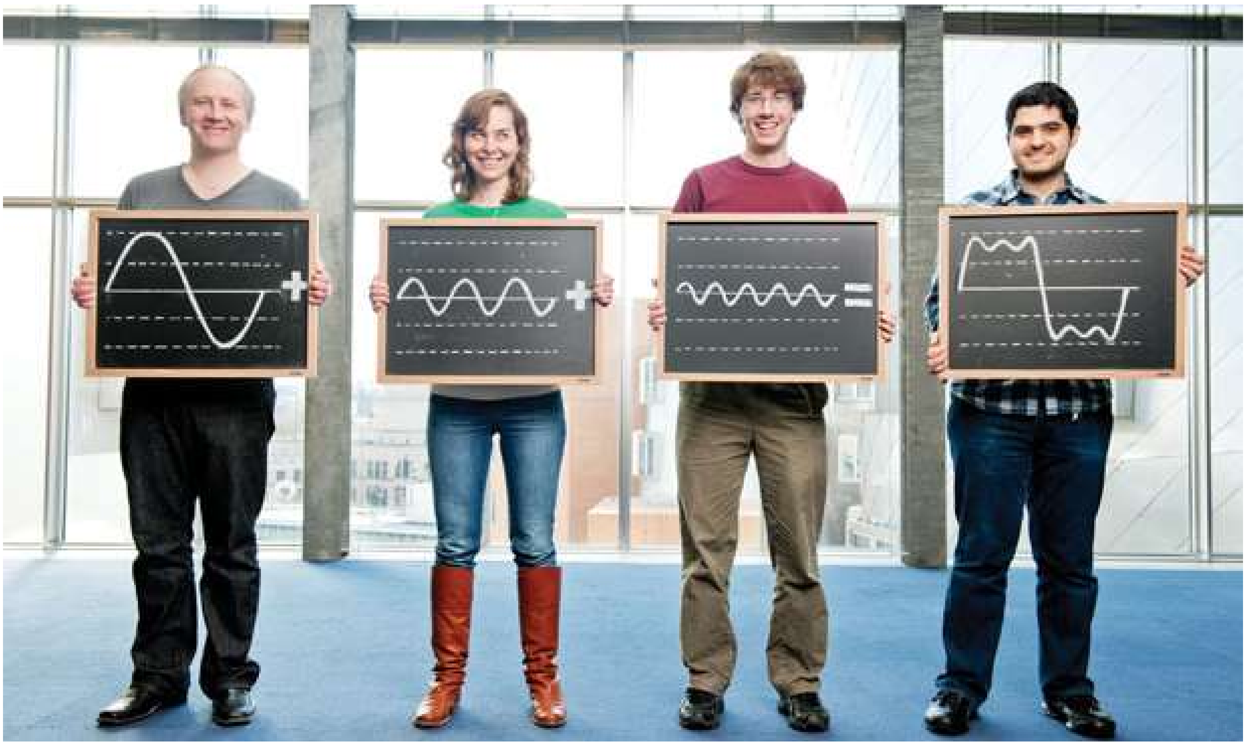
BACHELOR UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE

Ressource R3-04 : OUTILS MATHEMATIQUES ET LOGICIELS

Chapitre 1 : Séries de Fourier – niveau 2



Enseignante : Sylvia Le Beux
Sylvia.lebeux@univ-tln.fr
Bureau A042
Moodle : https://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=527

Table des matières

Programme d'Outils mathématiques et logiciels des semestres 3 et 4.

--- R3-04 ---

Chapitre I : Séries de Fourier – niveau 2 (avec le logiciel mathcad)

Chapitre II : Transformation en Z

-- R4-04 ---

Chapitre III : Transformation de Fourier

Chapitre IV : Calcul matriciel (avec le logiciel Maxima)

Bibliographie

- Pour les étudiants souhaitant s'entraîner et progresser :

  Mathématiques en modules – Tome 2 - bases fondamentales DUT et BTS industriels
  auteur : C.Larcher - édition CASTELLA
  Magasin GEII
  Remarques : Résumé/rappel de cours de DUT et exercices appliqués au GEII corrigés.

  Maths BTS-DUT industriels - édition Techno + - auteurs C.Larcher
  Côte BU : 510 LAR
  Remarques : Résumé de cours et exercices très appliqués au GEII corrigés.

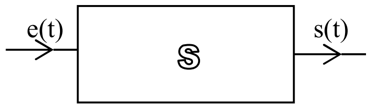
- Pour les étudiants souhaitant suivre de longues études :

  Cours DUT/BTS : édition : Ellipses – auteur : P. Variot
  Côte BU :510 VAR
  Remarques : Cours DUT d'un très bon niveau, tout le programme du DUT y est traité et plus.

  L'épreuve de mathématiques au concours ENSEA - édition : CASTELLA - auteurs : Lièvre - Mazoyer
  ISBN : 978 2 7135 2846 0 à la BU.
  Remarques : Résumé de cours très clair et sujets de concours corrigés intégralement.

Partie A : Séries de Fourier de signaux périodiques quelconques

<u>Introduction</u> Soit S un système électrique linéaire (RC, RLC…) schématisé ci-dessous par :



Dans un tel circuit, un signal d'entrée e(t) engendre un signal de sortie s(t), appelé aussi <u>réponse du circuit au signal e(t)</u>, et ces deux signaux sont reliés par une équation différentielle <u>linéaire</u> à coefficients constants (programme du GEII) : (les coefficients a_i et b_i sont des constantes).

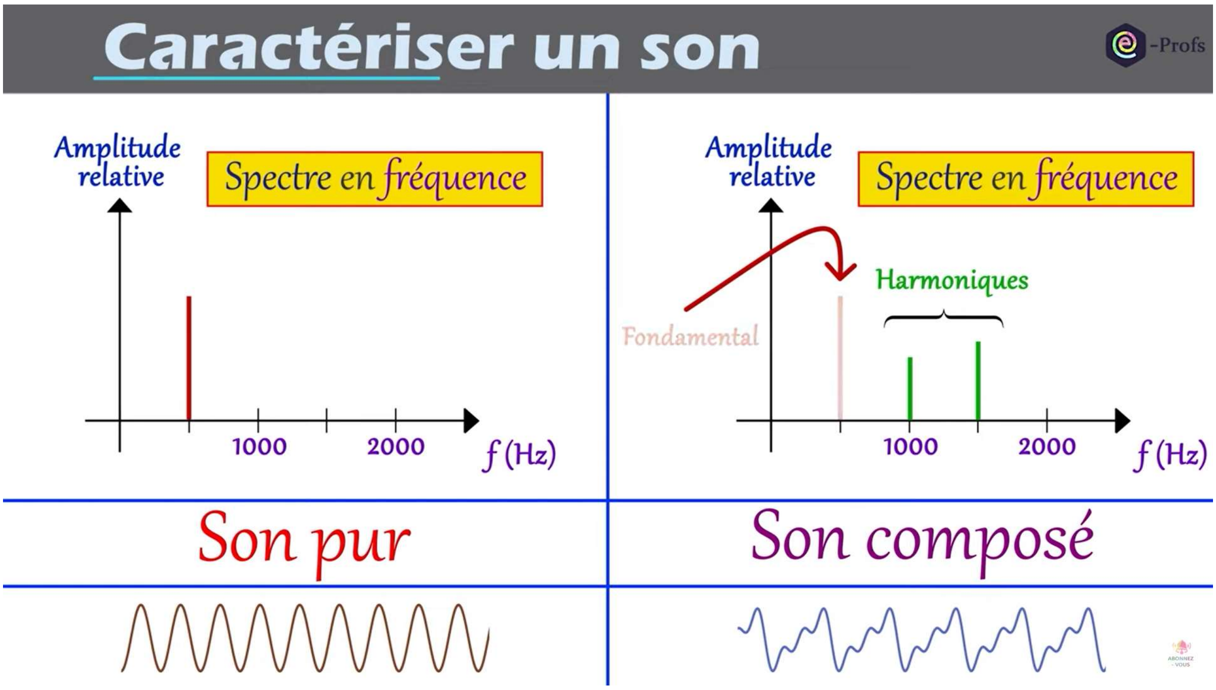
$$a_n s^{(n)}(t) + a_{n-1} s^{(n-1)}(t) + \ldots\ldots + a_1 s'(t) + a_0 s(t) = b_n e^{(n)}(t) + $$
$$+ b_{n-1} e^{(n-1)}(t) + \ldots\ldots + b_1 e'(t) + b_0 e(t)$$

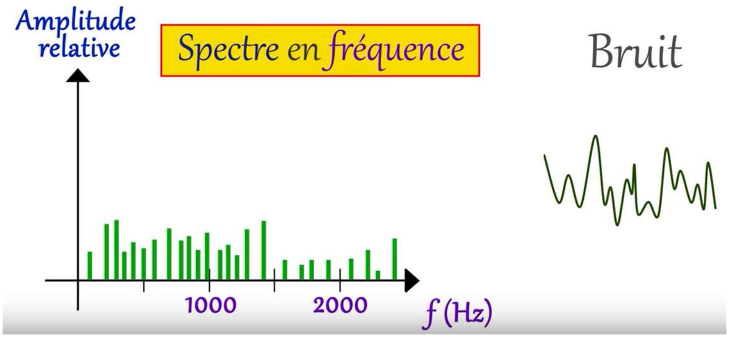
Ainsi, si le signal d'entrée est une somme finie ou non de signaux : $e(t) = e_1(t)+e_2(t)+\ldots+e_n(t)$, alors la réponse est de la même forme : $s(t) = s_1(t)+s_2(t)+\ldots+s_n(t)$ où chaque signal s_i est la réponse du circuit au signal e_i avec $i \in [\![1, n]\!]$.

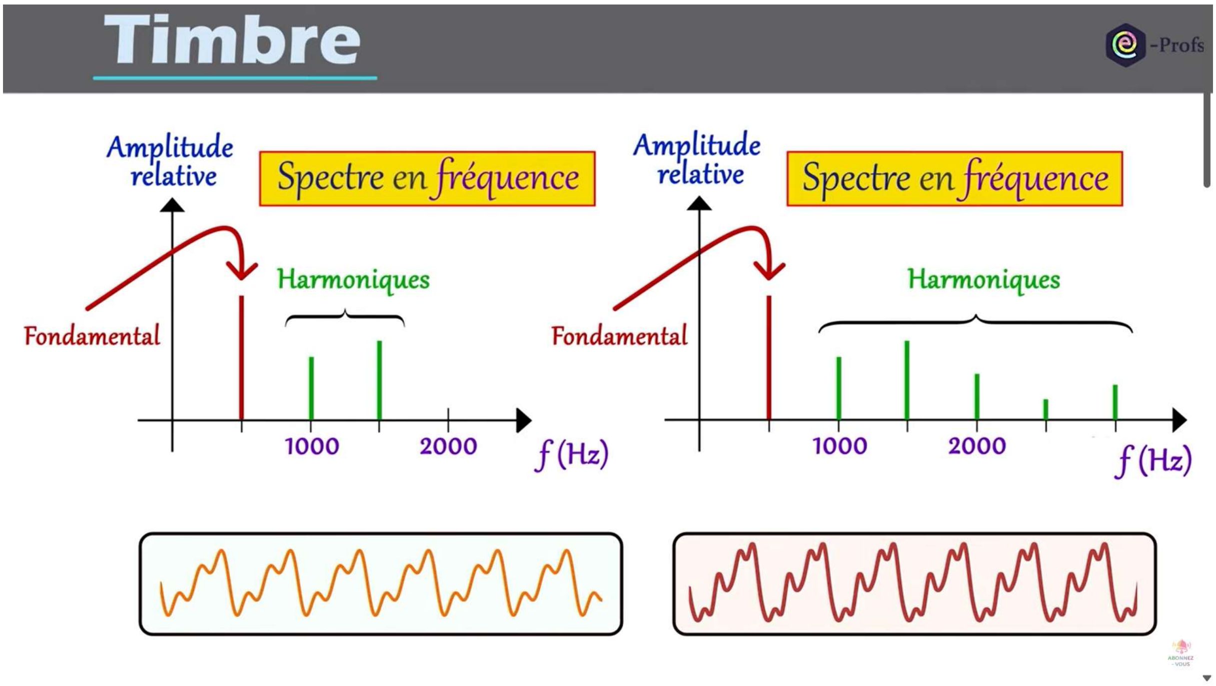
Lorsque le signal d'entrée est une fonction constante ou encore une fonction sinusoïdale, il est assez facile d'obtenir mathématiquement le signal de sortie et de l'analyser, puisqu'il s'agit également respectivement d'une constante ou d'une sinusoïde. Que faire alors lorsque le signal d'entrée n'est pas sinusoïdal, mais, quand même périodique ? C'est le baron Joseph Fourier (1768 – 1837), qui a résolu ce problème en montrant que l'on peut décomposer un signal périodique en somme d'une constante et de fonctions sinusoïdales.

Dans ce chapitre nous allons déterminer à quelles conditions on peut écrire un signal T-périodique sous la forme : $\mathbf{e(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} (a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t))}$ où $\mathbf{T = \frac{2\pi}{\omega}}$.

Lorsque c'est le cas, on dit que le signal e est décomposable en série de Fourier. Nous pourrons alors représenter le spectre de e.


Caractériser un son
e-Profs
Amplitude relative
Spectre en fréquence
1000
2000
f (Hz)
Amplitude relative
Spectre en fréquence
Harmoniques
Fondamental
1000
2000
f (Hz)
Son pur
Son composé


Amplitude relative
Spectre en fréquence
Bruit
1000
2000
f (Hz)


Timbre
e-Profs
Amplitude relative
Spectre en fréquence
Harmoniques
Fondamental
1000
2000
f (Hz)
Amplitude relative
Spectre en fréquence
Harmoniques
Fondamental
1000
2000
f (Hz)

I. Développement d'une fonction périodique en série de Fourier – application sur un signal carré

1) Définitions

Soit x une fonction de période T, intégrable sur tout intervalle $[t_0, t_0+T]$.
On appelle série de Fourier réelle de x la série suivante :

$$S(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t))$$

, où les suites réelles $(a_p)_p$ et $(b_p)_p$ sont définies de la façon suivante :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt \quad ; \quad a_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\cos(p\omega t).dt \quad ; \quad b_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\sin(p\omega t).dt \quad \text{pour } p \geq 1,$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

a_0 est la valeur moyenne du signal x.
L'harmonique de rang p du signal x est le signal : $H_p(t) = a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)$
L'harmonique de rang 1 est appelé le fondamental du signal x

2) Rappels du R2-04

i) $S(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)) = \sum_{p=0}^{+\infty}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t))$

ii) Intégrale d'une fonction T-périodique sur un intervalle de longueur T :

Soit f, une fonction T-périodique, intégrable sur tout intervalle de longueur T : [a,a+T].
On a alors :

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

On peut donc calculer les intégrales définissant les coefficients de Fourier sur n'importe quel intervalle de longueur T.

iii) Intégrale sur un intervalle centré en 0 d'une fonction paire ou impaire :

- Si f est une fonction paire et intégrable sur [-a,a], alors : $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2.\int_0^a f(t)dt$.
- Si f est une fonction impaire et intégrable sur [-a,a], alors : $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.

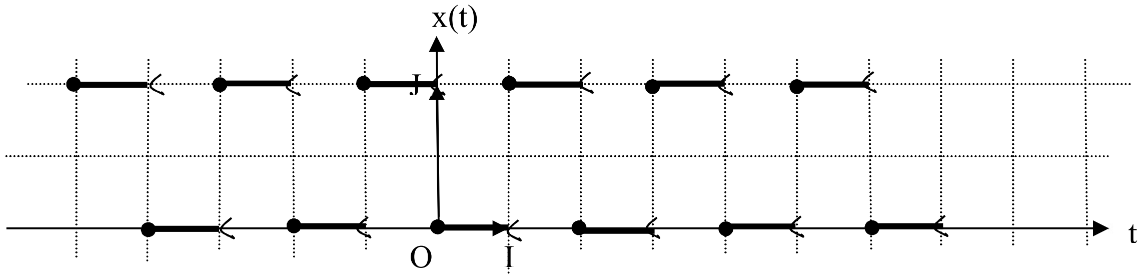
Remarque importante

La série de Fourier d'un signal pair est en cosinus : $\mathbf{a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p . \cos(p\omega t)}$

La série de Fourier d'un signal impair est en sinus : $\mathbf{\sum_{p=1}^{+\infty} b_p . \sin(p\omega t)}$

iv) Série de Fourier d'un signal carré périodique

Soit x, la fonction de période 2, définie par : $x(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t \in [0;1[\\ 1 \text{ pour } t \in [1;2[\end{cases}$



$T = 2 \iff \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$

Le signal x est ni pair, ni impair.

Sa valeur moyenne est égale à $a_0 = \frac{1}{2}$, par lecture graphique ou calcul intégral.

Coefficients de Fourier de x : $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $a_p = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(p\omega t)\,dt = \int_0^2 x(t)\cos(p\pi t)\,dt$

$$a_p = \int_0^1 0.\cos(p\pi t)\,dt + \int_1^2 1.\cos(p\pi t)\,dt = \left[\frac{\sin(p\pi t)}{p\pi}\right]_1^2 = \frac{1}{p\pi}(\sin(2p\pi) - \sin(p\pi)) = 0$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad b_p = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(p\omega t)\,dt = \int_0^2 x(t)\sin(p\pi t)\,dt$$

$$b_p = \int_0^1 0.\sin(p\pi t)\,dt + \int_1^2 1.\sin(p\pi t)\,dt = \left[\frac{-\cos(p\pi t)}{p\pi}\right]_1^2 = \frac{1}{p\pi}(\cos(p\pi) - \cos(2p\pi))$$

$$b_p = \frac{1}{p\pi}((-1)^p - 1)$$

Série de Fourier de x :

$S_x(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p\cos(p\omega t) + b_p\sin(p\omega t) = \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p\pi}((-1)^p - 1)\sin(p\pi t)$

Autre écriture de la série de Fourier : $S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p}((-1)^p - 1)\sin(p\pi t)$

Remarques : a) La série est en sinus, car si on change de repère (avec l'axe des abscisses d'équation $Y = \frac{1}{2}$), la courbe représentant X est symétrique par rapport à la nouvelle origine, et la fonction est ainsi impair.

b) Tous les termes de rangs pairs de la série sont nuls, on peut ainsi écrire :

$$S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\left((-1)^{2k+1} - 1\right)\sin\left((2k+1)\pi t\right)$$

$$S_x(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\big((2k+1)\pi t\big)$$

Question :
La série de Fourier de x est-elle égale au signal x ? A-t-on : $S_x(t) = x(t)\ \ \forall t \in \mathbb{R}$?

3) Théorème de Dirichlet et définition d'une fonction développable en série de Fourier

Soit x un signal de période T, intégrable sur tout intervalle $[\alpha, \alpha+T]$.

- Si x est continue sur $[\alpha, \alpha+T[$, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle admet une limite finie à gauche et à droite.
- x est dérivable sur $[\alpha, \alpha+T[$, sauf éventuellement en un nombre fini de points où sa dérivée admet une limite finie à gauche et à droite.

Alors la série de Fourier de x converge en tout point t et sa fonction somme est alors :

$$a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} (a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)) = \begin{cases} x(t) \text{ pour t où x est continue} \\ \dfrac{x(t_+) + x(t_-)}{2} \text{ pour t où x est discontinue} \end{cases}$$

On dit alors que x est développable en série de Fourier.

Vocabulaire Toute fonction vérifiant les hypothèses du théorème de Dirichlet sont dites de classe C^1 par morceaux sur l'ensemble des réels.
Exemple Appliquer le théorème de Dirichlet au signal rectangle précédent.

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………Notes………..…………………………………….............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

<u>Exercice</u> : En déduire la valeur de la série numérique : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

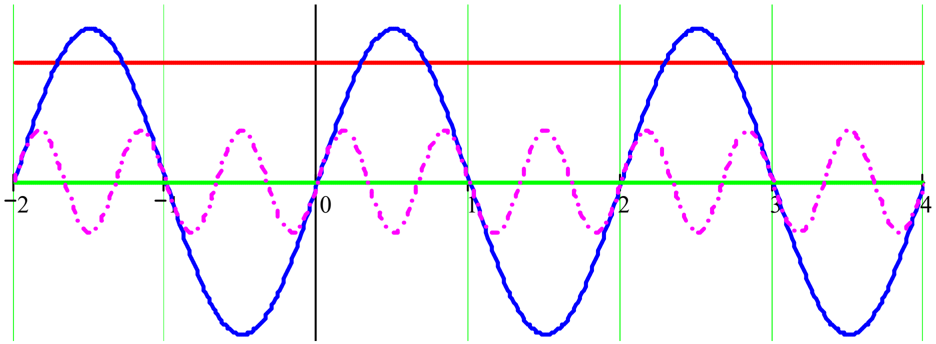
…………………………………………………………………………………………………

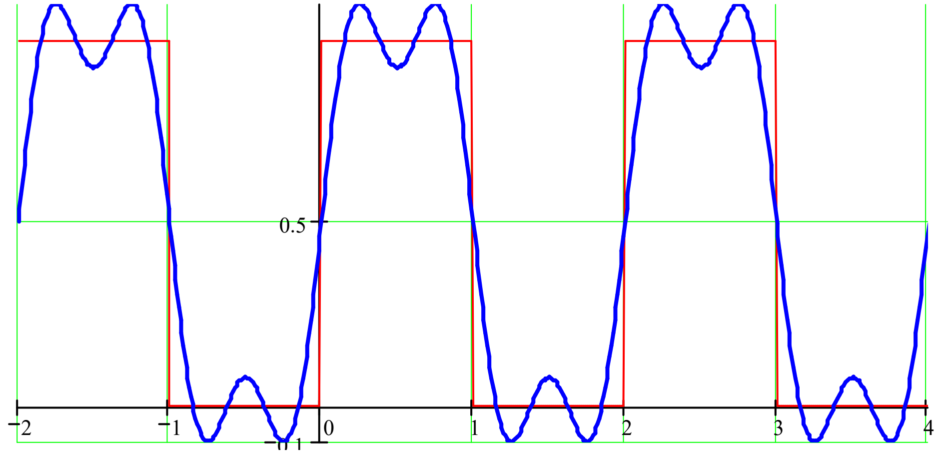
…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

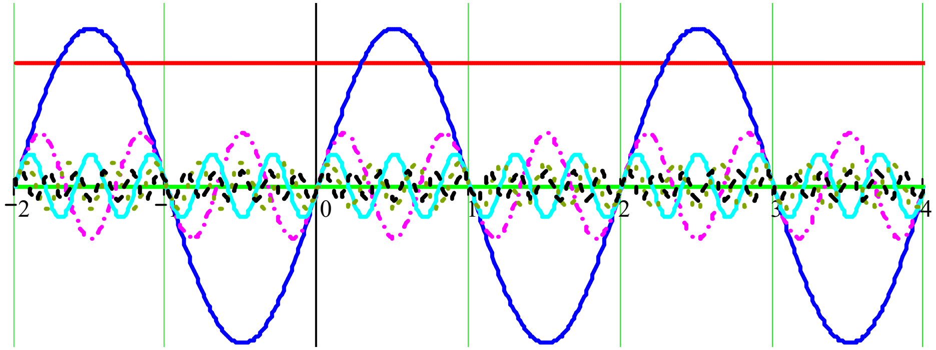
………………………………………………………………………………………………

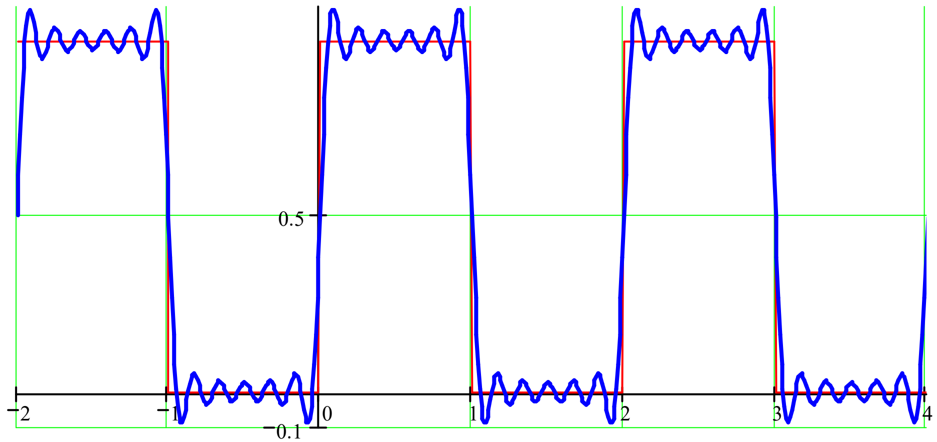
Série de Fourier d'un signal carré périodique





Au-dessus : Harmoniques de rang 0 (valeur moyenne), de rang 1 (fondamental) jusqu'au rang 3.
A droite : somme des harmoniques de rang de 0 à 3 et signal f.





Au-dessus : Harmoniques de rang 0 jusqu'au rang 21.
A droite : somme des harmoniques de rang 0 à 21 et signal f.

4) Spectre d'un signal périodique (prérequis : R2-04)

Le terme général $a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)$ peut aussi s'écrire $A_p \cos(p\omega t + \phi_p)$
où : $A_p = |a_p - ib_p| = \sqrt{a_p^2 + b_p^2}$ et $\phi_p = \arg(a_p - ib_p)$. ($p \neq 0$)
A_p est l'amplitude de l'harmonique de rang p
ϕ_p est la phase de l'harmonique de rang p.
Une autre écriture du développement en série de Fourier d'un signal périodique f est donc : $A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} A_p \cos(p\omega t + \phi_p)$, avec $A_0 = a_0$.
L'ensemble des amplitudes A_p forme le spectre d'amplitude unilatéral du signal x, ou spectre de raies (il s'agit d'un spectre discret). Il est représenté par un diagramme en bâtons obtenu en représentant les amplitudes A_p en fonction de p/T. A_p devient négligeable à partir d'un certain rang.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

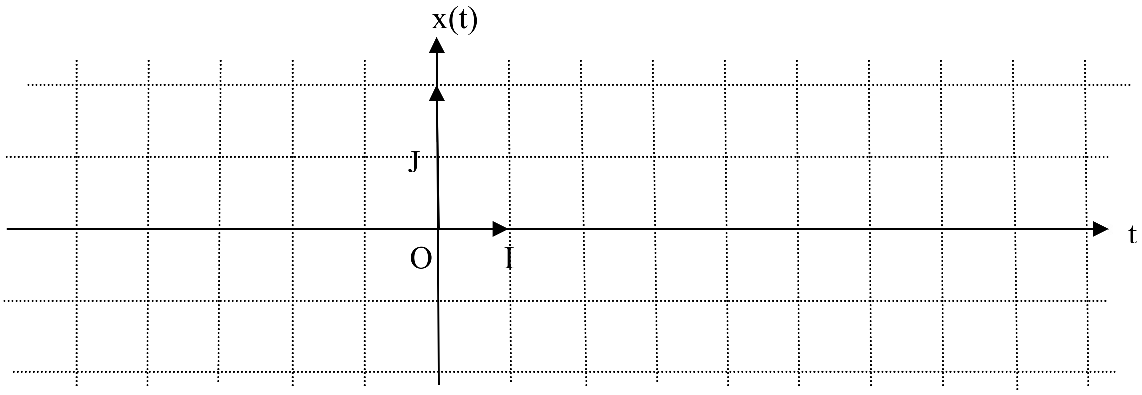
……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

II. Développement d'un signal triangle périodique en série de Fourier

1) Série de Fourier d'un signal triangle périodique

Soit x, la fonction de période 2, définie par : $x(t) = \begin{cases} 1 - t \text{ pour } t \in [0;1[\\ 1 + t \text{ pour } t \in [-1;0[\end{cases}$



i) Représenter le signal x. Déterminer T, ω et les coefficients de Fourier de x :

…………………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………………..............

Notes

…………………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………………..............

Valeur moyenne du signal x : ………………………………………………………………..

Fondamental du signal x : ……………………………………………………………………

Harmonique de rang 2 : ………………………………………………………………………

Harmonique de rang 3 : ………………………………………………………………………

Harmonique de rang p : ………………………………………………………………………

ii) Ecrire la série de Fourier du signal x :

…………………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………………..............

Notes

2) Convergence de la série de Fourier du signal x (Théorème de Dirichlet)

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

3) Spectre du signal x

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

III. Séries de Fourier complexes

Le terme général d'une série de Fourier est : $U_p(t) = a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)$.
En utilisant les formules d'Euler, on montre que U_p peut s'écrire sous la forme :
$U_p(t) = c_p e^{ip\omega t} + \overline{c_p} e^{-ip\omega t}$, en effet :

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

On a alors : $c_p = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).e^{-ip\omega t}dt$ et $c_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt$ car :

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

De plus, $\overline{c_p} = c_{-p}$, car :

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

On a alors : $a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} (a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)) =$ ....

Soit : ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

<u>En résumé</u>

On appelle <u>série de Fourier complexe</u> d'un signal x, T-périodique la série : $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t}$

où : $c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t).e^{-ik\omega t} dt$ **pour** $k \neq 0$ **et** $c_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt$ **avec** $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

On a alors les correspondances suivantes : $c_0 = a_0$ **et** $c_k = \frac{a_k - i.b_k}{2}$ **pour** $k \neq 0$.

III. Identité de Bessel-Parseval

Soit x une fonction T-périodique ($T = \frac{2\pi}{\omega}$) développable en série de Fourier :

$$x(t) = \sum_{p\geq 0} (a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t))$$

On a alors la formule suivante : $\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)dt = a_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^2 + b_p^2}{2}$

Ou encore, en utilisant les coefficients de Fourier complexes : $\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$

Interprétation physique

La formule de Parseval donne une relation entre les coefficients de Fourier d'une fonction x et le carré de sa valeur efficace.

$(x_{eff})^2 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)dt$ est l'énergie du signal x, et $E(U_n) = \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ l'énergie de l'harmonique de rang n : $U_n(t) = a_n.\cos(n\omega t) + b_n.\sin(n\omega t)$.

La formule de Bessel-Parseval peut aussi s'interpréter en termes d'énergie :

$$\mathbf{E(x) = x_{moy}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} E(u_n)}$$

Exemple / Exercice

Appliquer le théorème de Parseval au signal rectangle du paragraphe I.2.iv, puis en déduire la valeur de la série : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

……………………………………………………………………………………….......

……………………………………………………………………………………….......

……………………………………………………………………………………….......

……………………………………………………………………………………….......

……………………………………………………………………………………….......

……………………………………………………………………………………….......

……………………………………………………………………………………….......

……………………………………………………………………………………….............

……………………………………………Notes………..……………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

IV. Exercices

Exercice 1 :

Soit x, la fonction de période 2π , définie par : $x(t) = |t|$, pour $t \in [-\pi, \pi[$.

1) Dessiner le graphe de x,
2) Calculer les coefficients de Fourier de x,
3) Montrer que la série de Fourier de x peut s'écrire : $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p\geq 0}\frac{\cos(2p+1)t}{(2p+1)^2}$
4) En utilisant le théorème de Dirichlet, montrer que la série de Fourier de x est convergente pour toute valeur de t, quelle est alors sa somme ?
5) En déduire la valeur de la série : $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$.
6) En appliquant le théorème de Parseval, en déduire la valeur de la série : $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}$

Exercice 2 :

Soit x, la fonction 2π-périodique définie par : $x(t) = \frac{t}{2\pi}$ sur $[0, 2\pi[$.

Représenter x sur $[-3\pi, 3\pi]$. Déterminer ses coefficients de Fourier complexes, sa série de Fourier ; appliquer le théorème de Dirichlet. Quelle est alors la série de Fourier réelle de x ?

Exercice 3 Extrait d'un concours écrit.

Soit f une fonction 2π-périodique définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = \sin x$ si $x \in [0, \pi[$ et $f(x) = 0$ si $x \in [\pi, 2\pi[$

1°. Tracer rapidement la courbe représentative de f
2°. Déterminer les coefficients de Fourier de f
3°. En déduire l'expression de la série de Fourier.
4°. La fonction f vérifie-t-elle les hypothèses du théorème de Dirichlet ?
5°. Appliquer ce théorème pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$
6°. Idem pour $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$
7°. Appliquer le théorème de Parseval à f

Notes

Partie B : Annales pour les poursuites d'études – ENSEA 2017

Question 11

Seulement pour les candidats de l'option génie électrique

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période 2π, définie par

$$\forall t \in]-\pi\,;\pi], \qquad f(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

On se propose d'étudier la série de Fourier de f notée

$$S(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right).$$

(A) f est continue sur $\mathbb{R}$.
(B) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t) = S(t)$.
(C) Pour tous réels a et b, on a

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) - \cos(a-b)}{2}.$$

(D) On a $a_0 = \dfrac{4}{\pi}$.
(E) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n = 0$.

Question 12

Seulement pour les candidats de l'option génie électrique

Cette question fait suite à a précédente, dont on reprendra les notations. On calculera les coefficients de Fourier de f, on évaluera la série $S(t)$ en certaines valeurs de t, puis on appliquera l'égalité de Parseval.

(A) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n = \dfrac{-4(-1)^n}{\pi(4n^2-1)}$.
(B) On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$.
(C) On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = 1$.
(D) On a $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
(E) On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.

<u>Notes</u> : ………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………….............

………

………

………

………

………

………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………