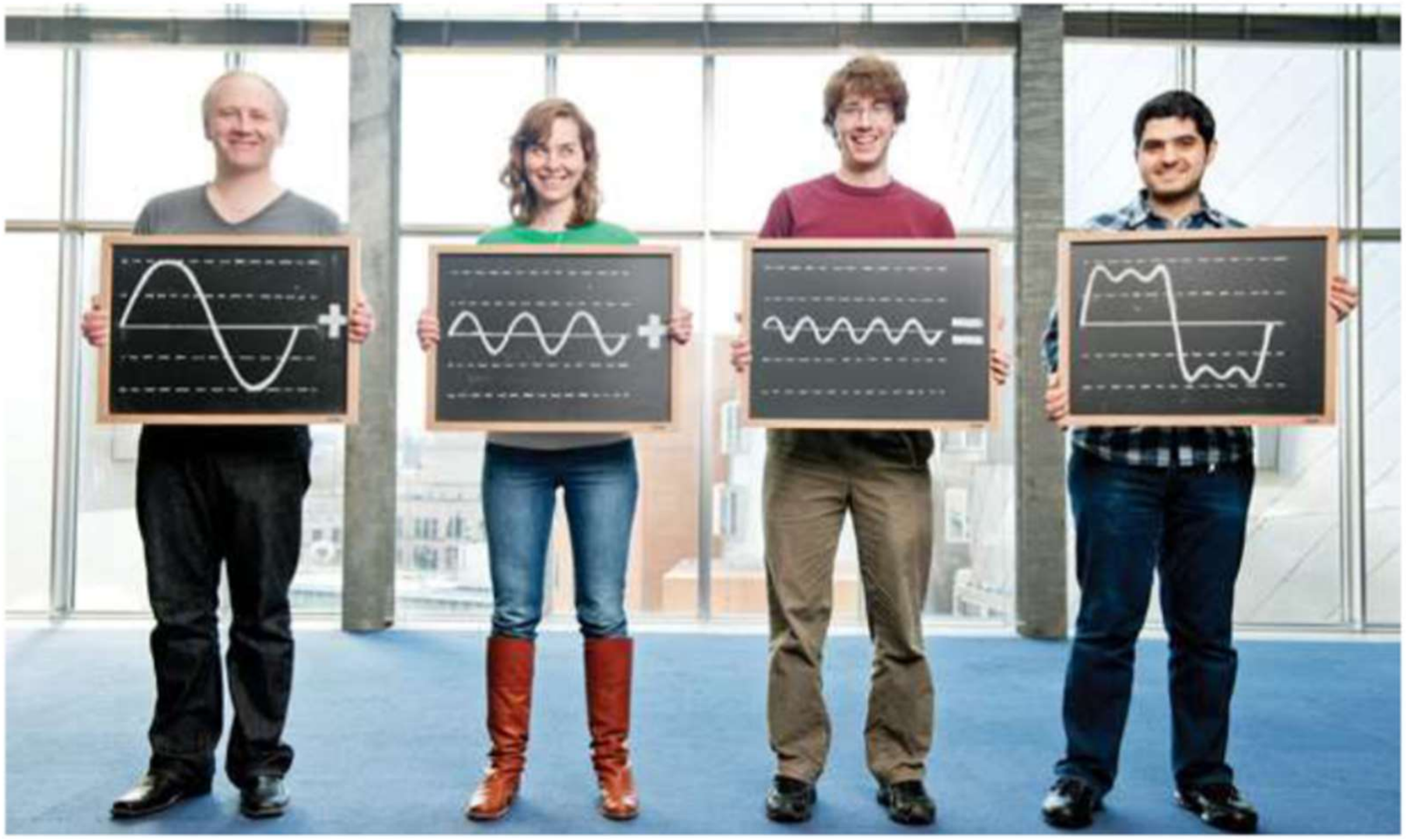
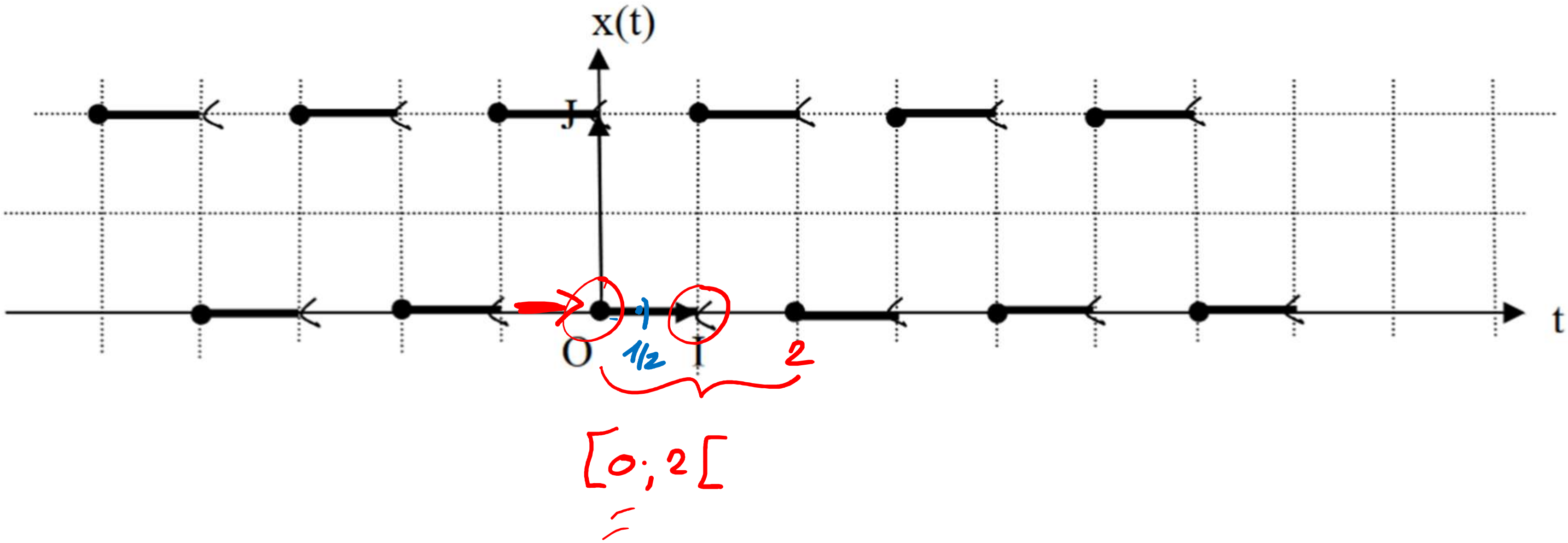
Chapitre 1 : Séries de Fourier – niveau 2



iv) Série de Fourier d'un signal carré périodique

Soit x, la fonction de période 2, définie par : $x(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t \in [0;1[\\ 1 \text{ pour } t \in [1;2[\end{cases}$



$$T = 2 \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

Le signal x est ni pair, ni impair.

Sa valeur moyenne est égale à $a_0 = \frac{1}{2}$, par lecture graphique ou calcul intégral.

Coefficients de Fourier de x : $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad a_p = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(p\omega t)\,dt = \int_0^2 x(t)\cos(p\pi t)\,dt$

$$a_p = \int_0^1 0.\cos(p\pi t)\,dt + \int_1^2 1.\cos(p\pi t)\,dt = \left[\frac{\sin(p\pi t)}{p\pi}\right]_1^2 = \frac{1}{p\pi}(\sin(2p\pi) - \sin(p\pi)) = 0$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad b_p = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(p\omega t)\,dt = \int_0^2 x(t)\sin(p\pi t)\,dt$$

$$b_p = \int_0^1 0.\sin(p\pi t)\,dt + \int_1^2 1.\sin(p\pi t)\,dt = \left[\frac{-\cos(p\pi t)}{p\pi}\right]_1^2 = \frac{1}{p\pi}(\cos(p\pi) - \cos(2p\pi))$$

$$b_p = \frac{1}{p\pi}((-1)^p - 1)$$

Série de Fourier de x :

$S_x(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \cos(p\omega t) + b_p \sin(p\omega t) = \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p\pi}((-1)^p - 1)\sin(p\pi t)$

Autre écriture de la série de Fourier : $S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p}((-1)^p - 1)\sin(p\pi t)$

Remarques : a) La série est en sinus, car si on change de repère (avec l'axe des abscisses d'équation $Y = \frac{1}{2}$), la courbe représentant X est symétrique par rapport à la nouvelle origine, et la fonction est ainsi impair.

b) Tous les termes de rangs pairs de la série sont nuls, on peut ainsi écrire :

$$S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1}\left((-1)^{2k+1} - 1\right)\sin\left((2k+1)\pi t\right)$$

$$S_x(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\big((2k+1)\pi t\big)$$

Page 10

Question :

La série de Fourier de x est-elle égale au signal x ? A-t-on : $S_x(t) = x(t) \ \ \forall t \in \mathbb{R}$?

3) Théorème de Dirichlet et définition d'une fonction développable en série de Fourier

Soit x un signal de période T, intégrable sur tout intervalle $[\alpha, \alpha+T]$.

hyp1 : **- Si x est continue sur $[\alpha, \alpha+T[$, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle admet une limite finie à gauche et à droite.**

hyp2 : **- x est dérivable sur $[\alpha, \alpha+T[$, sauf éventuellement en un nombre fini de points où sa dérivée admet une limite finie à gauche et à droite.**

cl : **Alors la série de Fourier de x converge en tout point t et sa fonction somme est alors :**

$$a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty}\left(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)\right) = \begin{cases} x(t) \text{ pour t où x est continue} \\ \dfrac{x(t_+) + x(t_-)}{2} \text{ pour t où x est discontinue} \end{cases}$$

On dit alors que <u>x est développable en série de Fourier.</u>

Vocabulaire Toute fonction vérifiant les hypothèses du théorème de Dirichlet sont dites de classe C^1 par morceaux sur l'ensemble des réels.

Exemple Appliquer le théorème de Dirichlet au signal rectangle précédent.

hyp1 : Sur $[0;2[$, x est continue sauf en 0 et 1 où :

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{t\to 0^+} x(t) = x(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad x(0^-) = 1 \\ x(1^+) = 1 \quad \text{et} \quad x(1^-) = 0 \end{array}\right\} \text{sont finis}$$

hyp2 : Sur $[0;2[$, x est dérivable* sauf en 0 et 1 où

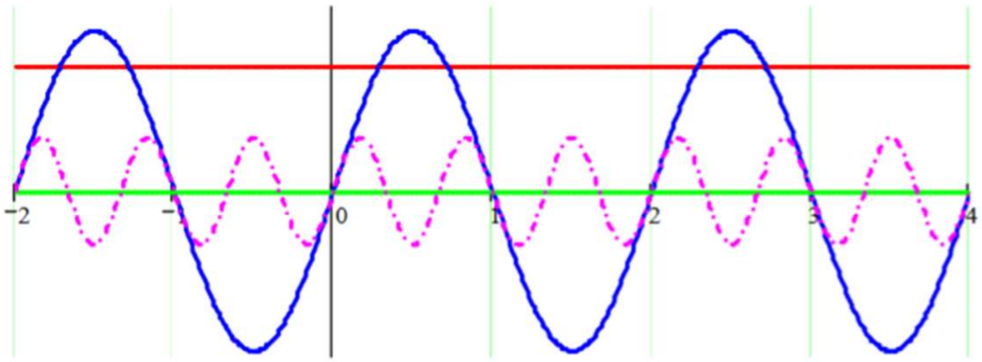
* On peut tracer la tangente à la courbe

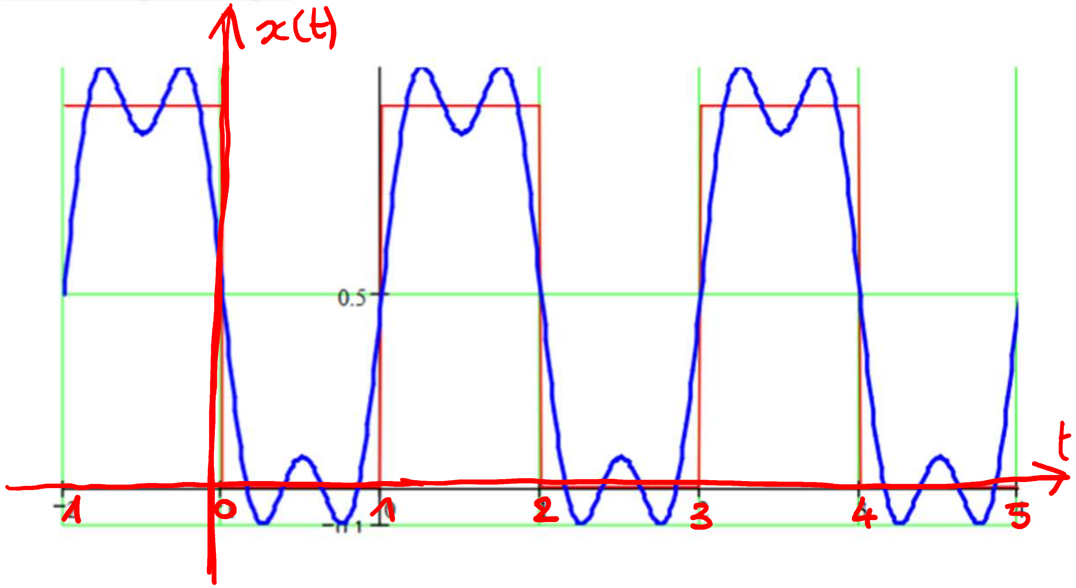
$$\left.\begin{array}{ll} x'(0^+) = 0 & x'(0^-) = 0 \\ x'(1^+) = 0 & x'(1^-) = 0 \end{array}\right\} \text{sont finis}$$

Ccl : La série de Fourier de x converge et a pour somme :

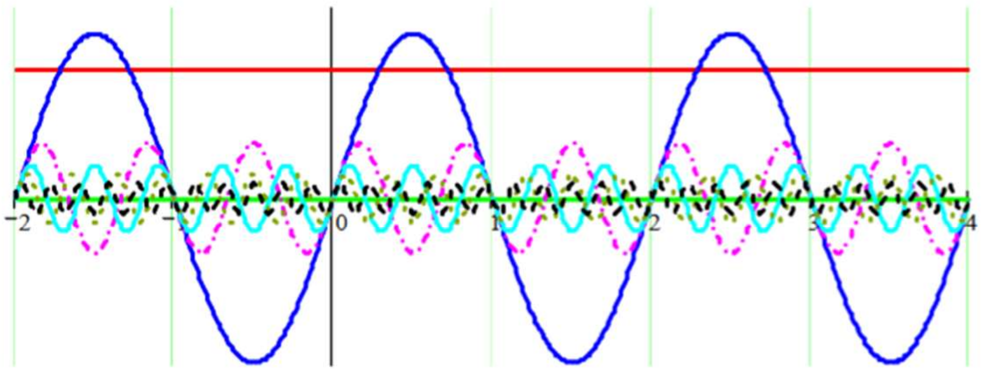
$$S_x(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \sin((2k+1)\pi t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \notin \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2} & \text{si } t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

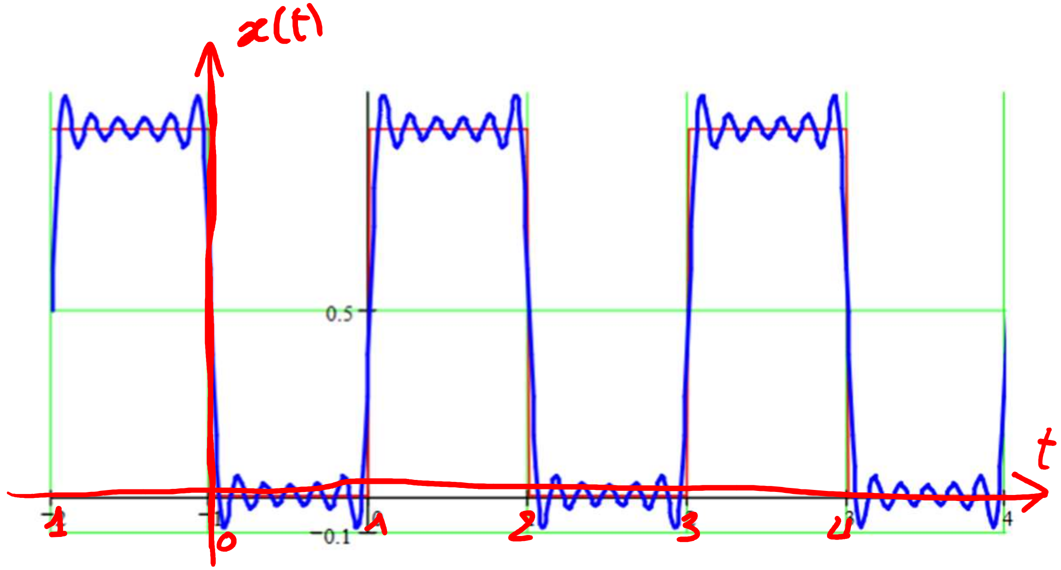
Série de Fourier d'un signal carré périodique





Au-dessus : Harmoniques de rang 0 (valeur moyenne), de rang 1 (fondamental) jusqu'au rang 3.
A droite : somme des harmoniques de rang de 0 à 3 et signal f.





Au-dessus : Harmoniques de rang 0 jusqu'au rang 21.
A droite : somme des harmoniques de rang 0 à 21 et signal f.

Exercice : En déduire la valeur de la série numérique : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = S$

MATH.

Brouillon

0

$\frac{1}{2}$

1

$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots$$

On sait que :

$$S_x(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \sin((2k+1)\pi t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \notin \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2} & \text{si } t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

On remarque que si $t = \frac{1}{2}$ alors : $\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$

Donc : $S_x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}}_{= S} = x\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \iff \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \cdot S = 0 \iff -\frac{2}{\pi} S = -\frac{1}{2}$

$$\iff S = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

4) <u>Spectre d'un signal périodique</u> (prérequis : R2-04)

Le terme général $a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)$ peut aussi s'écrire $A_p \cos(p\omega t + \phi_p)$

où : $A_p = |a_p - ib_p| = \sqrt{a_p{}^2 + b_p{}^2}$ et $\phi_p = \arg(a_p - ib_p)$. ($p \neq 0$)

A_p est l'amplitude de l'harmonique de rang p

ϕ_p est la phase de l'harmonique de rang p.

Une autre écriture du développement en série de Fourier d'un signal périodique f est donc : $A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} A_p \cos(p\omega t + \phi_p)$, avec $A_0 = a_0$.

L'ensemble des amplitudes A_p forme le <u>spectre d'amplitude</u> unilatéral du signal x, ou spectre de raies (il s'agit d'un spectre discret). Il est représenté par un diagramme en bâtons obtenu en représentant les amplitudes A_p en fonction de p/T. A_p devient négligeable à partir d'un certain rang.

$a_0 = \frac{1}{2}$; $a_p = 0$; $b_p = \frac{1}{p\pi}\left((-1)^p - 1\right)$ $\Longrightarrow$ $A_p = \sqrt{a_p^2 + b_p^2} = \sqrt{0^2 + \left[\frac{1}{p\pi}\left((-1)^p - 1\right)\right]^2}$

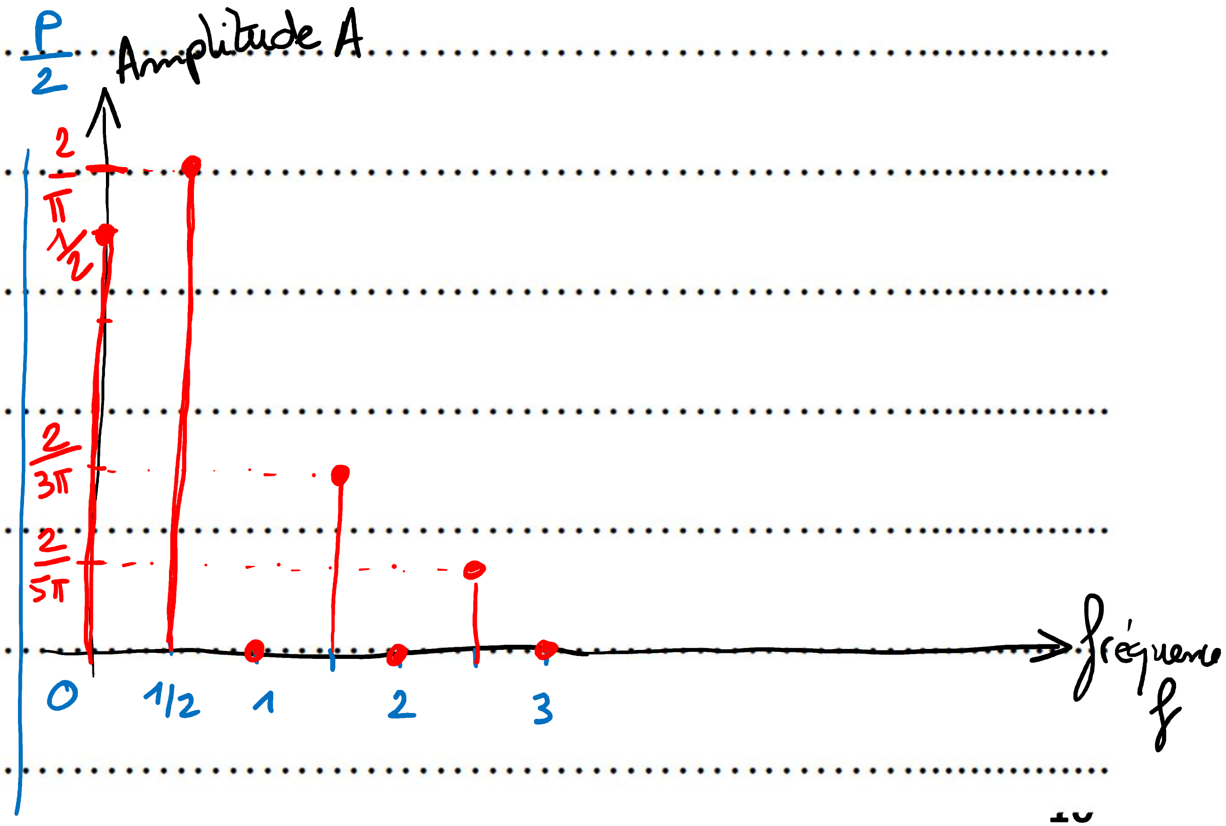
$$A_p = \left|\frac{1}{p\pi}\left((-1)^p - 1\right)\right|$$

fréquence de l'harmonique de rang p : $H_p(t) = a_p \cos(p\omega t) + b_p \sin(p\omega t)$

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{p.\omega}{2\pi} = \frac{p\pi}{2\pi} = \frac{p}{2}$$

$\to p.g$

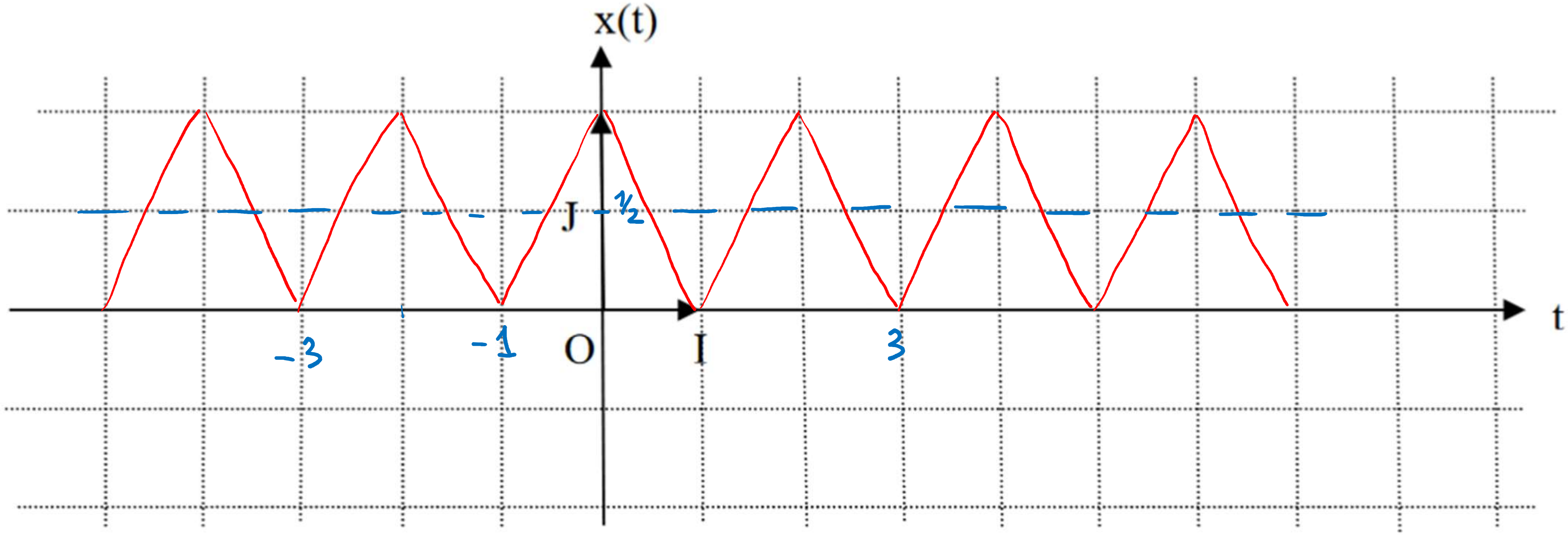
p	1	2	3	4	5	6
f_p	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
A_p	$\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{5\pi}$	0



II. Développement d'un signal triangle périodique en série de Fourier

1) Série de Fourier d'un signal triangle périodique

Soit x, la fonction de période 2, définie par : $x(t) = \begin{cases} 1 - t \text{ pour } t \in [0;1[\\ 1 + t \text{ pour } t \in [-1;0[\end{cases}$



i) Représenter le signal x. Déterminer T, ω et les coefficients de Fourier de x :

Notes

* $T = 2 \Rightarrow \omega = 2\pi \dfrac{1}{T} = \pi$

* x est paire donc $\boxed{b_p = 0 \ \forall p \in \mathbb{N}^*}$

* $\boxed{a_0 = \dfrac{1}{2}}$ par lecture graphique

* $a_p = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) . \cos(p\omega t)\, dt = \dfrac{2}{2} \int_{-1}^{1} \underbrace{x(t)}_{\text{paire}} \times \underbrace{\cos(p\pi t)}_{\text{paire}}\, dt = 2 \times \int_0^1 x(t) \cos(p\pi t) dt$

paire × paire = paire

$p \neq 0$ $\quad a_p = 2 \displaystyle\int_0^1 \underbrace{(1-t)}_{\text{pol.}} \underbrace{\cos(p\pi t)}_{\text{sin.}}\, dt$

ALPES

IPP : $\begin{cases} u = 1-t \\ v' = \cos(p\pi t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' = -1 \\ v = \dfrac{\sin(p\pi t)}{p\pi} \end{cases}$

$$\int_a^b u.v'\, dt = [u.v]_a^b - \int_a^b u'v\, dt$$

$$a_p = 2\left\{ \frac{1}{p\pi} \underbrace{\left[(1-t) . \sin(p\pi t) \right]_0^1}_{=0} + \frac{1}{p\pi} \int_0^1 \sin(p\pi t)\, dt \right\} = \frac{2}{p\pi} \left[- \frac{\cos(p\pi t)}{p\pi} \right]_0^1$$

$$a_p = \frac{2}{p^2\pi^2} \left(1 - \cos(p\pi) \right)$$

$$\boxed{a_p = \frac{2}{p^2\pi^2} \left(1 - (-1)^p \right) \ \forall p \in \mathbb{N}^*}$$

Page 17

Valeur moyenne du signal x : $a_0 = \frac{1}{2}$

Fondamental du signal x : $H_1(t) = a_1 \cos(\pi t) = \frac{4}{\pi^2} \cos(\pi t)$

Harmonique de rang 2 : $H_2(t) = 0$

Harmonique de rang 3 : $H_3(t) = \frac{4}{9\pi^2} \cos(3\pi t)$

Harmonique de rang p : $H_p(t) = 2 \cdot \frac{1-(-1)^p}{p^2\pi^2} \cos(p\pi t)$

ii) Ecrire la série de Fourier du signal x :

Page 17

$$S_x(t) = a_0 + \sum_{p \geq 1} a_p . \cos(p\pi t) + b_p \sin(p\pi t)$$

$$S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{p \geq 1} \frac{1-(-1)^p}{p^2} \cos(p\pi t)$$

Autre écriture : $S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{2}{1^2} \cos(\pi t) + 0 + \frac{2}{3^2} \cos(3\pi t) + \cdots \right)$

$$S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} . \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi t)}{(2k+1)^2}$$

2) Convergence de la série de Fourier du signal x (Théorème de Dirichlet)

Page 19

Hyp1 Sur $[0;2[$ x est continue

Hyp2 Sur $[0;2[$ x est dérivable sauf en 0 et 1 où

$x'(0^-)=1$; $x'(0^+)=-1$; $x'(1^-)=-1$; $x'(1^+)=1$ sont

finies

Conclusion La série de Fourier de x converge en tout $t\in\mathbb{R}$

et sa somme est :

$$S_x(t)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k\geq 0}\frac{\cos((2k+1)\pi t)}{(2k+1)^2}=x(t)\quad\forall t\in\mathbb{R}.$$

Quest Sup : en déduire la valeur de $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}$

3) Spectre du signal x

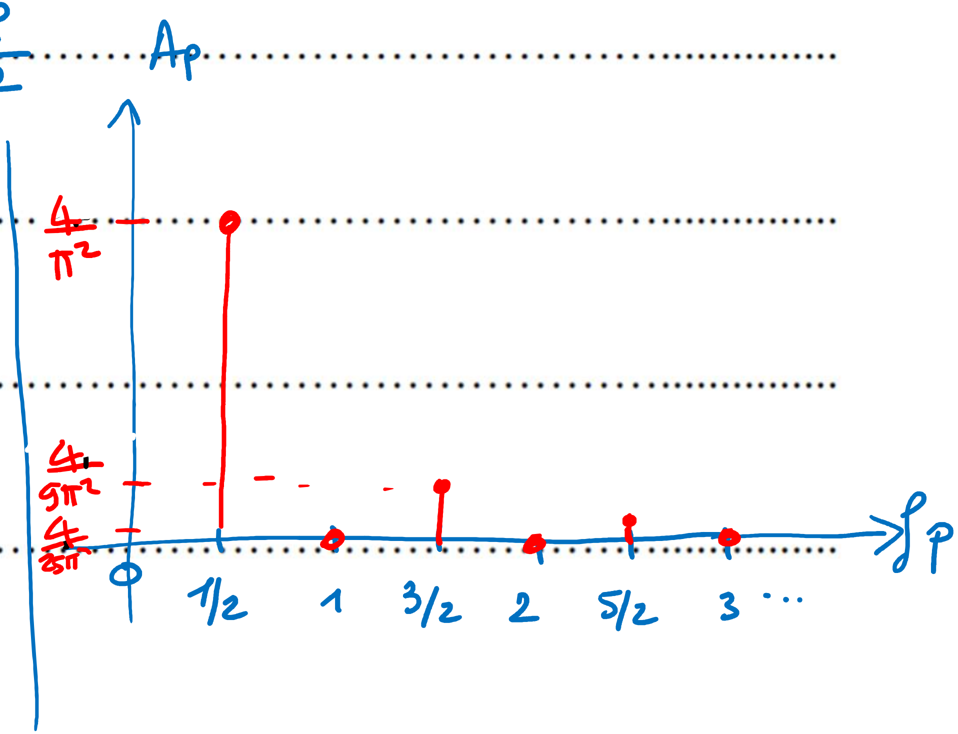
Page 19

$a_0 = \frac{1}{2}$ $\quad a_p = \frac{2}{p^2\pi^2}\left(1-(-1)^p\right)$ $\quad b_p = 0$ $\quad \forall p \in \mathbb{N}^*$.

$A_p = \sqrt{a_p^2+b_p^2} = \frac{2\left|1-(-1)^p\right|}{p^2\pi^2} = \frac{2\left(1-(-1)^p\right)}{p^2\pi^2}$ car $1-(-1)^p \geq 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$.

$\omega_p = p\pi$ donc $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{p\pi}{2\pi} = \frac{p}{2}$

p	1	2	3	4	5	6
f_p	$\frac{1}{2}$	1	$3/2$	2	$5/2$	3
A_p	$4/\pi^2$	0	$4/9\pi^2$	0	$4/25\pi^2$	0



Sur Mathcad : (1) Définir $m(t)$ le motif :

$$m(t) = \begin{cases} 1-t & \text{si} \quad 0 < t \leq 1 \\ 1+t & \text{si} \quad -1 \leq t \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < -1 \\ 0 & \text{si} \quad t > 1. \end{cases}$$

le tracer sur l'intervalle $[-3;3]$ avec un pas de 0,01.

" " "

(2) Définir $x(t) = m(t+2) + m(t) + m(t-2)$

(3) Dans un même repère, tracer x et la série de Fourier jusqu'au rang $p = 100$. Qu'observez-vous.

(4) Tracer le spectre de x. On définira $A_p = \dfrac{1}{p^2\pi^2}\left(1-(-1)^p\right)$ et p variera de 1 à 10.

III. Séries de Fourier complexes

Le terme général d'une série de Fourier est : $U_p(t) = a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)$.

En utilisant les formules d'Euler, on montre que U_p peut s'écrire sous la forme :

$U_p(t) = c_p e^{ip\omega t} + \overline{c_p} e^{-ip\omega t}$, en effet :

$$U_p(t) = a_p \frac{e^{ip\omega t} + e^{-ip\omega t}}{2} + b_p \frac{e^{ip\omega t} - e^{-ip\omega t}}{2i}$$

$$U_p(t) = \left(\frac{a_p}{2} + \frac{b_p}{2i} \times \frac{i}{i}\right) e^{ip\omega t} + \underbrace{\left(\frac{a_p}{2} - \frac{b_p}{2i} \frac{i}{i}\right)}_{= \overline{C_p}} e^{-ip\omega t}$$

$\to \frac{a_p + i b_p}{2}$

$i^2 = -1$! $\quad \overline{a+ib} = a - ib$

donc $c_p = \frac{a_p - i b_p}{2}$

Donc $U_p(t) = C_p e^{ip\omega t} + \overline{C_p} e^{-ip\omega t}$

On a alors : $c_p = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).e^{-ip\omega t}dt$ et $c_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt$ car :

p.8

$$C_p = \frac{a_p - ib_p}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}.\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\cos(p\omega t)\,dt - i.\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\sin(p\omega t)dt\right)$$

$$C_p = \frac{1}{T}\left(\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\cos(p\omega t)dt - i\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\sin(p\omega t)dt\right)$$

$$= \frac{1}{T}.\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\left(\cos(p\omega t) - i\sin(p\omega t)\right)dt$$

$$C_p = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).e^{-ip\omega t}dt$$

De plus, $\overline{c_p} = c_{-p}$, car :

$$\overline{C_p} = \overline{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, e^{-ip\omega t}\, dt} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \overline{x(t)\, e^{-ip\omega t}}\, dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \overline{\underbrace{x(t)}_{\in\mathbb{R}.}\, e^{-ip\omega t}}\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cdot \overline{e^{-ip\omega t}}\, dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, e^{ip\omega t}\, dt = C_{-p}$$

$$U_p(t) = C_p\, e^{ip\omega t} + C_{-p}\, e^{-ip\omega t}$$

On a alors : $a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)) = C_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} C_p e^{ip\omega t} + C_{-p} e^{-ip\omega t}$

Page 21

Soit : $S_x(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} C_p\, e^{ip\omega t}$

En résumé

On appelle <u>série de Fourier complexe</u> d'un signal x, T-périodique la série : $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t}$

où : $c_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).e^{-ik\omega t}dt$ **pour** $k \neq 0$ **et** $c_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt$ **avec** $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

On a alors les correspondances suivantes : $c_0 = a_0$ **et** $c_k = \frac{a_k - i.b_k}{2}$ **pour** $k \neq 0$.

III. Identité de Bessel-Parseval

Soit x une fonction T-périodique ($T = \frac{2\pi}{\omega}$) développable en série de Fourier :

$$x(t) = \sum_{p \geq 0} (a_p . \cos(p\omega t) + b_p . \sin(p\omega t))$$

On a alors la formule suivante : $\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)dt = a_0{}^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p{}^2 + b_p{}^2}{2}$

Ou encore, en utilisant les coefficients de Fourier complexes : $\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$

Interprétation physique

La formule de Parseval donne une relation entre les coefficients de Fourier d'une fonction x et le carré de sa valeur efficace.

$(x_{eff})^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)dt$ est l'énergie du signal x, et $E(U_n) = \dfrac{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}}{2}$ l'énergie de l'harmonique de rang n : $U_n(t) = a_n.\cos(n\omega t) + b_n.\sin(n\omega t)$.

La formule de Bessel-Parseval peut aussi s'interpréter en termes d'énergie :

$$\mathbf{E(x) = x_{moy}^{\ 2} + \sum_{n=1}^{\infty} E(u_n)}$$

Exemple / Exercice

Appliquer le théorème de Parseval au signal rectangle du paragraphe I.2.iv, puis en déduire la valeur de la série : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

$a_0 = \frac{1}{2}$ $a_p = 0$ $b_p = \frac{1}{p\pi}\left((-1)^p - 1\right)$

Identité de Parseval : $V_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} x^2(t)\,dt = a_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^2 + b_p^2}{2}$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{4} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{p^2\pi^2}\left((-1)^p - 1\right)^2}{2}$$

$V_{eff}^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\left((-1)^p - 1\right)^2}{p^2\pi^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2}\cdot\sum_{p\geq 1} \frac{\left((-1)^p - 1\right)^2}{p^2}$. Comme $\left((-1)^p - 1\right)^2 = 2\left(1 - (-1)^p\right)$,

alors :

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\cdot\sum_{p\geq 1} \frac{\left(1 - (-1)^p\right)}{p^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{2}{1^2} + 0 + \frac{2}{3^2} + 0 + \frac{2}{5^2} + 0 + \frac{2}{7^2} + \cdots\right)$$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\cdot\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Exercice MATH en déduire la valeur de $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$

On a de plus : $V^2_{eff} = \frac{1}{T} \cdot \int_{x_0}^{x_0+T} x^2(t)\,dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 x^2(t)\,dt$

$$V^2_{eff} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\int_0^1 0^2\,dt}_{0} + \int_1^2 1^2\,dt\right) = \frac{1}{2}\left[t\right]_1^2 = \frac{1}{2}.$$

Conclusion : $V^2_{eff} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$ $\iff$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \cdot S$

S ??

$\iff \frac{2}{\pi^2} S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$S = \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{8}.$

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$