Corrigé du DM2 S1
Questions 1 à 6
du test de 2020

<u>Question 1</u> Calculs de base

a) Puissances : Complétez

$A = 10^n \times 10^p = 10^{n+p} = 10^{n+p}$

$B = \dfrac{(10^5)^2 \times 10^7}{10^2} = \dfrac{10^{10} \times 10^7}{10^2} = \dfrac{10^{17}}{10^2} = 10^{15}$

$C = (2 \times 10^3)^4 \times 2^{-3} \times 10^5 = 2^4 \times 10^{12} \times 2^{-3} \times 10^5 = 2^1 \times 10^{17} = 2.10^{17}$

$D = 3.10^4 - 10^4 = 2 \times 10^4$

b) Fractions : Simplifiez les nombres et les expressions suivantes :

$$A = \frac{5\times 2}{\underbrace{9}_{5\times3\times3}} + \frac{3\times 3}{\underbrace{15}_{3\times5\times3}} = \frac{10+9}{45} = \frac{19}{45}$$

$$B = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{9}$$

$$C = \frac{\frac{2}{3}}{6} = \frac{\cancel{2}}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

$$6 = \cancel{2} \times 3$$

$$D = 1 + \frac{1-R}{1+R} = \frac{1+R+1-R}{1+R} = \frac{2}{1+R}, \text{ avec } R \neq -1$$

$$E = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{b+a}{ab}} = \frac{ab}{a+b}$$, avec $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a+b \neq 0$

$$F = \frac{xy+x}{x} = \frac{x(y+1)}{x} = y+1$$, avec $x \neq 0$

$$G = \frac{a^{-3}b^{4}c^{5}a^{-2}b^{2}c}{a^{-5}b^{5}(c^{3})^{2}} = \frac{a^{-5}b^{6}c^{6}}{a^{-5}b^{5}c^{6}} = b$$

avec $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

c) Racines carrées :

Simplifier : $A = \sqrt{8} - 5\sqrt{2} =$ $2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = -3\sqrt{2}$

$\sqrt{4\times2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Expliquer brièvement pourquoi :

$B = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ car : $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$C = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = -\sqrt{3} - \sqrt{2}$ car : $C = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}^2-\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3}$

$C = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{-1} \times \frac{(-1)}{(-1)}$ $(A-B)\times(A+B) = A^2 - B^2$

$C = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$

<u>Question 2</u> **Développements – factorisations - équations - inéquations**

a) Développez les formules suivantes où a et b sont des nombres réels :

$(a+b)^2 = $ $a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = $ $a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b).(a+b) = $ $a^2 - b^2$

$(a+b).(c+d) = $ $ac + ad + bc + bd$

$a + b.(c+d) = $ $a + bc + bd$

$x.(y + 1) + y - (x.y+1) = $ $xy + x + y - xy - 1 = x + y - 1$

b) Factorisez les expressions suivantes :

$A = 16x^2 - 4 = (4x)^2 - 2^2 = (4x-2)(4x+2)$

$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

$B = 5a - 3a(1+b) = a(5-3(1+b)) = a(5-3-3b) = a(2-3b)$

c) Résolvez les équations suivantes :

$\frac{\mathrm{R}+1}{2} = 5 \Leftrightarrow \mathrm{R}+1 = 10 \Leftrightarrow \mathrm{R} = 10-1 \Leftrightarrow \mathrm{R} = 9$

$\frac{\mathrm{R}-1}{\mathrm{R}+1} = 2$ avec $\mathrm{R} \neq -1 \Leftrightarrow \mathrm{R}-1 = 2(\mathrm{R}+1) \Leftrightarrow \mathrm{R}-1 = 2\mathrm{R}+2$

$\Leftrightarrow \mathrm{R}+3 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{R} = -3 \Leftrightarrow \mathrm{R} = -3$

$2t^2 - 3t - 2 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$

$\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = -2 \end{cases}$ $t_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+5}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$ et $t_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\dfrac{1}{2}$

$S = \left\{ 2 \,;\, -\dfrac{1}{2} \right\}$

d) Résolvez les inéquations suivantes :

$1 - 2R < 4 \Leftrightarrow -2R < 3 \Longleftrightarrow R > -\dfrac{3}{2}$ $S = \left]-\dfrac{3}{2} \,;\, +\infty\right[$

$2t^2 - 3t - 2 > 0$

t	$-\infty$		$-1/2$		2		$+\infty$
signe de $2t^2 - 3t - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = \left]-\infty \,;\, -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]2 \,;\, +\infty\right[$

Question 3 Equations de droite

a) Considérons dans un repère orthonormé du plan les points A et B dont les coordonnées sont : A(1;-2) et B(2;1).

Quelles sont alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$? $\overrightarrow{AB}\left(\overset{x_B-x_A}{1} ; \overset{y_B-y_A}{3}\right)$

Déterminez la distance du point A au point B : $AB = \sqrt{x_{\overrightarrow{AB}}^2 + y_{\overrightarrow{AB}}^2} = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

Quelles sont les coordonnées du point I, le milieu du segment $[A, B]$? $I\left(\overset{\frac{x_A+x_B}{2}}{\frac{3}{2}} ; \overset{\frac{y_A+y_B}{2}}{\frac{-1}{2}}\right)$

Déterminez l'équation de la droite (AB) $y = ax + b$

$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1+2}{2-1} = 3$

b ?? $A \in (AB) \Longleftrightarrow y_A = a x_A + b \Longleftrightarrow -2 = a + b \Longleftrightarrow b = -2 - a = -5$

$(AB) : y = 3x - 5.$

b) Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$

Méth 1 Par addition :

$\begin{cases} 2x - 5y = 3 & \times(3) & \times(4) \\ 3x + 4y = 11 & \times(-2) & \times(5) \end{cases}$

$+\begin{cases} 6x - 15y = 9 \\ -6x - 8y = -22 \end{cases}$ +

$-23y = -13$

$\Leftrightarrow \quad y = \dfrac{13}{23}$

$+\begin{cases} 8x - 20y = 12 \\ 15x + 20y = 55 \end{cases}$ +

$23x = 67$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{67}{23}$

$S = \left\{ \left(\dfrac{67}{23} ; \dfrac{13}{23} \right) \right\}$

b) Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x - 5y = 3 & (1) \\ 3x + 4y = 11 & (2) \end{cases}$

Méth 2 Par substitution : $(1) \Leftrightarrow x = \frac{3+5y}{2}$

$(2) \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{3+5y}{2} + 4y = 11$ $\times 2$

$\Leftrightarrow 3(3+5y) + 8y = 22$

$\Leftrightarrow 9 + 15y + 8y = 22$

$\Leftrightarrow 23y = 13$

$\Leftrightarrow y = \frac{13}{23}$

On remplace dans (1) : $x = \frac{1}{2}(3+5y) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{65}{23}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{69+65}{23}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{134}{23}$

$x = \frac{67}{23}$ $S = \left\{\left(\frac{67}{23} ; \frac{13}{23}\right)\right\}$

Question 4 Fonctions

a) Donnez deux exemples de fonctions paires : f(x) = x^2 ; g(x) = $\cos(x)$

b) Donnez deux exemples de fonctions impaires : f(x) = x^3 ; g(x) = $\sin(x)$

c) Donnez deux exemples de fonctions 2π – périodiques : f(x) = $\cos x$; g(x) = $\sin x$

d) Complétez les limites suivantes : $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

e) Complétez la formule de dérivation du quotient de u par v : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

....

f) Soit f une fonction définie par : $f(x) = e^x(5x+2)$
$U \cdot V$

1) Quel est l'ensemble de définition de f ? D_f = $\mathbb{R}$

2) Déterminer l'expression de la dérivée de f : $f'(x) = U' \cdot V + U \cdot V'$

$f'(x) = e^x(5x+2) + e^x \times 5 = e^x(5x+7)$

3) Etudier le signe de la dérivée de f : $f'(x) \geq 0 \iff \underbrace{e^x}_{>0}(5x+7) \geq 0$

$f'(x) \geq 0 \iff 5x+7 \geq 0 \iff x \geq -7/5$

4) Construire le tableau de variations de f , en explicitant les limites aux extrémités de D_f :

x	$-\infty$		$-7/5$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-5e^{-7/5}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(-7/5) = e^{-7/5}\Big(\underbrace{5 \times \frac{-7}{5}}_{-7} + 2\Big) = -5e^{-7/5}$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{x}(5x+2) = 0 \text{ car } e^{x} \text{ l'emporte}$$

5) Précisez les droites particulières facilitant le tracé de f (tangentes, asymptotes) :

* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ signifie que la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

* $f'(-7/5) = 0$ signifie que la courbe admet une tangente horizontale en $-7/5$.

<u>Question 5</u> Logarithme et exponentielle

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction logarithme népérien ? $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$

Quel est l'ensemble de définition de la fonction exponentielle ? $\mathbb{R}$

$e^{\ln x} = x \quad \forall x > 0$

b) Simplifiez les expressions suivantes : $A = \ln(1) = 0$

$\ln e^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$B = e^{2.\ln 5} = e^{\ln(5^2)} = 25$ $\qquad C = \frac{\ln(8)}{\ln(2)} = \frac{\ln(2^3)}{\ln 2} = \frac{3.\ln 2}{\ln 2} = 3$

$\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x \quad \forall x > 0$

$D = e^{2x} \times e^{3x} = e^{2x+3x} = e^{5x}$ $\qquad E = \frac{e^{2x}}{e^{3x}} = e^{2x-3x} = e^{-x}$ $\qquad F = \left(e^{2x}\right)^4 = e^{8x}$

c) Complétez : $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$; $\qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

d) Résolvez les équations suivantes :

$\ln(x) = \ln(2) + \ln(3) \Leftrightarrow$ ……………………………………

$\ln x = \ln 2 + \ln 3 \iff \ln x = \ln(2 \times 3) \iff \ln x = \ln 6 \iff x = 6$

$S = \{6\}$

$e^x = 2 \Leftrightarrow$ $\ln e^x = \ln 2 \iff x = \ln 2$

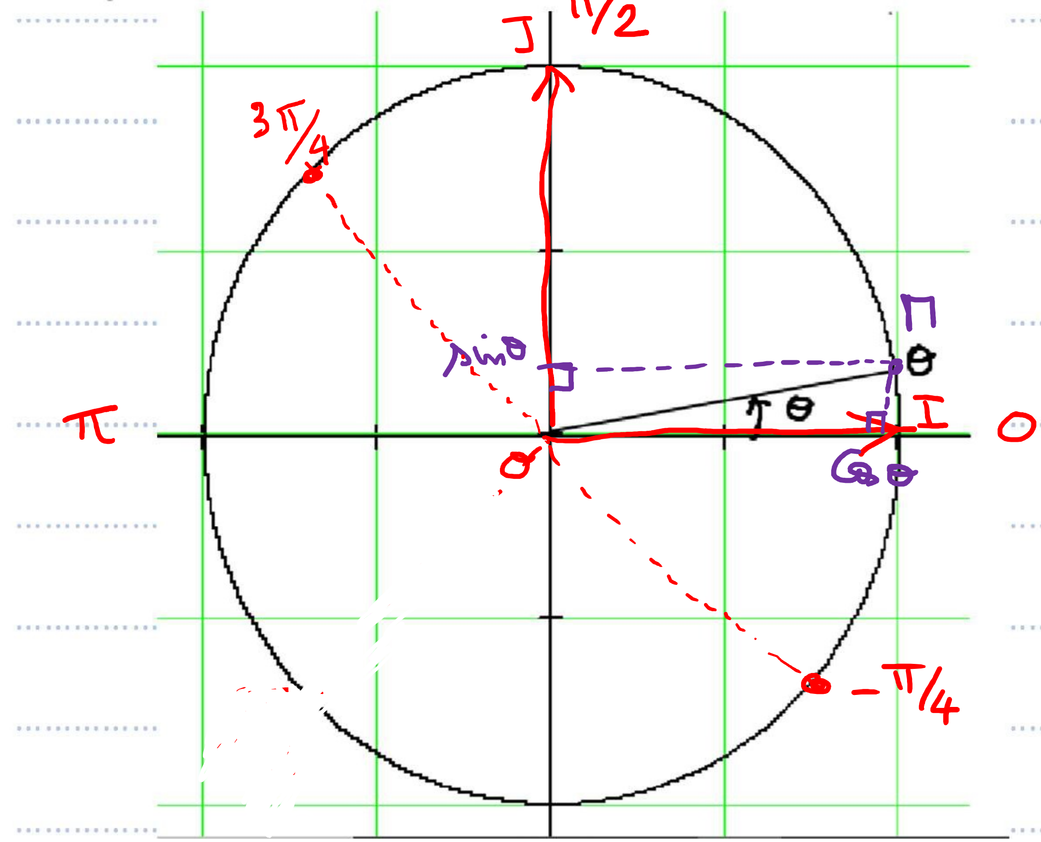
e) Résolvez les inéquations suivantes :

$\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow$ $e^{\ln x} \geqslant e^0 \iff x \geqslant 1.$

$e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow$ $\ln e^{-x} \leq \ln 1 \iff -x \leq 0 \iff x \geqslant 0$

Question 6 Trigonométrie

a) Complétez le cercle trigonométrique ci-après, placez les angles suivants : 0 ; π ; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{-\pi}{4}$, puis représentez $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ où θ est l'angle tracé ci-après.



Cosθ est l'abscisse de M

sinθ est l'ordonnée de M

b) Complétez : Pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = $ ……1……………………………

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = $ ……0…………………… ; $\cos(\pi) = $ ……-1……………………………

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = $ ……1…………………… ; $\sin(184\pi) = $ ……0……………………………

c) On considère un triangle ABC rectangle en B. Exprimer le cosinus de l'angle $\widehat{BCA}$ à l'aide des longueurs des côtés du triangle : $\cos(\widehat{BCA}) = \frac{\text{Côté adj}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}$

On pourra faire un schéma.