut alors écrire les valeurs propres et les vecteurs propres dans deux matrices

$$\mathbb{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

et vérifier que $\mathbb{A}=\mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1}$, c'est-à-dire que $\mathbb{A}\mathbb{P}=\mathbb{P}\mathbb{D}$:

$$\mathbb{A}\mathbb{P}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 4 & -5\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}\mathbb{D}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$$