

Antennes

Compléments de cours

S. Pioch

1 Équations d'Helmholtz vectorielles

En régime harmonique, avec une dépendance temporelle $e^{+i\omega t}$, et dans un milieu LHI (Linéaire, Homogène et Isotrope), les équations de Maxwell sont :

$$\text{M.F.} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\mathcal{E}} = -i\omega\mu\vec{\mathcal{H}} \quad (1)$$

$$\text{M.A.} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{J}} + i\omega\varepsilon\vec{\mathcal{E}} \quad (2)$$

$$\text{M.G.} \quad \text{div} \vec{\mathcal{E}} = \underline{\rho}/\varepsilon \quad (3)$$

$$\text{M.T.} \quad \text{div} \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (4)$$

Ces quatre équations s'accompagnent également de l'équation de continuité de la charge :

$$\text{div} \vec{\mathcal{J}} + i\omega\rho = 0 \quad (5)$$

En prenant le rotationnel de la relation M.F., il vient :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{\mathcal{E}}) = -i\omega\mu \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\mathcal{H}}$$

Substituant l'identité remarquable $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} - \Delta$ et M.A. dans l'expression précédente, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{\mathcal{E}}) - \Delta \vec{\mathcal{E}} = -i\omega\mu (\vec{\mathcal{J}} + i\omega\varepsilon\vec{\mathcal{E}})$$

Cette dernière devient, en exploitant M.G. et en reconnaissant l'expression du nombre d'onde $k = \omega/c \mid c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$:

$$\Delta \vec{\mathcal{E}} + k^2 \vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{\varepsilon} \overrightarrow{\text{grad}} \underline{\rho} + i\omega\mu \vec{\mathcal{J}} \quad (6)$$

Enfin, l'application du gradient sur (5) injecté dans (6) et la factorisation par le terme $i/\omega\varepsilon$ donnent l'équation d'Helmholtz du vecteur-phaseur champ électrique :

$$\Delta \vec{\mathcal{E}} + k^2 \vec{\mathcal{E}} = \frac{i}{\omega\varepsilon} \left(\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{\mathcal{J}}) + k^2 \vec{\mathcal{J}} \right) \quad (7)$$

Un raisonnement similaire peut s'appliquer au vecteur-phaseur champ magnétique. Pour cela, il suffit d'effectuer les étapes suivantes :

- a) prendre le rotationnel de M.A. ;
- b) utiliser l'identité remarquable $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} - \overrightarrow{\Delta}$;
- c) exploiter la relation de M.T. et de M.F.

Par conséquent, les équations de Helmholtz pour les vecteurs-phaseurs champ électrique et champ magnétique sont, sous une forme compacte :

$$(\overrightarrow{\Delta} + k^2) \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ \overrightarrow{\mathcal{H}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{i}{\omega \varepsilon} (\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}) + k^2) \\ -\overrightarrow{\text{rot}} \end{Bmatrix} \overrightarrow{\mathcal{J}} \quad (8)$$

2 Solutions des équations d'Helmholtz vectorielles

Ces équations peuvent à nouveau se réduire de la façon suivante :

$$(\Delta + k^2) \overrightarrow{\mathcal{U}} = -\overrightarrow{\mathcal{J}} \quad (9)$$

avec $\overrightarrow{\mathcal{U}}$ le vecteur-phaseur champ électrique ou champ magnétique, et $\overrightarrow{\mathcal{J}}$ le terme source correspondant respectivement à chacun d'eux. L'unique solution (particulière) de l'équation (9) est :

$$\overrightarrow{\mathcal{U}} = \mathcal{G} * \overrightarrow{\mathcal{J}} = \overrightarrow{\mathcal{J}} * \mathcal{G} \quad (10)$$

où le symbole $*$ désigne le produit de convolution. \mathcal{G} est la fonction de Green solution de la relation :

$$(\Delta + k^2) \mathcal{G} = -\delta \quad (11)$$

avec δ la distribution de Dirac, et telle que dans l'espace \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{G}(\vec{r}) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \quad (12)$$

Par ailleurs, cette fonction de Green vérifie la condition de rayonnement de Sommerfeld ou condition d'onde sortante :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r (\mathcal{G}_{,r} + ik\mathcal{G}) = 0 \quad (13)$$

ou sous une forme équivalente :

$$\mathcal{G}_{,r} + ik\mathcal{G} = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad r \rightarrow +\infty \quad (14)$$

Donc, les expressions des vecteurs-phaseurs champ électrique et champ magnétique, solution des équations d'Helmholtz, sont :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) &= -\frac{i}{\omega\varepsilon} \left(\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{\mathcal{J}}) + k^2 \vec{\mathcal{J}} \right) * \mathcal{G} \\ \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) &= \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{\mathcal{J}} \right) * \mathcal{G} \end{aligned} \quad (15)$$

3 Expressions des vecteurs-phaseurs champ électrique et champ magnétique

3.1 Vecteur-phaseur champ magnétique

L'expression de $\vec{\mathcal{H}}$ dans (15) fait intervenir la dérivation (opérateur $\overrightarrow{\text{rot}}$) et l'intégration (produit de convolution). Cette expression reste inchangée en permutant les deux opérations, auquel cas $\vec{\mathcal{H}}$ devient :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) &= \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{\mathcal{J}} \right) * \mathcal{G} = \overrightarrow{\text{rot}} \left(\vec{\mathcal{J}} * \mathcal{G} \right) \\ &= \overrightarrow{\text{rot}} \left(\int_{\mathcal{V}} \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \mathcal{G}(R) dv' \right) \mid R = \|\vec{r} - \vec{r}'\| \quad (16) \\ \implies \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) &= \int_{\mathcal{V}} \overrightarrow{\text{rot}} \left(\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \mathcal{G}(R) \right) dv' \end{aligned}$$

Se rappelant de l'identité remarquable $\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{u}) = f\overrightarrow{\text{rot}}\vec{u} + \overrightarrow{\text{grad}}f \wedge \vec{u}$ avec $f = \mathcal{G}(R)$ et $\vec{u} = \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}')$, il vient ici :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \left(\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \mathcal{G}(R) \right) &= \mathcal{G}(R) \underbrace{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}')}_{=0 \text{ car dérive par rapport à } \vec{r}} + \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{G}(R) \wedge \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \\ &= \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{G}(R) \wedge \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \end{aligned} \quad (17)$$

Or, le gradient de la fonction de Green (cf. §4) est :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{G}(R) = \mathcal{G}_{,R} \frac{\vec{R}}{R} = - \left(ik + \frac{1}{R} \right) \mathcal{G} \frac{\vec{R}}{R} \quad (18)$$

En remplaçant (18) dans (17), tout en permutant l'ordre du produit vectoriel entre $\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{G}$ et $\vec{\mathcal{J}}$, il vient :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \mathcal{G}(R) \right) = \left(ik + \frac{1}{R} \right) \mathcal{G} \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \wedge \frac{\vec{R}}{R} \quad (19)$$

Cette dernière relation substituée dans (16), après avoir factorisé par ik , donne l'expression du vecteur-phaseur champ magnétique $\vec{\mathcal{H}}$:

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) = ik \int_{\mathcal{V}} \left(1 + \frac{1}{ikR} \right) \mathcal{G}(R) \left(\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \wedge \frac{\vec{R}}{R} \right) dv' \quad (20)$$

3.2 Vecteur-phaseur champ électrique

D'après (15) et en permutant les opérateurs comme dans le cas précédent, le vecteur-phaseur champ électrique $\vec{\mathcal{E}}$ admet alors l'expression :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) &= -\frac{i}{\omega\varepsilon} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{div} \vec{\mathcal{J}} \right) * \mathcal{G} + k^2 \vec{\mathcal{J}} * \mathcal{G} \right) \\ &= -\frac{i}{\omega\varepsilon} \int_{\mathcal{V}} \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \left(\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \mathcal{G}(R) \right) + k^2 \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \mathcal{G}(R) dv' \end{aligned} \quad (21)$$

À la lecture de cette relation, on comprend bien que la difficulté réside dans la simplification de la quantité :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \left(\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \mathcal{G}(R) \right) \quad (22)$$

Pour cela, nous procédons en deux étapes :

a) Nous calculons la divergence :

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \mathcal{G}(R) \right) &= \mathcal{G}(R) \underbrace{\text{div} \left(\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \right)}_{=0 \text{ car dérive par rapport à } \vec{r}} + \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{G}(R) \cdot \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \\ &= \mathcal{G}_{,R} \frac{\vec{R}}{R} \cdot \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \quad \text{d'après (18)} \end{aligned} \quad (23)$$

b) Nous prenons le gradient du résultat de (23) :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \operatorname{div} \left(\overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \mathcal{G}(R) \right) = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\mathcal{G}_{,R} \frac{\overrightarrow{R}}{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \right) \quad (24)$$

Celle-ci de la forme :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = g \overrightarrow{\text{grad}} f + f \overrightarrow{\text{grad}} g \quad | \quad f = \mathcal{G}_{,R} \quad \text{et} \quad g = \frac{\overrightarrow{R}}{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}')$$

donne :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} \operatorname{div} \left(\overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \mathcal{G}(R) \right) &= \frac{\overrightarrow{R}}{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{G}_{,R}}_{=\mathcal{G}_{,RR} \overrightarrow{R}/R} + \mathcal{G}_{,R} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\overrightarrow{R}}{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \right) \\ &= \mathcal{G}_{,RR} \left(\frac{\overrightarrow{R}}{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \right) \frac{\overrightarrow{R}}{R} + \mathcal{G}_{,R} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\overrightarrow{R}}{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \right) \end{aligned} \quad (25)$$

À présent, nous cherchons à calculer le gradient à droite de la somme de (25) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\overrightarrow{R}}{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \right) &= \frac{1}{R} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \right) + \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{R}}_{=-R^{-2} \overrightarrow{R}/R} \\ &= \frac{1}{R} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \right) - \frac{1}{R} \left(\frac{\overrightarrow{R}}{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \right) \frac{\overrightarrow{R}}{R} \end{aligned} \quad (26)$$

où nous identifions un résultat de l'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \overline{\nabla} \vec{v} \cdot \vec{u} + \overline{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} + \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} \quad (27)$$

avec $\vec{u} = \overrightarrow{R}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}')$ qui donne :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \right) = \overline{\nabla} \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \cdot \overrightarrow{R} + \overline{\nabla} \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') + \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{R} \quad (28)$$

Comme on dérive par rapport à \vec{r} , alors :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{R} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') = \vec{0}, \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\nabla}} \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') = \vec{0} \quad (29)$$

et :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\nabla}} \vec{R} &= \overline{\overline{\nabla}} (\vec{r} - \vec{r}') \\ &= \begin{pmatrix} (x-x')_{,x} & (x-x')_{,y} & (x-x')_{,z} \\ (y-y')_{,x} & (y-y')_{,y} & (y-y')_{,z} \\ (z-z')_{,x} & (z-z')_{,y} & (z-z')_{,z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{I}_3 \quad \text{matrice identité d'ordre 3} \end{aligned} \quad (30)$$

Injectant les résultats (29) et (30) dans (28), il vient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} (\vec{R} \cdot \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}')) = \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \quad (31)$$

Substituant (31) dans (26), on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\vec{R}}{R} \cdot \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \right) = \frac{1}{R} \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') - \frac{1}{R} \left(\frac{\vec{R}}{R} \cdot \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \right) \frac{\vec{R}}{R} \quad (32)$$

Et, cette dernière remplacée dans (25) donne :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} (\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \mathcal{G}(R)) &= \mathcal{G}_{,RR} \left(\frac{\vec{R}}{R} \cdot \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \right) \frac{\vec{R}}{R} \\ &\quad + \mathcal{G}_{,R} \left[\frac{1}{R} \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') - \frac{1}{R} \left(\frac{\vec{R}}{R} \cdot \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \right) \frac{\vec{R}}{R} \right] \\ &= \left(\mathcal{G}_{,RR} - \mathcal{G}_{,R} \frac{1}{R} \right) \left(\frac{\vec{R}}{R} \cdot \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \right) \frac{\vec{R}}{R} + \mathcal{G}_{,R} \frac{1}{R} \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \quad (33) \end{aligned}$$

Avant de poursuivre, calculons $\mathcal{G}_{,RR}$ en s'appuyant sur (18) :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{,RR} &= (\mathcal{G}_{,R})_{,R} = \left(- \left[ik + \frac{1}{R} \right] \mathcal{G} \right)_{,R} \\ &= - \left(-\frac{1}{R^2} \mathcal{G} - \left[ik + \frac{1}{R} \right] \left[ik + \frac{1}{R} \right] \mathcal{G} \right) \\ &= \left(\frac{2}{R^2} + \frac{i2k}{R} - k^2 \right) \mathcal{G}\end{aligned}\quad (34)$$

laquelle permet de simplifier la quantité $\mathcal{G}_{,RR} - \mathcal{G}_{,R} \frac{1}{R}$ présente dans (33) :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{,RR} - \mathcal{G}_{,R} \frac{1}{R} &= \left(\frac{2}{R^2} + \frac{i2k}{R} - k^2 \right) \mathcal{G} + \left(ik + \frac{1}{R} \right) \mathcal{G} \frac{1}{R} \\ &= \left(\frac{3}{R^2} + \frac{i3k}{R} - k^2 \right) \mathcal{G}\end{aligned}\quad (35)$$

Ainsi, remplaçant (35) et $\mathcal{G}_{,R}$ dans (33), on obtient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \left(\overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \mathcal{G}(R) \right) = \left(\frac{3}{R^2} + \frac{i3k}{R} - k^2 \right) \mathcal{G}(R) \left(\frac{\overrightarrow{R}}{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \right) \frac{\overrightarrow{R}}{R} - \left(ik + \frac{1}{R} \right) \frac{\mathcal{G}(R)}{R} \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \quad (36)$$

qui après factorisation par $k^2 \mathcal{G}(R)$ devient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \left(\overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \mathcal{G}(R) \right) &= k^2 \left[\left(-1 + \frac{i3}{kR} + \frac{3}{(kR)^2} \right) \left(\frac{\overrightarrow{R}}{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \right) \frac{\overrightarrow{R}}{R} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{i}{kR} + \frac{1}{(kR)^2} \right) \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \right] \mathcal{G}(R)\end{aligned}\quad (37)$$

Finalement, ajoutant $k^2 \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}')$ à (37), l'expression du vecteur-phaseur champ électrique est :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathcal{E}} &= \frac{ik^2}{\omega\epsilon} \int_{\mathcal{V}} \left[\left(1 + \frac{3}{ikR} - \frac{3}{(kR)^2} \right) \left(\frac{\overrightarrow{R}}{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \right) \frac{\overrightarrow{R}}{R} \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \frac{1}{ikR} - \frac{1}{(kR)^2} \right) \overrightarrow{\mathcal{J}}(\vec{r}') \right] \mathcal{G}(R) dv'\end{aligned}\quad (38)$$

3.3 Formule des antennes

À une très grande distance des sources, c'est-à-dire $kR \gg 1$ ou $\lambda \ll R$, la distance $\|\vec{R}\| = R$ se simplifie :

$$\|\vec{R}\| = R = \|\vec{r} - \vec{r}'\| \approx r \quad (39)$$

et entraîne :

$$\vec{R} = r \hat{e}_r \quad \text{et} \quad \frac{\vec{R}}{R} = \frac{r \hat{e}_r}{r} = \hat{e}_r \quad (40)$$

Pour la fonction de Green \mathcal{G} , l'amplitude (terme au dénominateur) est aussi $R = r$. Et, la distance R présente dans la phase (terme dans l'exponentielle) devient, en vertu du théorème d'Al-Kashi :

$$\begin{aligned} R &= (r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \alpha)^{1/2} \\ &= r \left(1 - 2 \frac{r r' \cos \alpha}{r^2} + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= r \left(1 - 2 \frac{r' \cos \alpha}{r} + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= r \left(1 - 2 \frac{r' \cos \alpha}{2r} + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right) \quad \text{dév. limité usuel en 0 de } (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + O(x^{n+1}) \\ \implies R &= r \left(1 - \frac{r' \cos \alpha}{r} \right) \quad r' < r \end{aligned} \quad (41)$$

D'où, le terme e^{-ikR} se transforme en un produit de deux exponentielles :

$$e^{-ikR} = e^{-ikr} \cdot e^{ikr' \cos \alpha} = e^{-ikr} \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'} \quad | \quad \vec{k} = k \hat{e}_r \quad (42)$$

Ainsi, la fonction de Green \mathcal{G} admet la relation, en champ lointain :

$$\mathcal{G}(r) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'} \quad (43)$$

Par conséquent, en champ lointain ($kR \gg 1$) et en considérant les résultats (40) et (43), les vecteurs-phaseurs champ magnétique et champ électrique

ont pour relation :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) &= -ik \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \left(\hat{e}_r \wedge \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}) \right) \\ \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) &= \frac{ik^2}{\omega\epsilon} \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \left(\left[\hat{e}_r \cdot \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}) \right] \hat{e}_r - \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}) \right)\end{aligned}\quad (44)$$

avec $\vec{\mathcal{J}}(\vec{r})$ la transformée de Fourier de la densité de courant $\vec{J}(\vec{r}')$, telle que :

$$\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'} dv' \quad (45)$$

Les expressions données en (44) sont plus communément connues sous le nom « formules des antennes ».

REMARQUE. — À grande distance, le champ électromagnétique a localement la structure d'une onde plane. Autrement dit, les vecteurs $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{H}}$ et \hat{e}_r forment un trièdre direct vérifiant la relation :

$$\vec{\mathcal{E}} = Z \left(\vec{\mathcal{H}} \wedge \hat{e}_r \right) \quad | \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Pour preuve, il vient en exploitant (44) :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}} &= Z(-ik) \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \left(\left[\hat{e}_r \wedge \vec{\mathcal{J}} \right] \wedge \hat{e}_r \right) \\ &= -iZk \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \left(\left[\underbrace{\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r}_{=1} \right] \vec{\mathcal{J}} - \left[\hat{e}_r \cdot \vec{\mathcal{J}} \right] \hat{e}_r \right) \\ &= \frac{ik^2}{\omega\epsilon} \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \left(\left[\hat{e}_r \cdot \vec{\mathcal{J}} \right] \hat{e}_r - \vec{\mathcal{J}} \right) \quad \text{avec } Zk = \frac{k^2}{\omega\epsilon} \text{ et multiplier par } -1\end{aligned}\quad \blacksquare$$

3.4 Application au dipôle infinitésimal

Dans le cas du dipôle infinitésimal localisé au centre du repère cartésien orthonormé, orienté dans la direction \hat{e}_3 et parcouru par le courant I_0 , le vecteur \vec{r}' est alors un vecteur nul et le vecteur $\vec{\mathcal{J}}(\vec{r})$ devient :

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}) &= \int_{\mathcal{V}} \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \, dv' \\
 &= I_0 \hat{e}_3 \int_{-l/2}^{l/2} dz' \quad \text{intégrale de volume réduite à une intégrale curviligne} \\
 &\implies \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}) = I_0 l \hat{e}_3
 \end{aligned} \tag{46}$$

De ce fait, l'application (44) donne directement l'expression du vecteur-phaseur champ magnétique :

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) &= -ik \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \hat{e}_r \wedge I_0 l \hat{e}_3 \\
 &= -ik I_0 l \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \hat{e}_r \wedge \hat{e}_3 \\
 &= -ik I_0 l \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \hat{e}_r \wedge (\cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta) \\
 &\implies \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) = ik I_0 l \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \sin \theta \hat{e}_\phi
 \end{aligned} \tag{47}$$

et l'expression du vecteur-phaseur champ électrique :

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) &= \underbrace{\frac{ik^2}{\omega\epsilon} \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} I_0 l}_{=\{\dots\}} ([\hat{e}_r \cdot \hat{e}_3] \hat{e}_r - \hat{e}_3) \\
 &= \{\dots\} \left([\hat{e}_r \cdot (\cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta)] \hat{e}_r - \cos \theta \hat{e}_r + \sin \theta \hat{e}_\theta \right) \\
 &= \{\dots\} \left(\cancel{\cos \theta \hat{e}_r} - \cancel{\cos \theta \hat{e}_r} + \sin \theta \hat{e}_\theta \right) \\
 &\implies \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = iZ_0 I_0 l k \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \sin \theta \hat{e}_\theta \quad \text{avec } \frac{k^2}{\omega\epsilon} = Z_0 k
 \end{aligned} \tag{48}$$

Les relations (47) et (48) sont bien identiques à celles données dans le photocopié de cours en slide 12.

4 Annexe

On se propose de détailler le calcul du gradient de la fonction de Green \mathcal{G} :

$$\vec{\text{grad}} \mathcal{G}(R) = \frac{1}{4\pi} \vec{\text{grad}} \left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right) = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right)_{,x} \\ \left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right)_{,y} \\ \left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right)_{,z} \end{pmatrix} \quad (49)$$

avec :

$$R = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$$

Tout d'abord, nous nous concentrons sur le calcul de la composante dans la direction \hat{e}_1 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right)_{,x} &= \frac{1}{R^2} \left([e^{-ikR}]_{,x} R - e^{-ikR} R_{,x} \right) \\ &= \frac{1}{R^2} \left(-ik R_{,x} e^{-ikR} R - e^{-ikR} R_{,x} \right) \\ &= -\frac{e^{-ikR}}{R^2} (1 + ikR) R_{,x} \end{aligned} \quad (50)$$

et :

$$\begin{aligned} R_{,x} &= \frac{1}{2} \mathcal{Z}(x - x') [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-1/2} \\ \implies R_{,x} &= \frac{x - x'}{R} \end{aligned} \quad (51)$$

d'où :

$$\left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right)_{,x} = -\frac{e^{-ikR}}{R^3} (1 + ikR) (x - x') \quad (52)$$

De ce résultat, on déduit aisément les expressions pour les directions \hat{e}_2 et \hat{e}_3 :

$$\left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right)_{,y} = -\frac{e^{-ikR}}{R^3} (1 + ikR) (y - y') \quad (53)$$

$$\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right)_{,z} = -\frac{e^{-ikR}}{R^3} (1 + ikR) (z - z') \quad (54)$$

En sommant les résultats (52) à (54), l'expression du gradient de \mathcal{G} devient :

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}} \mathcal{G}(R) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R^3} (1 + ikR) \underbrace{\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{pmatrix}}_{=\vec{R}} \\ &= -\frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \frac{1 + ikR}{R} \frac{\vec{R}}{R} \\ &= -\left(\frac{1}{R} + ik\right) \mathcal{G} \frac{\vec{R}}{R} \end{aligned} \quad (55)$$

Par ailleurs, le calcul de la dérivée de la fonction de Green par rapport à R donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{,R} &= \left(\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}\right)_{,R} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{-ike^{-ikR}R - e^{-ikR}}{R^2}\right) \\ &= -\frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \frac{1 + ikR}{R} \\ &\implies \mathcal{G}_{,R} = -\left(\frac{1}{R} + ik\right) \mathcal{G} \end{aligned} \quad (56)$$

Par conséquent, le gradient de la fonction de Green \mathcal{G} admet l'expression :

$$\vec{\text{grad}} \mathcal{G}(R) = \mathcal{G}_{,R} \frac{\vec{R}}{R} = -\left(\frac{1}{R} + ik\right) \mathcal{G} \frac{\vec{R}}{R} \quad (57)$$

