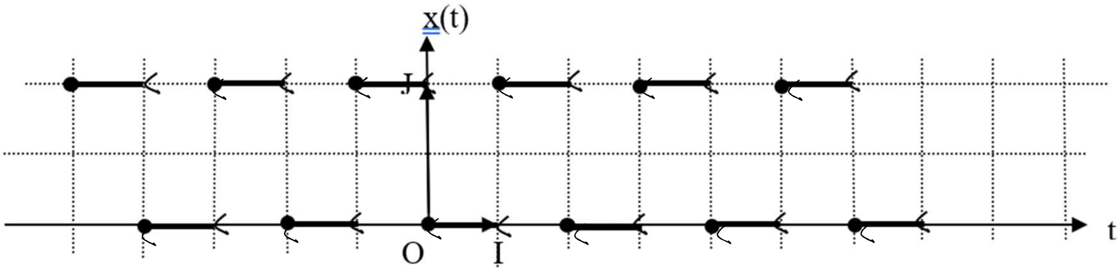
DM1 – R3.04 ALT : Exercice de rappel sur les séries de Fourier.
Corrigé du DM1
A n'étudier, qu'une fois avoir compléter l'énoncé du DM1

1)



2) $T = 2 \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$

3) Le signal x est ni pair, ni impair, car sa représentation graphique n'est ni, respectivement, symétrique par rapport à (Oy), ni par rapport à O.

4) Sa valeur moyenne est égale à $a_0 = \frac{1}{2}$, par lecture graphique ou calcul intégral.

5)

Coefficients de Fourier de x : $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad a_p = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(p\omega t)\,dt = \int_0^2 x(t)\cos(p\pi t)\,dt$

$$a_p = \int_0^1 0.\cos(p\pi t)\,dt + \int_1^2 1.\cos(p\pi t)\,dt = \left[\frac{\sin(p\pi t)}{p\pi}\right]_1^2 = \frac{1}{p\pi}(\sin(2p\pi) - \sin(p\pi)) = 0$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad b_p = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(p\omega t)\,dt = \int_0^2 x(t)\sin(p\pi t)\,dt$$

$$b_p = \int_0^1 0.\sin(p\pi t)\,dt + \int_1^2 1.\sin(p\pi t)\,dt = \left[\frac{-\cos(p\pi t)}{p\pi}\right]_1^2 = \frac{1}{p\pi}(\cos(p\pi) - \cos(2p\pi))$$

$$b_p = \frac{1}{p\pi}((-1)^p - 1)$$

6) Série de Fourier de x :

$$S_x(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p\cos(p\omega t) + b_p\sin(p\omega t) = \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p\pi}((-1)^p - 1)\sin(p\pi t)$$

Autre écriture de la série de Fourier : $S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p}((-1)^p - 1)\sin(p\pi t)$

7) $H_1(t) = a_1.\cos(1\omega t) + b_1.\sin(1\omega t) = \frac{1}{\pi}((-1)^1 - 1)\sin(\pi t) = \frac{-2}{\pi}\sin(\pi t)$ est le fondamental du signal x.

8) Tous les harmoniques de rangs pairs de la série sont nuls, en effet :

$$H_{2k}(t) = a_{2k}.\cos(2k\omega t) + b_{2k}.\sin(2k\omega t) = \frac{1}{2k\pi}\left((-1)^{2k} - 1\right)\sin(2k\pi t) = 0 \quad \forall k \neq 0$$

On peut ainsi simplifier la série de Fourier de x, en ne sommant que sur les termes de rang impair :

$$S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\left((-1)^{2k+1} - 1\right)\sin\left((2k+1)\pi t\right)$$

$$S_x(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left((2k+1)\pi t\right)$$