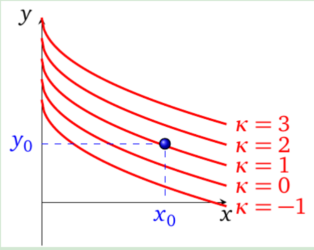
CHAPITRE 1

Contrôle par équipe du 3 mai 2023 : $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Exercice 1 (Lignes de niveau)
En figure on a tracé les lignes de niveau d'une fonction $f(x, y)$. Que peut-on conjecturer sur le signe de $\partial_x f(x_0, y_0)$ et $\partial_y f(x_0, y_0)$?



Correction
La fonction $h(x) = f(x, y_0)$ est décroissante donc $\partial_x f(x_0, y_0) > 0$. La fonction $g(y) = f(x_0, y)$ est décroissante donc $\partial_y f(x_0, y_0) > 0$.

Exercice 2 (Optimisation)
On se donne la fonction

$$Z(L,C) = \sqrt{10^5 + \left(10^{-3}L - \frac{10^{-2}}{C}\right)^2}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $LC = 10^s$. Que vaut s ?

Correction

$$\partial_L Z(L,C) = \frac{2\left(10^{-3}L - \frac{10^{-2}}{C}\right)10^{-3}}{2\sqrt{10^5 + \left(10^{-3}L - \frac{10^{-2}}{C}\right)^2}} = 0 \qquad \text{ssi} \qquad \left(10^{-3}L - \frac{10^{-2}}{C}\right) = 0;$$

$$\partial_C Z(L,C) = \frac{2\left(10^{-3}L - \frac{10^{-2}}{C}\right)\frac{-10^{-2}}{C^2}}{2\sqrt{10^5 + \left(10^{-3}L - \frac{10^{-2}}{C}\right)^2}} = 0 \qquad \text{ssi} \qquad \left(10^{-3}L - \frac{10^{-2}}{C}\right) = 0;$$

donc $LC = \dfrac{10^{-2}}{10^{-3}} = 10^1$.

Exercice 3 (Dérivées partielles et estimations)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ différentiable au point $(21, 36)$ telle que

$$f(21, 36) = 27, \qquad \nabla f(21, 36) = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire $\mathscr{L}(x, y)$ l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(21, 36)$.
2. En déduire une approximation de $f(20.6, 35.8)$ par linéarisation.

Correction
1. Au voisinage de (x_0, y_0) on a

$$f(x,y) \approx \mathscr{L}(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0) + (y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0) = 27 + 5(x-21) + -3(y-36)$$

2. Si on note $h = x - x_0$ et $k = y - y_0$ on peut réécrire l'équation du plan tangent comme

$$\mathscr{L}(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h\partial_x f(x_0, y_0) + k\partial_y f(x_0, y_0).$$

Dans notre cas nous avons

$$f(21 + h, 36 + k) \approx \mathscr{L}(x_0 + h, y_0 + k) = 27 + (5h) + (-3k).$$

Comme $20.6, 35.8) = (21, 36) + (-0.4, -0.2)$ alors $h = -0.4$, $k = -0.2$ et l'on a $f(20.6, 35.8) \approx 27 + (-2) + (0.6) = 25.6$.

Exercice 4 (Dérivées partielles et extrema)

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que le gradient et la matrice Hessienne de f vérifient

$$\nabla f(-5, 5) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad H_f(-5, 5) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors le point $(-5, 5)$ est un minimum, un maximum, un point selle ou la matrice Hessienne ne permet pas de conclure?

Correction

Le point $(-5, 5)$ est un point critique. Comme $\det(H_f(-5, 5)) = 2$ alors c'est un minimum.

Exercice 5 (Optimisation)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^4 - xy - 65y + 5y$. Elle admet un seul point stationnaire, lequel? Quelle est la nature de ce point?

Correction

Notons $a = 4$, $b = 65$ et $c = 5$.

- Recherche des points critiques :

$$\begin{cases} \partial_x f = 0, \\ \partial_y f = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} ax^{a-1} - y - b = 0, \\ -x + c = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} y = ac^{a-1} - b, \\ x = c. \end{cases}$$

Le seul point critique est le point $(x_0, y_0) = (c, ac^{a-1} - b) = (5, 435)$.

- Nature du point :

$$\begin{aligned} \partial_{xx} f(x, y) &= a(a-1)x^{a-2} & \partial_{xx} f(x_0, y_0) &= a(a-1)c^{a-2} = 300 \\ \partial_{xy} f(x, y) &= -1 & \partial_{xy} f(x_0, y_0) &= -1 \\ \partial_{yy} f(x, y) &= 0 & \partial_{yy} f(x_0, y_0) &= 0 \\ \det(H_f)(x, y) &= -1 & \det(H_f)(x_0, y_0) &= -1 \end{aligned}$$

(x_0, y_0) est un point selle.

Exercice 6 (Optimisation)

Soit $b \in \mathbb{R}$. Calculer les points critiques de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x-5)^2 + 6b(x-5)y + y^3$ et étudier leur nature.

Correction

- Recherche des points critiques :

$$\begin{cases} \partial_x f = 0, \\ \partial_y f = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-5) + 6by = 0, \\ 6b(x-5) + 3y^2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (x-5) + 3by = 0, \\ 2b(x-5) + y^2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (x-5) + 3by = 0, \\ -6b^2 y + y^2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (x-5) + 3by = 0, \\ y(y - 6b^2) = 0, \end{cases}$$

On a deux points critiques : le point $(x_0, y_0) = (5, 0)$ et le point $(x_1, y_1) = (5 - 18b^3, 6b^2)$.

- Nature des points critiques :

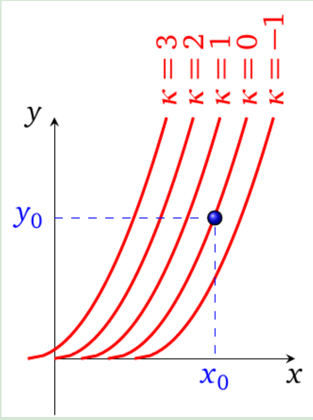
$$
\begin{array}{ccc}
\partial_{xx} f(x,y) = 2 & \partial_{xx} f(x_0,y_0) = 2 & \partial_{xx} f(x_1,y_1) = 2 \\
\partial_{xy} f(x,y) = 6b & \partial_{xy} f(x_0,y_0) = 6b & \partial_{xy} f(x_1,y_1) = 6b \\
\partial_{yy} f(x,y) = 6y & \partial_{yy} f(x_0,y_0) = 0 & \partial_{yy} f(x_1,y_1) = 36b^3 \\
\det(H_f)(x,y) = -36b^2 + 12y & \det(H_f)(x_0,y_0) = -36b^2 & \det(H_f)(x_1,y_1) = 36b^2
\end{array}
$$

(x_0, y_0) est un maximum, (x_1, y_1) est un minimum.

CHAPITRE 2

Contrôle par équipe du 3 mai 2023 : $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Exercice 7 (Lignes de niveau)
En figure on a tracé les lignes de niveau d'une fonction $f(x,y)$. Que peut-on conjecturer sur le signe de $\partial_x f(x_0,y_0)$ et $\partial_y f(x_0,y_0)$?



Correction
La fonction $h(x)=f(x,y_0)$ est croissante donc $\partial_x f(x_0,y_0)>0$. La fonction $g(y)=f(x_0,y)$ est décroissante donc $\partial_y f(x_0,y_0)<0$.

Exercice 8 (Optimisation)
On se donne la fonction

$$Z(L,C)=\sqrt{10^5+\left(10^3L-\frac{10^{-1}}{C}\right)^2}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $LC=10^s$. Que vaut s ?

Correction

$$\partial_L Z(L,C)=\frac{2\left(10^3L-\frac{10^{-1}}{C}\right)10^3}{2\sqrt{10^5+\left(10^3L-\frac{10^{-1}}{C}\right)^2}}=0 \qquad \text{ssi} \qquad \left(10^3L-\frac{10^{-1}}{C}\right)=0;$$

$$\partial_C Z(L,C)=\frac{2\left(10^3L-\frac{10^{-1}}{C}\right)\frac{-10^{-1}}{C^2}}{2\sqrt{10^5+\left(10^3L-\frac{10^{-1}}{C}\right)^2}}=0 \qquad \text{ssi} \qquad \left(10^3L-\frac{10^{-1}}{C}\right)=0;$$

donc $LC=\dfrac{10^{-1}}{10^3}=10^{-4}$.

Exercice 9 (Dérivées partielles et estimations)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ différentiable au point $(39,36)$ telle que

$$f(39,36)=46, \qquad \nabla f(39,36)=\begin{pmatrix}10\\-3\end{pmatrix}.$$

1. Écrire $\mathscr{L}(x,y)$ l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(39,36)$.
2. En déduire une approximation de $f(38.6,35.9)$ par linéarisation.

Correction

1. Au voisinage de (x_0,y_0) on a
$$f(x,y)\approx\mathscr{L}(x,y)=f(x_0,y_0)+(x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0)+(y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0)=46+10(x-39)+-3(y-36)$$
2. Si on note $h=x-x_0$ et $k=y-y_0$ on peut réécrire l'équation du plan tangent comme
$$\mathscr{L}(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+h\partial_x f(x_0,y_0)+k\partial_y f(x_0,y_0).$$
Dans notre cas nous avons
$$f(39+h,36+k)\approx\mathscr{L}(x_0+h,y_0+k)=46+(10h)+(-3k).$$
Comme $38.6,35.9)=(39,36)+(-0.4,-0.1)$ alors $h=-0.4$, $k=-0.1$ et l'on a $f(38.6,35.9)\approx 46+(-4)+(0.3)=42.3$.

Exercice 10 (Dérivées partielles et extrema)

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que le gradient et la matrice Hessienne de f vérifient
$$\nabla f(2,-2)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\qquad\qquad H_f(2,-2)=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}.$$
Alors le point $(2,-2)$ est un minimum, un maximum, un point selle ou la matrice Hessienne ne permet pas de conclure?

Correction

Le point $(2,-2)$ est un point critique. Comme $\det(H_f(2,-2))=-1$ alors c'est un point selle.

Exercice 11 (Optimisation)

Soit la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^4-xy-70y+4y$. Elle admet un seul point stationnaire, lequel? Quelle est la nature de ce point?

Correction

Notons $a=4$, $b=70$ et $c=4$.

- Recherche des points critiques :
$$\begin{cases}\partial_x f=0,\\ \partial_y f=0,\end{cases}\iff\begin{cases}ax^{a-1}-y-b=0,\\ -x+c=0,\end{cases}\iff\begin{cases}y=ac^{a-1}-b,\\ x=c.\end{cases}$$
Le seul point critique est le point $(x_0,y_0)=(c,ac^{a-1}-b)=(4,186)$.
- Nature du point :
$$\begin{aligned}\partial_{xx}f(x,y)&=a(a-1)x^{a-2} & \partial_{xx}f(x_0,y_0)&=a(a-1)c^{a-2}=192\\ \partial_{xy}f(x,y)&=-1 & \partial_{xy}f(x_0,y_0)&=-1\\ \partial_{yy}f(x,y)&=0 & \partial_{yy}f(x_0,y_0)&=0\\ \det(H_f)(x,y)&=-1 & \det(H_f)(x_0,y_0)&=-1\end{aligned}$$
(x_0,y_0) est un point selle.

Exercice 12 (Optimisation)

Soit $b\in\mathbb{R}$. Calculer les points critiques de la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=(x-6)^2+6b(x-6)y+y^3$ et étudier leur nature.

Correction

- Recherche des points critiques :

$$\begin{cases}\partial_x f=0,\\ \partial_y f=0,\end{cases} \iff \begin{cases}2(x-6)+6by=0,\\ 6b(x-6)+3y^2=0,\end{cases} \iff \begin{cases}(x-6)+3by=0,\\ 2b(x-6)+y^2=0,\end{cases} \iff \begin{cases}(x-6)+3by=0,\\ -6b^2y+y^2=0,\end{cases} \iff \begin{cases}(x-6)+3by=0,\\ y(y-6b^2)=0,\end{cases}$$

On a deux points critiques : le point $(x_0,y_0)=(6,0)$ et le point $(x_1,y_1)=(6-18b^3,6b^2)$.

- Nature des points critiques :

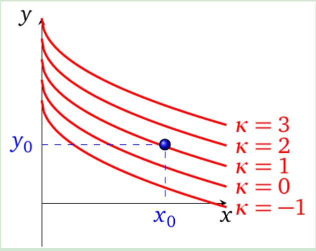
$$\begin{array}{rcr}
\partial_{xx}f(x,y)=2 & \partial_{xx}f(x_0,y_0)=2 & \partial_{xx}f(x_1,y_1)=2\\
\partial_{xy}f(x,y)=6b & \partial_{xy}f(x_0,y_0)=6b & \partial_{xy}f(x_1,y_1)=6b\\
\partial_{yy}f(x,y)=6y & \partial_{yy}f(x_0,y_0)=0 & \partial_{yy}f(x_1,y_1)=36b^3\\
\det(H_f)(x,y)=-36b^2+12y & \det(H_f)(x_0,y_0)=-36b^2 & \det(H_f)(x_1,y_1)=36b^2
\end{array}$$

(x_0,y_0) est un maximum, (x_1,y_1) est un minimum.

CHAPITRE 3

Contrôle par équipe du 3 mai 2023 : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Exercice 13 (Lignes de niveau)
En figure on a tracé les lignes de niveau d'une fonction $f(x, y)$. Que peut-on conjecturer sur le signe de $\partial_x f(x_0, y_0)$ et $\partial_y f(x_0, y_0)$?



Correction
La fonction $h(x) = f(x, y_0)$ est décroissante donc $\partial_x f(x_0, y_0) > 0$. La fonction $g(y) = f(x_0, y)$ est décroissante donc $\partial_y f(x_0, y_0) > 0$.

Exercice 14 (Optimisation)
On se donne la fonction

$$Z(L,C) = \sqrt{10^2 + \left(10^{-3}L - \frac{10^4}{C}\right)^2}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $LC = 10^s$. Que vaut s ?

Correction

$$\partial_L Z(L,C) = \frac{2\left(10^{-3}L - \frac{10^4}{C}\right)10^{-3}}{2\sqrt{10^2 + \left(10^{-3}L - \frac{10^4}{C}\right)^2}} = 0 \qquad \text{ssi} \qquad \left(10^{-3}L - \frac{10^4}{C}\right) = 0;$$

$$\partial_C Z(L,C) = \frac{2\left(10^{-3}L - \frac{10^4}{C}\right)\frac{-10^4}{C^2}}{2\sqrt{10^2 + \left(10^{-3}L - \frac{10^4}{C}\right)^2}} = 0 \qquad \text{ssi} \qquad \left(10^{-3}L - \frac{10^4}{C}\right) = 0;$$

donc $LC = \dfrac{10^4}{10^{-3}} = 10^7$.

Exercice 15 (Dérivées partielles et estimations)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ différentiable au point $(42, 43)$ telle que

$$f(42,43) = 64, \qquad \nabla f(42,43) = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire $\mathscr{L}(x, y)$ l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(42, 43)$.
2. En déduire une approximation de $f(41.8, 42.8)$ par linéarisation.

Correction
1. Au voisinage de (x_0, y_0) on a

$$f(x,y) \approx \mathscr{L}(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0) + (y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0) = 64 + 4(x-42) + -9(y-43)$$

2. Si on note $h = x - x_0$ et $k = y - y_0$ on peut réécrire l'équation du plan tangent comme

$$\mathscr{L}(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h\partial_x f(x_0, y_0) + k\partial_y f(x_0, y_0).$$

   Dans notre cas nous avons

$$f(42 + h, 43 + k) \approx \mathscr{L}(x_0 + h, y_0 + k) = 64 + (4h) + (-9k).$$

   Comme $41.8, 42.8) = (42, 43) + (-0.2, -0.2)$ alors $h = -0.2$, $k = -0.2$ et l'on a $f(41.8, 42.8) \approx 64 + (-0.8) + (1.8) = 65$.

Exercice 16 (Dérivées partielles et extrema)

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que le gradient et la matrice Hessienne de f vérifient

$$\nabla f(2,7) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad H_f(2,7) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors le point $(2,7)$ est un minimum, un maximum, un point selle ou la matrice Hessienne ne permet pas de conclure?

Correction
Le point $(2,7)$ est un point critique. Comme $\det(H_f(2,7)) = -1$ alors c'est un point selle.

Exercice 17 (Optimisation)

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^6 - xy - 21y + 4y$. Elle admet un seul point stationnaire, lequel? Quelle est la nature de ce point?

Correction
Notons $a = 6$, $b = 21$ et $c = 4$.

- Recherche des points critiques :

$$\begin{cases} \partial_x f = 0, \\ \partial_y f = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} ax^{a-1} - y - b = 0, \\ -x + c = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} y = ac^{a-1} - b, \\ x = c. \end{cases}$$

  Le seul point critique est le point $(x_0, y_0) = (c, ac^{a-1} - b) = (4, 6123)$.

- Nature du point :

$$\begin{aligned} \partial_{xx} f(x,y) &= a(a-1)x^{a-2} & \partial_{xx} f(x_0,y_0) &= a(a-1)c^{a-2} = 7680 \\ \partial_{xy} f(x,y) &= -1 & \partial_{xy} f(x_0,y_0) &= -1 \\ \partial_{yy} f(x,y) &= 0 & \partial_{yy} f(x_0,y_0) &= 0 \\ \det(H_f)(x,y) &= -1 & \det(H_f)(x_0,y_0) &= -1 \end{aligned}$$

  (x_0, y_0) est un point selle.

Exercice 18 (Optimisation)

Soit $b \in \mathbb{R}$. Calculer les points critiques de la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x-2)^2 + 6b(x-2)y + y^3$ et étudier leur nature.

Correction
- Recherche des points critiques :

$$\begin{cases} \partial_x f = 0, \\ \partial_y f = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-2) + 6by = 0, \\ 6b(x-2) + 3y^2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (x-2) + 3by = 0, \\ 2b(x-2) + y^2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (x-2) + 3by = 0, \\ -6b^2 y + y^2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (x-2) + 3by = 0, \\ y(y - 6b^2) = 0, \end{cases}$$

  On a deux points critiques : le point $(x_0, y_0) = (2, 0)$ et le point $(x_1, y_1) = (2 - 18b^3, 6b^2)$.

- Nature des points critiques :

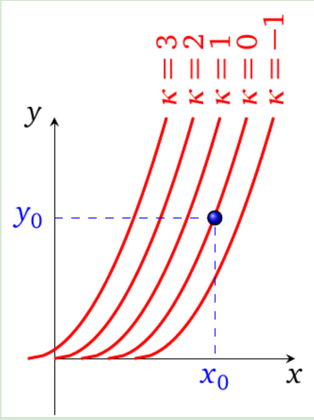
$$
\begin{array}{ccc}
\partial_{xx} f(x,y) = 2 & \partial_{xx} f(x_0,y_0) = 2 & \partial_{xx} f(x_1,y_1) = 2 \\
\partial_{xy} f(x,y) = 6b & \partial_{xy} f(x_0,y_0) = 6b & \partial_{xy} f(x_1,y_1) = 6b \\
\partial_{yy} f(x,y) = 6y & \partial_{yy} f(x_0,y_0) = 0 & \partial_{yy} f(x_1,y_1) = 36b^3 \\
\det(H_f)(x,y) = -36b^2 + 12y & \det(H_f)(x_0,y_0) = -36b^2 & \det(H_f)(x_1,y_1) = 36b^2
\end{array}
$$

(x_0, y_0) est un maximum, (x_1, y_1) est un minimum.

CHAPITRE 4

Contrôle par équipe du 3 mai 2023 : $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Exercice 19 (Lignes de niveau)
En figure on a tracé les lignes de niveau d'une fonction $f(x,y)$. Que peut-on conjecturer sur le signe de $\partial_x f(x_0,y_0)$ et $\partial_y f(x_0,y_0)$?



Correction
La fonction $h(x)=f(x,y_0)$ est croissante donc $\partial_x f(x_0,y_0)>0$. La fonction $g(y)=f(x_0,y)$ est décroissante donc $\partial_y f(x_0,y_0)<0$.

Exercice 20 (Optimisation)
On se donne la fonction

$$Z(L,C)=\sqrt{10^5+\left(10^2L-\frac{10^{-4}}{C}\right)^2}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $LC=10^s$. Que vaut s ?

Correction

$$\partial_L Z(L,C)=\frac{2\left(10^2L-\frac{10^{-4}}{C}\right)10^2}{2\sqrt{10^5+\left(10^2L-\frac{10^{-4}}{C}\right)^2}}=0 \qquad \text{ssi} \qquad \left(10^2L-\frac{10^{-4}}{C}\right)=0;$$

$$\partial_C Z(L,C)=\frac{2\left(10^2L-\frac{10^{-4}}{C}\right)\frac{-10^{-4}}{C^2}}{2\sqrt{10^5+\left(10^2L-\frac{10^{-4}}{C}\right)^2}}=0 \qquad \text{ssi} \qquad \left(10^2L-\frac{10^{-4}}{C}\right)=0;$$

donc $LC=\dfrac{10^{-4}}{10^2}=10^{-6}$.

Exercice 21 (Dérivées partielles et estimations)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ différentiable au point $(22,42)$ telle que

$$f(22,42)=50, \qquad \nabla f(22,42)=\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}.$$

1. Écrire $\mathscr{L}(x,y)$ l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(22,42)$.
2. En déduire une approximation de $f(22.1,41.9)$ par linéarisation.

Correction

1. Au voisinage de (x_0,y_0) on a
$$f(x,y) \approx \mathscr{L}(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0) + (y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0) = 50 + 5(x-22) + -7(y-42)$$
2. Si on note $h = x - x_0$ et $k = y - y_0$ on peut réécrire l'équation du plan tangent comme
$$\mathscr{L}(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + h\partial_x f(x_0,y_0) + k\partial_y f(x_0,y_0).$$
Dans notre cas nous avons
$$f(22+h, 42+k) \approx \mathscr{L}(x_0+h, y_0+k) = 50 + (5h) + (-7k).$$
Comme $22.1, 41.9) = (22,42) + (0.1, -0.1)$ alors $h = 0.1$, $k = -0.1$ et l'on a $f(22.1,41.9) \approx 50 + (0.5) + (0.7) = 51.2$.

Exercice 22 (Dérivées partielles et extrema)

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que le gradient et la matrice Hessienne de f vérifient
$$\nabla f(-3,8) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad H_f(-3,8) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Alors le point $(-3,8)$ est un minimum, un maximum, un point selle ou la matrice Hessienne ne permet pas de conclure ?

Correction

Le point $(-3,8)$ est un point critique. Comme $\det(H_f(-3,8)) = 2$ alors c'est un minimum.

Exercice 23 (Optimisation)

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^5 - xy - 67y + 3y$. Elle admet un seul point stationnaire, lequel ? Quelle est la nature de ce point ?

Correction

Notons $a = 5$, $b = 67$ et $c = 3$.

- Recherche des points critiques :
$$\begin{cases} \partial_x f = 0, \\ \partial_y f = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} ax^{a-1} - y - b = 0, \\ -x + c = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} y = ac^{a-1} - b, \\ x = c. \end{cases}$$
Le seul point critique est le point $(x_0,y_0) = (c, ac^{a-1} - b) = (3, 338)$.
- Nature du point :
$$\begin{aligned} \partial_{xx} f(x,y) &= a(a-1)x^{a-2} & \partial_{xx} f(x_0,y_0) &= a(a-1)c^{a-2} = 540 \\ \partial_{xy} f(x,y) &= -1 & \partial_{xy} f(x_0,y_0) &= -1 \\ \partial_{yy} f(x,y) &= 0 & \partial_{yy} f(x_0,y_0) &= 0 \\ \det(H_f)(x,y) &= -1 & \det(H_f)(x_0,y_0) &= -1 \end{aligned}$$
(x_0,y_0) est un point selle.

Exercice 24 (Optimisation)

Soit $b \in \mathbb{R}$. Calculer les points critiques de la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x-3)^2 + 6b(x-3)y + y^3$ et étudier leur nature.

Correction

- Recherche des points critiques :

$$\begin{cases}\partial_x f = 0,\\ \partial_y f = 0,\end{cases} \iff \begin{cases}2(x-3)+6by = 0,\\ 6b(x-3)+3y^2 = 0,\end{cases} \iff \begin{cases}(x-3)+3by = 0,\\ 2b(x-3)+y^2 = 0,\end{cases} \iff \begin{cases}(x-3)+3by = 0,\\ -6b^2y+y^2 = 0,\end{cases} \iff \begin{cases}(x-3)+3by = 0,\\ y(y-6b^2) = 0,\end{cases}$$

  On a deux points critiques : le point $(x_0, y_0) = (3,0)$ et le point $(x_1, y_1) = (3-18b^3, 6b^2)$.

- Nature des points critiques :

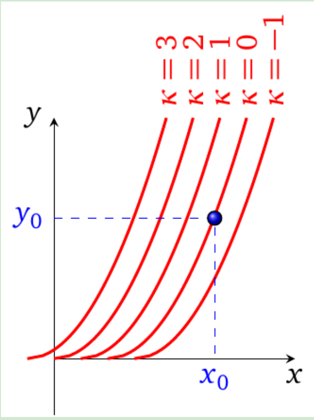
$$\begin{aligned}
\partial_{xx} f(x,y) &= 2 & \partial_{xx} f(x_0,y_0) &= 2 & \partial_{xx} f(x_1,y_1) &= 2\\
\partial_{xy} f(x,y) &= 6b & \partial_{xy} f(x_0,y_0) &= 6b & \partial_{xy} f(x_1,y_1) &= 6b\\
\partial_{yy} f(x,y) &= 6y & \partial_{yy} f(x_0,y_0) &= 0 & \partial_{yy} f(x_1,y_1) &= 36b^3\\
\det(H_f)(x,y) &= -36b^2+12y & \det(H_f)(x_0,y_0) &= -36b^2 & \det(H_f)(x_1,y_1) &= 36b^2
\end{aligned}$$

  (x_0, y_0) est un maximum, (x_1, y_1) est un minimum.

CHAPITRE 5

Contrôle par équipe du 3 mai 2023 : $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Exercice 25 (Lignes de niveau)
En figure on a tracé les lignes de niveau d'une fonction $f(x,y)$. Que peut-on conjecturer sur le signe de $\partial_x f(x_0,y_0)$ et $\partial_y f(x_0,y_0)$?



Correction
La fonction $h(x) = f(x, y_0)$ est croissante donc $\partial_x f(x_0,y_0) > 0$. La fonction $g(y) = f(x_0, y)$ est décroissante donc $\partial_y f(x_0,y_0) < 0$.

Exercice 26 (Optimisation)
On se donne la fonction

$$Z(L,C) = \sqrt{10^6 + \left(10^2 L - \frac{10^{-4}}{C}\right)^2}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $LC = 10^s$. Que vaut s ?

Correction

$$\partial_L Z(L,C) = \frac{2\left(10^2 L - \frac{10^{-4}}{C}\right)10^2}{2\sqrt{10^6 + \left(10^2 L - \frac{10^{-4}}{C}\right)^2}} = 0 \qquad \text{ssi} \qquad \left(10^2 L - \frac{10^{-4}}{C}\right) = 0;$$

$$\partial_C Z(L,C) = \frac{2\left(10^2 L - \frac{10^{-4}}{C}\right)\frac{-10^{-4}}{C^2}}{2\sqrt{10^6 + \left(10^2 L - \frac{10^{-4}}{C}\right)^2}} = 0 \qquad \text{ssi} \qquad \left(10^2 L - \frac{10^{-4}}{C}\right) = 0;$$

donc $LC = \frac{10^{-4}}{10^2} = 10^{-6}$.

Exercice 27 (Dérivées partielles et estimations)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ différentiable au point $(49,47)$ telle que

$$f(49,47) = 61, \qquad \nabla f(49,47) = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire $\mathscr{L}(x,y)$ l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(49,47)$.
2. En déduire une approximation de $f(49.2,47.1)$ par linéarisation.

Correction

1. Au voisinage de (x_0,y_0) on a

$$f(x,y) \approx \mathscr{L}(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0) + (y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0) = 61 + 7(x-49) + -6(y-47)$$

2. Si on note $h = x - x_0$ et $k = y - y_0$ on peut réécrire l'équation du plan tangent comme

$$\mathscr{L}(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + h\partial_x f(x_0,y_0) + k\partial_y f(x_0,y_0).$$

Dans notre cas nous avons

$$f(49+h,47+k) \approx \mathscr{L}(x_0+h,y_0+k) = 61 + (7h) + (-6k).$$

Comme $49.2,47.1) = (49,47) + (0.2,0.1)$ alors $h = 0.2$, $k = 0.1$ et l'on a $f(49.2,47.1) \approx 61 + (1.4) + (-0.6) = 61.8$.

Exercice 28 (Dérivées partielles et extrema)

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que le gradient et la matrice Hessienne de f vérifient

$$\nabla f(-8,-6) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad H_f(-8,-6) = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Alors le point $(-8,-6)$ est un minimum, un maximum, un point selle ou la matrice Hessienne ne permet pas de conclure ?

Correction

Le point $(-8,-6)$ est un point critique. Comme $\det(H_f(-8,-6)) = -2$ alors c'est un point selle.

Exercice 29 (Optimisation)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 - xy - 34y + 4y$. Elle admet un seul point stationnaire, lequel ? Quelle est la nature de ce point ?

Correction

Notons $a = 4$, $b = 34$ et $c = 4$.

- Recherche des points critiques :

$$\begin{cases} \partial_x f = 0, \\ \partial_y f = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} ax^{a-1} - y - b = 0, \\ -x + c = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} y = ac^{a-1} - b, \\ x = c. \end{cases}$$

  Le seul point critique est le point $(x_0,y_0) = (c, ac^{a-1} - b) = (4,222)$.

- Nature du point :

$$\begin{aligned} \partial_{xx} f(x,y) &= a(a-1)x^{a-2} & \qquad \partial_{xx} f(x_0,y_0) &= a(a-1)c^{a-2} = 192 \\ \partial_{xy} f(x,y) &= -1 & \partial_{xy} f(x_0,y_0) &= -1 \\ \partial_{yy} f(x,y) &= 0 & \partial_{yy} f(x_0,y_0) &= 0 \\ \det(H_f)(x,y) &= -1 & \det(H_f)(x_0,y_0) &= -1 \end{aligned}$$

  (x_0,y_0) est un point selle.

Exercice 30 (Optimisation)

Soit $b \in \mathbb{R}$. Calculer les points critiques de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x-2)^2 + 6b(x-2)y + y^3$ et étudier leur nature.

Correction

- Recherche des points critiques :

$$\begin{cases} \partial_x f = 0, \\ \partial_y f = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-2)+6by = 0, \\ 6b(x-2)+3y^2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (x-2)+3by = 0, \\ 2b(x-2)+y^2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (x-2)+3by = 0, \\ -6b^2y+y^2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (x-2)+3by = 0, \\ y(y-6b^2) = 0, \end{cases}$$

  On a deux points critiques : le point $(x_0, y_0) = (2, 0)$ et le point $(x_1, y_1) = (2-18b^3, 6b^2)$.

- Nature des points critiques :

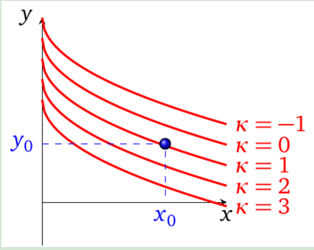
$$\begin{aligned} \partial_{xx} f(x,y) &= 2 & \partial_{xx} f(x_0,y_0) &= 2 & \partial_{xx} f(x_1,y_1) &= 2 \\ \partial_{xy} f(x,y) &= 6b & \partial_{xy} f(x_0,y_0) &= 6b & \partial_{xy} f(x_1,y_1) &= 6b \\ \partial_{yy} f(x,y) &= 6y & \partial_{yy} f(x_0,y_0) &= 0 & \partial_{yy} f(x_1,y_1) &= 36b^3 \\ \det(H_f)(x,y) &= -36b^2+12y & \det(H_f)(x_0,y_0) &= -36b^2 & \det(H_f)(x_1,y_1) &= 36b^2 \end{aligned}$$

  (x_0, y_0) est un maximum, (x_1, y_1) est un minimum.

CHAPITRE 6

Contrôle par équipe du 3 mai 2023 : $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Exercice 31 (Lignes de niveau)
En figure on a tracé les lignes de niveau d'une fonction $f(x,y)$. Que peut-on conjecturer sur le signe de $\partial_x f(x_0,y_0)$ et $\partial_y f(x_0,y_0)$?



Correction
La fonction $h(x) = f(x,y_0)$ est décroissante donc $\partial_x f(x_0,y_0) < 0$. La fonction $g(y) = f(x_0,y)$ est décroissante donc $\partial_y f(x_0,y_0) < 0$.

Exercice 32 (Optimisation)
On se donne la fonction

$$Z(L,C) = \sqrt{10^6 + \left(10^4 L - \frac{10^3}{C}\right)^2}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $LC = 10^s$. Que vaut s ?

Correction

$$\partial_L Z(L,C) = \frac{2\left(10^4 L - \frac{10^3}{C}\right)10^4}{2\sqrt{10^6 + \left(10^4 L - \frac{10^3}{C}\right)^2}} = 0 \qquad \text{ssi} \qquad \left(10^4 L - \frac{10^3}{C}\right) = 0;$$

$$\partial_C Z(L,C) = \frac{2\left(10^4 L - \frac{10^3}{C}\right)\frac{-10^3}{C^2}}{2\sqrt{10^6 + \left(10^4 L - \frac{10^3}{C}\right)^2}} = 0 \qquad \text{ssi} \qquad \left(10^4 L - \frac{10^3}{C}\right) = 0;$$

donc $LC = \dfrac{10^3}{10^4} = 10^{-1}$.

Exercice 33 (Dérivées partielles et estimations)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ différentiable au point $(28,39)$ telle que

$$f(28,39) = 37, \qquad \nabla f(28,39) = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire $\mathscr{L}(x,y)$ l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(28,39)$.
2. En déduire une approximation de $f(28.4,38.6)$ par linéarisation.

Correction

1. Au voisinage de (x_0,y_0) on a

$$f(x,y) \approx \mathscr{L}(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0) + (y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0) = 37 + 9(x-28) + -6(y-39)$$

2. Si on note $h = x - x_0$ et $k = y - y_0$ on peut réécrire l'équation du plan tangent comme

$$\mathscr{L}(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + h\partial_x f(x_0,y_0) + k\partial_y f(x_0,y_0).$$

Dans notre cas nous avons

$$f(28+h, 39+k) \approx \mathscr{L}(x_0+h, y_0+k) = 37 + (9h) + (-6k).$$

Comme $28.4, 38.6) = (28,39) + (0.4, -0.4)$ alors $h = 0.4$, $k = -0.4$ et l'on a $f(28.4, 38.6) \approx 37 + (3.6) + (2.4) = 43$.

Exercice 34 (Dérivées partielles et extrema)
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que le gradient et la matrice Hessienne de f vérifient

$$\nabla f(-9,8) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad H_f(-9,8) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors le point $(-9,8)$ est un minimum, un maximum, un point selle ou la matrice Hessienne ne permet pas de conclure?

Correction
Le point $(-9,8)$ est un point critique. Comme $\det(H_f(-9,8)) = -1$ alors c'est un point selle.

Exercice 35 (Optimisation)
Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 - xy - 53y + 3y$. Elle admet un seul point stationnaire, lequel? Quelle est la nature de ce point?

Correction
Notons $a = 4$, $b = 53$ et $c = 3$.

- Recherche des points critiques :

$$\begin{cases} \partial_x f = 0, \\ \partial_y f = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} ax^{a-1} - y - b = 0, \\ -x + c = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} y = ac^{a-1} - b, \\ x = c. \end{cases}$$

  Le seul point critique est le point $(x_0, y_0) = (c, ac^{a-1} - b) = (3, 55)$.

- Nature du point :

$$\begin{aligned} \partial_{xx} f(x,y) &= a(a-1)x^{a-2} & \qquad \partial_{xx} f(x_0,y_0) &= a(a-1)c^{a-2} = 108 \\ \partial_{xy} f(x,y) &= -1 & \partial_{xy} f(x_0,y_0) &= -1 \\ \partial_{yy} f(x,y) &= 0 & \partial_{yy} f(x_0,y_0) &= 0 \\ \det(H_f)(x,y) &= -1 & \det(H_f)(x_0,y_0) &= -1 \end{aligned}$$

  (x_0, y_0) est un point selle.

Exercice 36 (Optimisation)
Soit $b \in \mathbb{R}$. Calculer les points critiques de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x-5)^2 + 6b(x-5)y + y^3$ et étudier leur nature.

Correction

- Recherche des points critiques :

$$\begin{cases} \partial_x f = 0, \\ \partial_y f = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-5) + 6by = 0, \\ 6b(x-5) + 3y^2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (x-5) + 3by = 0, \\ 2b(x-5) + y^2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (x-5) + 3by = 0, \\ -6b^2y + y^2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (x-5) + 3by = 0, \\ y(y - 6b^2) = 0, \end{cases}$$

  On a deux points critiques : le point $(x_0, y_0) = (5,0)$ et le point $(x_1, y_1) = (5 - 18b^3, 6b^2)$.

- Nature des points critiques :

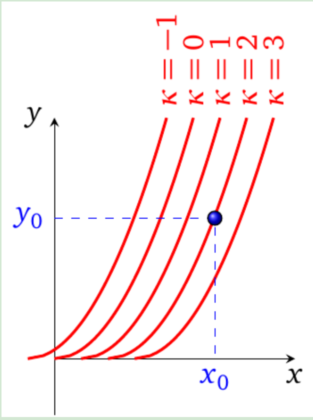
$$
\begin{array}{ccc}
\partial_{xx} f(x,y) = 2 & \partial_{xx} f(x_0,y_0) = 2 & \partial_{xx} f(x_1,y_1) = 2 \\
\partial_{xy} f(x,y) = 6b & \partial_{xy} f(x_0,y_0) = 6b & \partial_{xy} f(x_1,y_1) = 6b \\
\partial_{yy} f(x,y) = 6y & \partial_{yy} f(x_0,y_0) = 0 & \partial_{yy} f(x_1,y_1) = 36b^3 \\
\det(H_f)(x,y) = -36b^2 + 12y & \det(H_f)(x_0,y_0) = -36b^2 & \det(H_f)(x_1,y_1) = 36b^2
\end{array}
$$

(x_0, y_0) est un maximum, (x_1, y_1) est un minimum.

CHAPITRE 7

Contrôle par équipe du 3 mai 2023 : $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Exercice 37 (Lignes de niveau)
En figure on a tracé les lignes de niveau d'une fonction $f(x,y)$. Que peut-on conjecturer sur le signe de $\partial_x f(x_0,y_0)$ et $\partial_y f(x_0,y_0)$?



Correction
La fonction $h(x) = f(x,y_0)$ est décroissante donc $\partial_x f(x_0,y_0) < 0$. La fonction $g(y) = f(x_0,y)$ est croissante donc $\partial_y f(x_0,y_0) > 0$.

Exercice 38 (Optimisation)
On se donne la fonction
$$Z(L,C) = \sqrt{10^6 + \left(10^{-1}L - \frac{10^{-3}}{C}\right)^2}.$$
Un extremum de cette fonction est atteint pour $LC = 10^s$. Que vaut s ?

Correction

$$\partial_L Z(L,C) = \frac{2\left(10^{-1}L - \frac{10^{-3}}{C}\right)10^{-1}}{2\sqrt{10^6 + \left(10^{-1}L - \frac{10^{-3}}{C}\right)^2}} = 0 \qquad \text{ssi} \qquad \left(10^{-1}L - \frac{10^{-3}}{C}\right) = 0;$$
$$\partial_C Z(L,C) = \frac{2\left(10^{-1}L - \frac{10^{-3}}{C}\right)\frac{-10^{-3}}{C^2}}{2\sqrt{10^6 + \left(10^{-1}L - \frac{10^{-3}}{C}\right)^2}} = 0 \qquad \text{ssi} \qquad \left(10^{-1}L - \frac{10^{-3}}{C}\right) = 0;$$

donc $LC = \dfrac{10^{-3}}{10^{-1}} = 10^{-2}$.

Exercice 39 (Dérivées partielles et estimations)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ différentiable au point $(38,38)$ telle que
$$f(38,38) = 62, \qquad \nabla f(38,38) = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire $\mathscr{L}(x,y)$ l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(38,38)$.
2. En déduire une approximation de $f(37.9,37.8)$ par linéarisation.

Correction

1. Au voisinage de (x_0,y_0) on a
$$f(x,y)\approx\mathscr{L}(x,y)=f(x_0,y_0)+(x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0)+(y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0)=62+4(x-38)+-5(y-38)$$
2. Si on note $h=x-x_0$ et $k=y-y_0$ on peut réécrire l'équation du plan tangent comme
$$\mathscr{L}(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+h\partial_x f(x_0,y_0)+k\partial_y f(x_0,y_0).$$
Dans notre cas nous avons
$$f(38+h,38+k)\approx\mathscr{L}(x_0+h,y_0+k)=62+(4h)+(-5k).$$
Comme $37.9,37.8)=(38,38)+(-0.1,-0.2)$ alors $h=-0.1$, $k=-0.2$ et l'on a $f(37.9,37.8)\approx 62+(-0.4)+(1)=62.6$.

Exercice 40 (Dérivées partielles et extrema)

Soit $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que le gradient et la matrice Hessienne de f vérifient
$$\nabla f(8,-8)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\qquad H_f(8,-8)=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&2\end{pmatrix}.$$
Alors le point $(8,-8)$ est un minimum, un maximum, un point selle ou la matrice Hessienne ne permet pas de conclure?

Correction

Le point $(8,-8)$ est un point critique. Comme $\det(H_f(8,-8))=-1$ alors c'est un point selle.

Exercice 41 (Optimisation)

Soit la fonction $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^4-xy-40y+4y$. Elle admet un seul point stationnaire, lequel? Quelle est la nature de ce point?

Correction

Notons $a=4$, $b=40$ et $c=4$.

- Recherche des points critiques :
$$\begin{cases}\partial_x f=0,\\\partial_y f=0,\end{cases}\iff\begin{cases}ax^{a-1}-y-b=0,\\-x+c=0,\end{cases}\iff\begin{cases}y=ac^{a-1}-b,\\x=c.\end{cases}$$
Le seul point critique est le point $(x_0,y_0)=(c,ac^{a-1}-b)=(4,216)$.
- Nature du point :
$$\begin{aligned}\partial_{xx}f(x,y)&=a(a-1)x^{a-2} & \partial_{xx}f(x_0,y_0)&=a(a-1)c^{a-2}=192\\\partial_{xy}f(x,y)&=-1 & \partial_{xy}f(x_0,y_0)&=-1\\\partial_{yy}f(x,y)&=0 & \partial_{yy}f(x_0,y_0)&=0\\\det(H_f)(x,y)&=-1 & \det(H_f)(x_0,y_0)&=-1\end{aligned}$$
(x_0,y_0) est un point selle.

Exercice 42 (Optimisation)

Soit $b\in\mathbb{R}$. Calculer les points critiques de la fonction $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=(x-6)^2+6b(x-6)y+y^3$ et étudier leur nature.

Correction

- Recherche des points critiques :

$$\begin{cases}\partial_x f=0,\\ \partial_y f=0,\end{cases}\iff\begin{cases}2(x-6)+6by=0,\\ 6b(x-6)+3y^2=0,\end{cases}\iff\begin{cases}(x-6)+3by=0,\\ 2b(x-6)+y^2=0,\end{cases}\iff\begin{cases}(x-6)+3by=0,\\ -6b^2y+y^2=0,\end{cases}\iff\begin{cases}(x-6)+3by=0,\\ y(y-6b^2)=0,\end{cases}$$

  On a deux points critiques : le point $(x_0,y_0)=(6,0)$ et le point $(x_1,y_1)=(6-18b^3,6b^2)$.

- Nature des points critiques :

$$\begin{array}{ccc}
\partial_{xx}f(x,y)=2 & \partial_{xx}f(x_0,y_0)=2 & \partial_{xx}f(x_1,y_1)=2\\
\partial_{xy}f(x,y)=6b & \partial_{xy}f(x_0,y_0)=6b & \partial_{xy}f(x_1,y_1)=6b\\
\partial_{yy}f(x,y)=6y & \partial_{yy}f(x_0,y_0)=0 & \partial_{yy}f(x_1,y_1)=36b^3\\
\det(H_f)(x,y)=-36b^2+12y & \det(H_f)(x_0,y_0)=-36b^2 & \det(H_f)(x_1,y_1)=36b^2
\end{array}$$

  (x_0,y_0) est un maximum, (x_1,y_1) est un minimum.