Table des matières

Liste des projets

Nous avons illustré la résolution du problème de Riemann pour deux systèmes de $p=2$ équations :

① le système de Saint-Venant

$$\begin{cases}\partial_t h + \partial_x (hv) = 0,\\ \partial_t (hv) + \partial_x \left(hv^2 + \frac{g}{2}h^2\right) = 0,\end{cases}$$

associé à 2 champs caractéristiques vraiment non-linéaires (les ondes associées à chacun de ces 2 champs ne peuvent être que des ondes de choc ou de détente) ;

② le système

$$\begin{cases}\partial_t \varrho + \partial_x u = 0,\\ \partial_t u + a^2 \partial_x \varrho = 0.\end{cases}$$

associé à 2 champs caractéristiques linéairement dégénérés (les ondes associées à chacun de ces 2 champs ne peuvent être que des discontinuités de contact).

Devoir maison : choisir un sujet parmi ceux proposés.

Pour le 11 novembre 2023 : déposer sur Moodle **un rapport** `pdf` **et un fichier** `py` **(ou un autre langage de programmation)**.

- **Rapport** : il s'agit de détailler la **solution exacte des problèmes de Riemann** associés au système hyperbolique donné (on pourra suivre le canevas utilisé pour le système de Saint-Venant).
- **Code source** : écrire un programme qui implémente un schéma d'approximation VF et le valider à l'aide de la **solution exacte** pour un problème de Riemann calculée au point précédent.

Projet 1. système de Saint-Venant par relaxation

$$\begin{cases}\partial_t h + \partial_x (hu) = 0,\\ \partial_t (hu) + \partial_x (hu^2 + \pi) = 0,\\ \partial_t (h\pi) + \partial_x (hu\pi + c^2 u) = \mu h\left(\frac{g}{2}h^2 - \pi\right),\end{cases}$$

Projet 2. modèle de Ripa

$$\begin{cases}\partial_t h + \partial_x (hu) = 0,\\ \partial_t (hu) + \partial_x \left(hu^2 + \frac{g}{2}h^2\theta\right) = 0,\\ \partial_t (h\theta) + \partial_x (hu\theta) = 0.\end{cases}$$

Projet 3. modèle de Ripa par relaxation

$$\begin{cases}\partial_t h + \partial_x(hu) = 0,\\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \pi\theta\right) = 0,\\ \partial_t(h\theta) + \partial_x(hu\theta) = 0,\\ \partial_t(h\pi) + \partial_x(hu\pi + c^2u) = \mu h\left(\frac{g}{2}h^2 - \pi\right),\end{cases}$$

Projet 4. système de Saint-Venant avec frottement

$$\begin{cases}\partial_t h + \partial_x(hu) = 0,\\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{g}{2}h^2\right) = mh.\end{cases}$$

Projet 5. p-système isotherme

$$\begin{cases}\partial_t\varrho + \partial_x(\varrho u) = 0,\\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u^2 + p(\varrho)) = 0,\end{cases} \qquad p(\varrho) = a^2\varrho.$$

Projet 6. p-système isotherme, relaxation en pression

$$\begin{cases}\partial_t\varrho + \partial_x(\varrho u) = 0,\\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u^2 + \pi) = 0,\\ \partial_t(\varrho\pi) + \partial_x(\varrho\pi u + c^2u) = \mu\varrho(p(\varrho) - \pi).\end{cases}$$

Projet 7. système de l'acoustique fortement non linéaire

$$\begin{cases}\partial_t\varrho + \partial_x(\varrho u) = 0,\\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u^2 + p(\varrho)) = 0,\\ \partial_t(\varrho v) + \partial_x(\varrho uv) = 0,\end{cases} \qquad p(\varrho) = a^2\varrho.$$

Projet 8. p-système isotherme en coordonnées Lagrangiennes

$$\begin{cases}\partial_t\tau - \partial_x u = 0,\\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = 0,\end{cases} \qquad p(\tau) = 1/\tau.$$

Projet 9. p-système isotherme en coordonnées Lagrangiennes, relaxation en pression :

$$\begin{cases}\partial_t\tau - \partial_x u = 0,\\ \partial_t u + \partial_x\pi = 0,\\ \partial_t\pi + \partial_x(c^2u) = \mu(p(\tau) - \pi).\end{cases}$$

Projet 10. système de l'acoustique fortement non linéaire en coordonnées Lagrangiennes

$$\begin{cases}\partial_t\tau - \partial_x u = 0,\\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = 0,\\ \partial_t v = 0,\end{cases} \qquad p(\tau) = a^2/\tau.$$

Projet 11. p-système isotherme avec frottement

$$\begin{cases}\partial_t\varrho + \partial_x(\varrho u) = 0,\\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u^2 + p(\varrho)) = m\varrho,\end{cases} \qquad p(\varrho) = a^2\varrho.$$

Projet 12. p-système isentrope

$$\begin{cases}\partial_t\varrho+\partial_x(\varrho u)=0,\\ \partial_t(\varrho u)+\partial_x(\varrho u^2+p(\varrho))=0,\end{cases}\qquad p(\varrho)=\varrho^\gamma.$$

Projet 13. p-système isentrope, relaxation en volume

$$\begin{cases}\partial_t\varrho+\partial_x(\varrho u)=0,\\ \partial_t(\varrho u)+\partial_x(\varrho u^2+\pi(\varrho,V))=0,\\ \partial_t(\varrho V)+\partial_x(\varrho uV)=\mu\varrho\left(\frac{1}{\varrho}-V\right),\end{cases}\qquad \pi(\varrho,V)=p\left(\frac{1}{V}\right)-a^2\left(\frac{1}{\varrho}-V\right)$$

Projet 14. mélange diphasique isentrope

$$\begin{cases}\partial_t\varrho+\partial_x(\varrho u)=0,\\ \partial_t(\varrho u)+\partial_x(\varrho u^2+p(\varrho,c))=0,\\ \partial_t(\varrho c)+\partial_x(\varrho uc)=0,\end{cases}\qquad p(\varrho,c)=(c\varrho)^2+((1-c)\varrho)^2.$$

Projet 15. p-système isentrope en coordonnées Lagrangiennes

$$\begin{cases}\partial_t\tau-\partial_x u=0,\\ \partial_t u+\partial_x p(\tau)=0,\end{cases}\qquad p(\tau)=\tau^{-\gamma}.$$

Projet 16. p-système isentrope en coordonnées Lagrangiennes, relaxation en volume

$$\begin{cases}\partial_t\tau-\partial_x u=0,\\ \partial_t u+\partial_x\pi(\tau,V)=0,\\ \partial_t V=\mu(\tau-V),\end{cases}$$

Projet 17. mélange diphasique isentrope en coordonnées Lagrangiennes

$$\begin{cases}\partial_t\tau-\partial_x u=0,\\ \partial_t u+\partial_x p(\tau,c)=0,\\ \partial_t c=0,\end{cases}\qquad p(\tau,c)=\left(\frac{c}{\tau}\right)^2+\left(\frac{1-c}{\tau}\right)^2.$$

Projet 18. p-système isentrope avec la loi d'état de Chaplygin

$$\begin{cases}\partial_t\varrho+\partial_x(\varrho u)=0,\\ \partial_t(\varrho u)+\partial_x(\varrho u^2+p(\varrho))=0,\end{cases}\qquad p(\varrho)=-\frac{A}{\varrho}.$$

Projet 19. p-système isentrope avec une loi d'état logarithmique

$$\begin{cases}\partial_t\varrho+\partial_x(\varrho u)=0,\\ \partial_t(\varrho u)+\partial_x(\varrho u^2+p(\varrho))=0,\end{cases}\qquad p(\varrho)=A\ln(\varrho).$$

Projet 20. modélisation des écoulements sanguins

$$\begin{cases}\partial_t A+\partial_x Q=0,\\ \partial_t Q+\partial_x\left(\frac{Q^2}{A}+eA^{3/2}\right)=0.\end{cases}$$

Projet 21. système de AW et RASCLE en ϱ-w

$$\begin{cases}\partial_t\varrho+\partial_x(w\varrho-w^2)=0,\\ \partial_t(w\varrho)+\partial_x(w^2\varrho-w\varrho^2)=0.\end{cases}$$

Projet 22. système de AW et RASCLE

$$\begin{cases}\partial_t\varrho+\partial_x(\varrho u)=0,\\ \partial_t\Big(\varrho\big(u+p(\varrho)\big)\Big)+\partial_x\Big(\varrho u\big(u+p(\varrho)\big)\Big)=0,\end{cases}$$

Projet 23. système uv

$$\begin{cases}\partial_t u+\partial_x\left(\dfrac{au}{u+v}\right)=0,\\ \partial_t v+\partial_x\left(\dfrac{bv}{u+v}\right)=0,\end{cases}$$

Projet 24. système uv bis

$$\begin{cases}\partial_t u+\partial_x\big((u^2+v^2)u\big)=0,\\ \partial_t v+\partial_x\big((u^2+v^2)v\big)=0,\end{cases}$$

Projet 25. modèle $\tau uv\pi$:

$$\begin{cases}\partial_t\tau-\partial_x u=0,\\ \partial_t u+\partial_x\pi=0,\\ \partial_t v+\frac{a}{b}\partial_x\pi=0\\ \partial_t\pi+ab\partial_x v=0.\end{cases}$$

1

Étude du système de Saint-Venant par relaxation

On se propose de remplacer le système de Saint-Venant par un système approché, dit *système de relaxation*, qui s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \pi) = 0, \\ \partial_t(h\pi) + \partial_x(hu\pi + c^2 u) = \mu h\left(\frac{g}{2}h^2 - \pi\right), \end{cases} \tag{1.1}$$

avec $\mu > 0$ un paramètre constant, $\pi(x,t) > 0$ une nouvelle variable dite "de relaxation" et $c > 0$ une constante.

Partie ① Montrer formellement que, lorsque le paramètre μ tend vers $+\infty$, on retrouve le système de Saint-Venant classique à partir du système (1.1).

Partie ② Désormais et pour tout ce qui suit on ne s'intéresse qu'à la structure différentielle de (1.1), c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte du terme source (*i.e.* on pose $\mu = 0$).

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{U}\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{H}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tels que le système (1.1) s'écrit $\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{Y} \equiv (h, u, \pi)$, montrer que le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{Y} + \mathbb{B}(\mathbf{Y})\partial_x \mathbf{Y} = \mathbf{0}, \qquad \mathbb{B}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} u & h & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{h} \\ 0 & \frac{c^2}{h} & u \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{Y})$, $\lambda_2(\mathbf{Y})$ et $\lambda_3(\mathbf{Y})$ de la matrice $\mathbb{B}(\mathbf{Y})$. Afin de fixer les notations on ordonne les valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{Y}) < \lambda_2(\mathbf{Y}) < \lambda_3(\mathbf{Y})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{Y})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{Y})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{Y})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les trois champs caractéristiques sont linéairement dégénérés. (Par conséquent, les ondes associées à chaque champ sont des discontinuités de contact).
5. Pour chaque champ $k = 1,2,3$, on a deux invariants de Riemann qu'on notera $\mathfrak{I}_k$ et J_k. Montrer qu'un choix possible est
   - pour le 1-champ : $\mathfrak{I}_1(\mathbf{Y}) = u - \frac{c}{h}$, $\mathrm{J}_1(\mathbf{Y}) = \pi + \frac{c^2}{h}$,
   - pour le 2-champ : $\mathfrak{I}_2(\mathbf{Y}) = u$, $\mathrm{J}_2(\mathbf{Y}) = \pi$,
   - pour le 3-champ : $\mathfrak{I}_3(\mathbf{Y}) = u + \frac{c}{h}$, $\mathrm{J}_3(\mathbf{Y}) = \pi + \frac{c^2}{h}$.
6. *Étude des discontinuités de contact.*
   Pour chaque k-onde, calculer $\dot{\sigma}_k$ la vitesse de propagation de la k-onde.
   En utilisant les invariants de Riemann et les relations de Rankine-Hugoniot,

- montrer que u et π sont constants dans une 2-onde,
- trouver une relation entre un état gauche $\mathbf{Y}_L$ et un état droit $\mathbf{Y}_*$ séparés par la 1-onde,
- trouver une relation entre un état gauche $\mathbf{Y}_\heartsuit$ et un état droit $\mathbf{Y}_R$ séparés par la 3-onde.

7. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche $\mathbf{Y}_L$ et un état droit $\mathbf{Y}_R$ on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires $\mathbf{Y}_1$ et $\mathbf{Y}_2$. On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes.

2

Étude du système de Ripa

Les équations des eaux peu profondes sont utilisées pour simuler un grand nombre de phénomènes physiques, tels que les courants dans les estuaires, la propagation des forages et les vagues d'inondation dans les déferlements et les tsunamis. Le modèle de Ripa contient les équations des eaux peu profondes et des termes qui rendent compte des gradients de température horizontaux.

Le système de Ripa unidimensionnel avec une topographie de fond plat a la forme suivante

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{g}{2}h^2\theta\right) = 0, \\ \partial_t(h\theta) + \partial_x(hu\theta) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

avec $h(x,t) > 0$ la hauteur de l'eau, $u(x,t) \in \mathbb{R}$ la vitesse horizontale, $\theta(x,t) > 0$ la température et $g > 0$ est l'accélération due à la gravité.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} \equiv (h, u, \theta)$, montrer que le système (2.1) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W})\partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\mathbb{A}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} u & h & 0 \\ g\theta & u & \frac{g}{2}h \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$, $\lambda_2(\mathbf{W})$ et $\lambda_3(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les trois valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W}) < \lambda_3(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les champs 1 et 3 sont vraiment non linéaires tandis que le champ 2 est linéairement dégénéré.
5. Pour chaque champ k on a deux invariants de Riemann qu'on notera $\mathfrak{I}_k(\mathbf{W})$ et $\mathrm{J}_k(\mathbf{W})$. Montrer qu'un choix possible est :
   - pour le 1-champ : $\mathfrak{I}_1(\mathbf{W}) = \theta$ et $\mathrm{J}_1(\mathbf{W}) = u + 2a(h,\theta)$;
   - pour le 2-champ : $\mathfrak{I}_2(\mathbf{W}) = u$ et $\mathrm{J}_2(\mathbf{W}) = \frac{g}{2}h^2\theta$;
   - pour le 3-champ : $\mathfrak{I}_3(\mathbf{W}) = \theta$ et $\mathrm{J}_3(\mathbf{W}) = u - 2a(h,\theta)$,

   ayant noté $a(h,\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{gh\theta}$. Remarquons que $\dfrac{\partial a(h,\theta)}{\partial h} = \sqrt{g\theta}\dfrac{1}{2\sqrt{h}} = \dfrac{\sqrt{gh\theta}}{h} = \dfrac{a(h,\theta)}{2h}$.
6. *Étude des détentes.*
   6.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, u_L, \theta_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (h_*, u_*, \theta_*)$. Montrer que $\theta_* = \theta_L$, $u_* > u_L$, $h_* < h_L$. Exprimer u_* en fonction de h_L, u_L et h_* et tracer son graphe dans le plan (h,u). Calculer enfin $\mathbf{W}$ dans la 1-détente.

   6.2. Reprendre la question pour la troisième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit = (h_\heartsuit, u_\heartsuit, \theta_\heartsuit)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (h_R, u_R, \theta_R)$.

7. *Étude des chocs.*
   7.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, u_L, \theta_L)$ à un état droit $\mathbf{W} = (h_*, u_*, \theta_*)$. Montrer que $\theta_* = \theta_L$, $u_* < u_L$, $h_* > h_L$. Exprimer u_* en fonction de h_L, u_L et h_* et tracer son graphe dans le plan (h, u).
   7.2. Reprendre la question pour la troisième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit = (h_\heartsuit, u_\heartsuit, \theta_\heartsuit)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (h_R, u_R, \theta_R)$.
8. *Étude de la discontinuité de contact.*
   Soit une onde de la deuxième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_* = (h_*, u_*, \theta_*)$ à un état droit $\mathbf{W}_\heartsuit = (h_\heartsuit, u_\heartsuit, \theta_\heartsuit)$. Montrer que $u_\heartsuit = u_*$ et $h_\heartsuit^2\theta_\heartsuit = h_*^2\theta_*$. Quelle est la vitesse de déplacement $\dot{\sigma}_2$ de cette discontinuité ?
9. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (h_L, u_L, θ_L) et un état droit (h_R, u_R, θ_R) on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires (h_*, u_*, θ_*) et $(h_\heartsuit, u_\heartsuit, \theta_\heartsuit)$. On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes.

3

Étude du système de Ripa par relaxation

Le système de Ripa unidimensionnel avec une topographie de fond plat a la forme suivante

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{g}{2}h^2\theta\right) = 0, \\ \partial_t(h\theta) + \partial_x(hu\theta) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $h(x,t) > 0$ la hauteur de l'eau, $u(x,t) \in \mathbb{R}$ la vitesse horizontale, $\theta(x,t) > 0$ la température et $g > 0$ est l'accélération due à la gravité.

Le caractère vraiment non linéaire des champs caractéristiques peut rendre la resolution du problème de Riemann assez compliquée. On se propose alors de le remplacer par un système approché, dit *système de relaxation*, qui s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \pi\theta\right) = 0, \\ \partial_t(h\theta) + \partial_x(hu\theta) = 0, \\ \partial_t(h\pi) + \partial_x(hu\pi + c^2 u) = \mu h\left(\frac{g}{2}h^2 - \pi\right), \end{cases} \tag{3.2}$$

avec $\mu > 0$ un paramètre constant, $c > 0$ une nouvelle constante et $\pi(x,t) > 0$ une nouvelle variable dite "de relaxation".

Partie ① Montrer formellement que, lorsque le paramètre μ tend vers $+\infty$, on retrouve le système de Ripa classique (3.1).

Partie ② Désormais et pour tout ce qui suit on ne s'intéresse qu'à la structure différentielle de (3.2), c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte du terme source (*i.e.* on pose $\mu = 0$).

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ et $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} \equiv (h, u, \theta, \pi)$, montrer que le système (3.2) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W})\partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit
$$\begin{pmatrix} u & h & 0 & 0 \\ 0 & u & \frac{\pi}{h} & \frac{\theta}{h} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \frac{c^2}{h} & 0 & u \end{pmatrix}.$$
3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$, $\lambda_2(\mathbf{W})$ (double) et $\lambda_3(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les trois valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W}) < \lambda_3(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$, $\mathbf{r}_{2a}(\mathbf{W})$, $\mathbf{r}_{2b}(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est hyperbolique.
4. Vérifier que les trois champs sont linéairement dégénérés.

5. Pour les champs $k=1$ et $k=3$ on a trois invariants de Riemann qu'on notera $\mathfrak{I}_k(\mathbf{W})$ $\mathrm{J}_k(\mathbf{W})$ et $\mathfrak{K}_k(\mathbf{W})$. Pour le champ $k=2$ on a deux invariants de Riemann qu'on notera $\mathfrak{I}_2(\mathbf{W})$ et $\mathrm{J}_2(\mathbf{W})$. Montrer qu'un choix possible est :
   - pour le 1-champ : $\mathfrak{I}_1(\mathbf{W})=\theta$, $\mathrm{J}_1(\mathbf{W})=u-a(h,\theta)$, $\mathfrak{K}_1(\mathbf{W})=\pi+\frac{c^2}{h}$;
   - pour le 2-champ : $\mathfrak{I}_2(\mathbf{W})=u$ et $\mathrm{J}_2(\mathbf{W})=\ln(\theta)+\ln(\pi)$;
   - pour le 3-champ : $\mathfrak{I}_3(\mathbf{W})=\theta$, $\mathrm{J}_3(\mathbf{W})=u+a(h,\theta)$, $\mathfrak{K}_3(\mathbf{W})=\pi+\frac{c^2}{h}$;

   ayant noté $a(h,\theta)\stackrel{\text{def}}{=}\dfrac{c\sqrt{\theta}}{h}$. Remarquons que $\dfrac{\partial a(h,\theta)}{\partial h}=\dfrac{(c\sqrt{\theta})}{h^2}=-\dfrac{a(h,\theta)}{h}$.
6. *Étude des discontinuités de contact.*
   Pour chaque k-onde, calculer $\dot{\sigma}_k$ les vitesses de propagation de la k-onde.
   En utilisant les invariants de Riemann et les relations de Rankine-Hugoniot,
   - trouver une relation entre un état gauche $\mathbf{W}_L$ et un état droit $\mathbf{W}_*$ séparés par la 1-onde,
   - trouver une relation entre un état gauche $\mathbf{W}_*$ et un état droit $\mathbf{W}_\heartsuit$ séparés par la 2-onde,
   - trouver une relation entre un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit$ et un état droit $\mathbf{W}_R$ séparés par la 3-onde.
7. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (h_L,u_L,θ_L,π_L) et un état droit (h_R,u_R,θ_R,π_R) on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires (h_*,u_*,θ_*,π_*) et $(h_\heartsuit,u_\heartsuit,\theta_\heartsuit,\pi_\heartsuit)$. On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes.

4

Étude du système de Saint-Venant avec une loi de frottement de type Mohr-Coulomb

On modifie les équations de Saint-Venant pour prendre en compte une loi de frottement de type Mohr-Coulomb. Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement peuvent être écrites comme suit

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{g}{2}h^2\right) = mh, \end{cases} \qquad \text{avec } x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{4.1}$$

Les inconnues sont $h(x,t) \geq 0$, la profondeur de l'écoulement mesurée perpendiculairement au plan, et $u(x,t) \in \mathbb{R}$, la vitesse moyenne de l'écoulement en profondeur ; $g > 0$ est l'accélération gravitationnelle et m l'accélération constante résultant de la somme des forces dues à la gravité et au frottement. Si $m \geq 0$ et $u \geq 0$, le système peut représenter par exemple un écoulement granulaire sur un plan incliné recouvert ou non d'une couche de matériau constituée du même matériau que la masse granulaire qui s'écoule.

Partie ① Montrer que (h,u) est une solution régulière du système autonome non homogène (4.1) ssi (h,v) est solution du système non-autonome homogène suivant :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(h(v+mt)) = 0, \\ \partial_t(hv) + \partial_x\left(hv(v+mt) + \frac{g}{2}h^2\right) = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

ayant noté $v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) - mt$.

Partie ② Désormais et pour tout ce qui suit on ne s'intéresse qu'au système (4.2) en variable h et v.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}, t) = \mathbf{0}$. On remarquera que le flux dépend explicitement du temps : on dit que le système n'est pas autonome.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} \equiv (h,v)$, montrer que le système (4.2) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W},t)\partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W},t)$ s'écrit

   $$\mathbb{A}(\mathbf{W},t) = \begin{pmatrix} v+mt & h \\ g & v+mt \end{pmatrix}.$$

   On remarquera que la matrice dépend explicitement du temps.
3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W},t)$ et $\lambda_2(\mathbf{W},t)$. Afin de fixer les notations on ordonne les valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W},t) < \lambda_2(\mathbf{W},t)$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W},t)$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.

   On remarquera que les valeurs propres dépendent explicitement du temps, mais pas les vecteurs propres.

4. Vérifier que les champs sont vraiment non linéaires.
5. Pour chaque champ k on a un invariant de Riemann qu'on notera $\mathfrak{I}_k(\mathbf{W})$. Montrer qu'un choix possible est :
   - pour le 1-champ : $\mathfrak{I}_1(\mathbf{W}) = v + 2a(h)$;
   - pour le 2-champ : $\mathfrak{I}_2(\mathbf{W}) = v - 2a(h)$

   ayant noté $a(h) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{gh}$.

   On remarquera que les invariants de Riemann ne dépendent pas explicitement du temps.
6. *Étude des détentes.*

   On cherche les états gauche $\mathbf{W}_g = (h_g, v_g)$ qui peuvent être reliés à un état droit $\mathbf{W}_d = (h_d, v_d)$ par une onde de détente. La k-détente est comprise entre la courbe dont la vitesse est $x'(t) = \lambda_k(\mathbf{W}_g, t)$ et la courbe dont la vitesse est $x'(t) = \lambda_k(\mathbf{W}_d, t)$. Puisque les valeurs propres dépendent explicitement du temps, les courbes de détente ne sont plus des droites de pente la valeur propre mais des paraboles (il faut intégrer l'équation différentielle pour obtenir $t \mapsto x(t)$).

   6.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, v_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$. Montrer que $v_* > v_L$, $h_* < h_L$. Exprimer v_* en fonction de h_L, v_L et h_* et tracer son graphe dans le plan (h, v). Calculer enfin $\mathbf{W}$ dans la 1-détente.

   6.2. Reprendre la question pour la deuxième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (h_R, v_R)$.
7. *Étude des chocs.*

   On cherche les états gauche $\mathbf{W}_g = (h_g, v_g)$ qui peuvent être reliés à un état droit $\mathbf{W}_d = (h_d, v_d)$ par une onde de choc. La vitesse du choc vérifie $x'(t) = \dot{\sigma}_k(\mathbf{W}_g, \mathbf{W}_d ro, t)$. Puisque elle dépende explicitement du temps, les courbes de choc ne sont plus des droites mais des paraboles (il faut intégrer l'équation différentielle pour obtenir $t \mapsto x(t)$).

   7.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, v_L)$ à un état droit $\mathbf{W} = (h_*, v_*)$. Montrer que $v_* < v_L$, $h_* > h_L$. Exprimer v_* en fonction de h_L, v_L et h_* et tracer son graphe dans le plan (h, v).

   7.2. Reprendre la question pour la deuxième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_* = (h_*, v_*)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (h_R, v_R)$.
8. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (h_L, v_L) et un état droit (h_R, v_R) on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire (h_*, v_*). On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes.

On observe que, sous l'influence d'une force externe constante, les courbes caractéristiques, les raréfactions et les ondes de choc prennent des formes paraboliques. De plus, lorsque la force externe constante disparaît, les solutions convergent vers les solutions correspondantes du système de Saint-Venant classique.

5

Étude du p-système isotherme

On note $\varrho(x,t) > 0$ la densité et $u(x,t)$ la vitesse du fluide. Soit $p(\varrho) > 0$ la pression du gaz. Si la température est constante, la loi des gaz parfaits se réduit à

$$p(\varrho) = a^2\varrho$$

où $a > 0$ est une constante (c'est la vitesse du son et l'on a $a^2 = RT$).

En dimension un d'espace, on modélise ce type d'écoulements par le p-système :

$$\begin{cases} \partial_t\varrho + \partial_x(\varrho u) = 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u^2 + p(\varrho)) = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}(\mathbf{V})\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t\mathbf{V} + \partial_x\mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\varrho, u)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasilinéaire $\partial_t\mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W})\partial_x\mathbf{W} = \mathbf{0}$.
   Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit
   $$\begin{pmatrix} u & \varrho \\ \frac{a^2}{\varrho} & u \end{pmatrix}.$$
3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les deux champs sont vraiment non linéaires.
5. On notera $\mathfrak{I}_k$ l'invariant de Riemann du ke champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est $\mathfrak{I}_1 = u + a\ln(\varrho)$ et $\mathfrak{I}_2 = u - a\ln(\varrho)$.
6. *Étude des détentes.*
   6.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\varrho_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, u_*)$. Montrer que $u_* > u_L$ et $\varrho_* < \varrho_L$. Exprimer u_* en fonction de ϱ_L, u_L et ϱ_* et tracer son graphe dans le plan (ϱ, u). Calculer enfin $\mathbf{W}$ dans la 1-détente.
   6.2. Reprendre la question pour la deuxième famille.
7. *Étude des choc.*
   7.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\varrho_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, u_*)$. Montrer que $u_* < u_L$ et $\varrho_* < \varrho_L$. Exprimer u_* en fonction de ϱ_L, u_L et ϱ_* et tracer son graphe dans le plan (ϱ, u).
   7.2. Reprendre la question pour la deuxième famille.
8. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (ϱ_L, u_L) et un état droit (ϱ_R, u_R) on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire (ϱ_*, u_*). On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes de détente.

6

Étude du p-système isotherme par relaxation en pression

On considère le système de la dynamique des gaz isotherme en une dimension d'espace

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) = 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u^2 + p(\varrho)) = 0, \end{cases} \tag{6.1}$$

avec une loi d'état $p(\varrho)$. On note $\varrho(x,t) > 0$ la densité et $u(x,t) \in \mathbb{R}$ la vitesse du fluide. Lorsque le fluide n'est pas un gaz parfait, le caractère vraiment non linéaire des champs caractéristiques rend la résolution du problème de Riemann assez compliquée. C'est pourquoi il a été proposé de le remplacer par un système approché, dit *système de relaxation*, qui s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) = 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u^2 + \pi) = 0, \\ \partial_t(\varrho \pi) + \partial_x(\varrho \pi u + c^2 u) = \mu \varrho \left(p(\varrho) - \pi\right), \end{cases} \tag{6.2}$$

avec $\mu > 0$ un paramètre constant, $\pi(x,t) > 0$ une nouvelle variable dite *pression de relaxation* et $c > 0$ une nouvelle constante.

Partie ① Montrer formellement que, lorsque le paramètre μ tend vers $+\infty$, alors on retrouve le système (6.1) à partir du système (6.2) (et on aura $\pi = p(\varrho)$).

Partie ② Désormais et pour tout ce qui suit on ne s'intéresse qu'à la structure différentielle de (6.2), c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte du terme source (*i.e.* on pose $\mu = 0$).

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{U}\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{H}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tels que le système (6.2) s'écrit $\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{Y} \equiv (\varrho, u, \pi)$, montrer que le système (6.2) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{Y} + \mathbb{B}(\mathbf{Y}) \partial_x \mathbf{Y} = \mathbf{0}, \qquad \mathbb{B}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} u & \varrho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\varrho} \\ 0 & \frac{c^2}{\varrho} & u \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{Y})$, $\lambda_2(\mathbf{Y})$ et $\lambda_3(\mathbf{Y})$ de la matrice $\mathbb{B}(\mathbf{Y})$. Afin de fixer les notations on ordonne les valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{Y}) < \lambda_2(\mathbf{Y}) < \lambda_3(\mathbf{Y})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{Y})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{Y})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{Y})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les trois champs caractéristiques sont linéairement dégénérés. (Par conséquent, les ondes associées à chaque champ sont des discontinuités de contact).

5. Pour chaque champ $k=1,2,3$, on a deux invariants de Riemann qu'on notera $\mathfrak{I}_k$ et J_k. Montrer qu'un choix possible est

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{I}_1(\mathbf{Y}) &= \pi + cu, & \mathrm{J}_1(\mathbf{Y}) &= \pi + \frac{c^2}{\varrho},\\
\mathfrak{I}_2(\mathbf{Y}) &= u, & \mathrm{J}_2(\mathbf{Y}) &= \pi,\\
\mathfrak{I}_3(\mathbf{Y}) &= \pi - cu, & \mathrm{J}_3(\mathbf{Y}) &= \pi + \frac{c^2}{\varrho}.
\end{aligned}
$$

6. *Étude des discontinuités de contact.*
   Pour chaqua k-onde, calculer $\dot{\sigma}_k$ les vitesses de propagation de la k-onde.
   En utilisant les invariants de Riemann et les relations de Rankine-Hugoniot,
   - montrer que u et π sont constants dans une 2-onde,
   - trouver une relation entre un état gauche $\mathbf{Y}_L$ et un état droit $\mathbf{Y}_*$ séparés par la 1-onde,
   - trouver une relation entre un état gauche $\mathbf{Y}_\heartsuit$ et un état droit $\mathbf{Y}_R$ séparés par la 3-onde.
7. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche $\mathbf{Y}_L$ et un état droit $\mathbf{Y}_R$ on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires $\mathbf{Y}_1$ et $\mathbf{Y}_2$. On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes.

7

Étude du système de l'acoustique fortement non linéaire

On se donne une constante $a > 0$ strictement positive. Le système de l'acoustique non linéaire s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) = 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u^2 + a^2 \varrho) = 0, \\ \partial_t(\varrho v) + \partial_x(\varrho u v) = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

d'inconnues $\varrho(x,t) > 0$ la densité, $u(x,t)$ la vitesse normale et $v(x,t)$ la vitesse tangentielle.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\varrho, u, v)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forma quasilinéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W})\partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} u & \varrho & 0 \\ \frac{a^2}{\varrho} & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$, $\lambda_2(\mathbf{W})$ et $\lambda_3(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les trois valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W}) < \lambda_3(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les champs 1 et 3 sont vraiment non linéaires tandis que le champ 2 est linéairement dégénéré.
5. Pour chaque champ k on a deux invariants de Riemann qu'on notera $\mathfrak{I}_k(\mathbf{W})$ et $\mathrm{J}_k(\mathbf{W})$. Montrer qu'un choix possible est :
   - pour le 1-champ : $\mathfrak{I}_1(\mathbf{W}) = v$ et $\mathrm{J}_1(\mathbf{W}) = u + a\ln(\varrho)$;
   - pour le 2-champ : $\mathfrak{I}_2(\mathbf{W}) = u$ et $\mathrm{J}_2(\mathbf{W}) = \varrho$;
   - pour le 3-champ : $\mathfrak{I}_3(\mathbf{W}) = v$ et $\mathrm{J}_3(\mathbf{W}) = u - a\ln(\varrho)$.
6. *Étude des détentes.*
   6.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\varrho_L, u_L, v_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, u_*, v_*)$. Montrer que $v_* = v_L$, $u_* > u_L$, $\varrho_* < \varrho_L$. Exprimer u_* en fonction de ϱ_L, u_L et ϱ_*. Calculer enfin $\mathbf{W}$ dans la 1-détente.
   6.2. Reprendre la question pour la troisième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit = (\varrho_\heartsuit, u_\heartsuit, v_\heartsuit)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (\varrho_R, u_R, v_R)$.
7. *Étude des chocs.*
   7.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\varrho_L, u_L, v_L)$ à un état droit $\mathbf{W} = (\varrho_*, u_*, v_*)$. Montrer que $v_* = v_L$, $u_* < u_L$, $\varrho_* > \varrho_L$. Exprimer u_* en fonction de ϱ_L, u_L et ϱ_*.
   7.2. Reprendre la question pour la troisième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit = (\varrho_\heartsuit, u_\heartsuit, v_\heartsuit)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (\varrho_R, u_R, v_R)$.

8. *Étude de la discontinuité de contact.*
   Soit une onde de la deuxième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, u_*, v_*)$ à un état droit $\mathbf{W}_\heartsuit = (\varrho_\heartsuit, u_\heartsuit, v_\heartsuit)$. Montrer que $u_\heartsuit = u_*$ et $\varrho_\heartsuit = \varrho_*$. Quelle est la vitesse de déplacement $\dot{\sigma}_2$ de cette discontinuité ?
9. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (ϱ_L, u_L, v_L) et un état droit (ϱ_R, u_R, v_R) on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires (ϱ_*, u_*, v_*) et $(\varrho_\heartsuit, u_\heartsuit, v_\heartsuit)$. On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes.

8

Étude du p-système isotherme en coordonnées Lagrangiennes

On considère le système des équations d'Euler en régime isotherme en coordonnées Lagrangiennes

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x (p(\tau)) = 0, \end{cases} \qquad \text{avec } p(\tau) = \frac{1}{\tau} \tag{8.1}$$

où on a noté $\tau(t,x) > 0$ le volume spécifique et $u(t,x) \in \mathbb{R}$ est la vitesse du fluide.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{W}\colon \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}$.
2. Pour des solutions régulières, le système se réécrit sous la forma quasilinéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{\tau^2} & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\{\mathbf{r}_1(\mathbf{W}), \mathbf{r}_2(\mathbf{W})\}$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les deux champs sont vraiment non linéaires.
5. On note $\mathfrak{I}_k$ l'invariant de Riemann du k^{e} champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est $\mathfrak{I}_1 = u - \ln(\tau)$ et $\mathfrak{I}_2 = u + \ln(\tau)$.
6. *Étude des détentes.*
   6.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\tau_*, u_*)$. Montrer que $u_* > u_L$ et $\tau_* > \tau_L$. Exprimer u_* en fonction de τ_L, u_L et τ_* et tracer son graphe dans le plan (τ, u). Calculer enfin $\mathbf{W}$ dans la 1-détente.
   6.2. Reprendre la question pour la deuxième famille.
7. *Étude des choc.*
   7.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\tau_*, u_*)$. Montrer que $u_* < u_L$ et $\tau_* > \tau_L$. Exprimer u_* en fonction de τ_L, u_L et τ_* et tracer son graphe dans le plan (τ, u).
   7.2. Reprendre la question pour la deuxième famille.
8. À l'aide du dessin d'onde dans le plan (τ, u) résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (τ_L, u_L) et un état droit (τ_R, u_R) on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire (τ_*, u_*). On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes de détente.

9

Étude du p-système isotherme en coordonnées Lagrangiennes par relaxation en pression

On considère le système de la dynamique des gaz isotherme en une dimension d'espace en coordonnées Lagrangiennes

$$\begin{cases}\partial_t \tau - \partial_x u = 0,\\ \partial_t u + \partial_x(p(\tau)) = 0,\end{cases} \tag{9.1}$$

avec une loi d'état $p(\tau)$. On note $\tau(x,t) > 0$ le volume et $u(x,t) \in \mathbb{R}$ la vitesse du fluide. Lorsque le fluide n'est pas un gaz parfait, le caractère vraiment non linéaire des champs caractéristiques rend la résolution du problème de Riemann assez compliquée. C'est pourquoi il a été proposé de le remplacer par un système approché, dit *système de relaxation*, qui s'écrit

$$\begin{cases}\partial_t \tau - \partial_x u = 0,\\ \partial_t u + \partial_x \pi = 0,\\ \partial_t \pi + \partial_x(c^2 u) = \mu(p(\tau) - \pi)\end{cases} \tag{9.2}$$

avec $\mu > 0$ un paramètre constant, $\pi(x,t) > 0$ une nouvelle variable dite *pression de relaxation* et $c > 0$ une nouvelle constante.

Partie ① Montrer formellement que, lorsque le paramètre μ tend vers $+\infty$, alors on retrouve le système (9.1) à partir du système (9.2) (et on aura $\pi = p(\tau)$).

Partie ② Désormais et pour tout ce qui suit on ne s'intéresse qu'à la structure différentielle de (9.2), c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte du terme source (*i.e.* on pose $\mu = 0$).

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{U}\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{H}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tels que le système (9.2) s'écrit $\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{Y} \equiv (\varrho, u, \pi)$, montrer que le système (9.2) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{Y} + \mathbb{B}(\mathbf{Y})\partial_x \mathbf{Y} = \mathbf{0}, \qquad \mathbb{B}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & c^2 & 0\end{pmatrix}. \tag{9.3}$$

3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{Y})$, $\lambda_2(\mathbf{Y})$ et $\lambda_3(\mathbf{Y})$ de la matrice $\mathbb{B}(\mathbf{Y})$. Afin de fixer les notations on ordonne les valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{Y}) < \lambda_2(\mathbf{Y}) < \lambda_3(\mathbf{Y})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{Y})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{Y})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{Y})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les trois champs caractéristiques sont linéairement dégénérés. (Par conséquent, les ondes associées à chaque champ sont des discontinuités de contact).

5. Pour chaque champ $k = 1, 2, 3$, on a deux invariants de Riemann qu'on notera $\mathfrak{I}_k$ et J_k. Montrer qu'un choix possible est

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_1(\mathbf{Y}) &= \pi + cu, & \mathrm{J}_1(\mathbf{Y}) &= \pi + c^2\tau,\\
\mathfrak{I}_2(\mathbf{Y}) &= u, & \mathrm{J}_2(\mathbf{Y}) &= \pi,\\
\mathfrak{I}_3(\mathbf{Y}) &= \pi - cu, & \mathrm{J}_3(\mathbf{Y}) &= \pi + c^2\tau.
\end{aligned}$$

6. *Étude des discontinuités de contact.*
   Pour chaque k-onde, calculer $\dot{\sigma}_k$ les vitesses de propagation de la k-onde.
   En utilisant les invariants de Riemann et les relations de Rankine-Hugoniot,
   - trouver une relation entre un état gauche $\mathbf{Y}_L$ et un état droit $\mathbf{Y}_*$ séparés par la 1-onde,
   - montrer que u et π sont constants dans une 2-onde,
   - trouver une relation entre un état gauche $\mathbf{Y}_\heartsuit$ et un état droit $\mathbf{Y}_R$ séparés par la 3-onde.
7. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche $\mathbf{Y}_L$ et un état droit $\mathbf{Y}_R$ on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires $\mathbf{Y}_1$ et $\mathbf{Y}_2$. On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes.

10

Étude du système de l'acoustique fortement non linéaire en coordonnées Lagrangiennes

On se donne une constante $a > 0$ strictement positive. Le système de l'acoustique non linéaire en coordonnées Lagrangiennes s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = 0, \\ \partial_t v = 0, \end{cases} \tag{10.1}$$

d'inconnues $\tau(x,t) > 0$ le volume, $u(x,t)$ la vitesse normale et $v(x,t)$ la vitesse tangentielle.

On prendra $p(\tau) = a^2/\tau$ avec a une constante positive.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\tau, u, v)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forma quasilinéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W})\partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ p'(\tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$, $\lambda_2(\mathbf{W})$ et $\lambda_3(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les trois valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W}) < \lambda_3(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les champs 1 et 3 sont vraiment non linéaires tandis que le champ 2 est linéairement dégénéré.
5. Pour chaque champ k on a deux invariants de Riemann qu'on notera $\mathfrak{I}_k(\mathbf{W})$ et $\mathrm{J}_k(\mathbf{W})$. Montrer qu'un choix possible est :
   - pour le 1-champ : $\mathfrak{I}_1(\mathbf{W}) = v$ et $\mathrm{J}_1(\mathbf{W}) = u - a\ln(\tau)$;
   - pour le 2-champ : $\mathfrak{I}_2(\mathbf{W}) = u$ et $\mathrm{J}_2(\mathbf{W}) = \tau$;
   - pour le 3-champ : $\mathfrak{I}_3(\mathbf{W}) = v$ et $\mathrm{J}_3(\mathbf{W}) = u + a\ln(\tau)$.
6. *Étude des détentes.*
   6.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L, v_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\tau_*, u_*, v_*)$. Montrer que $v_* = v_L$, $u_* > u_L$, $\tau_* > \tau_L$. Exprimer u_* en fonction de τ_L, u_L et τ_*. Calculer enfin $\mathbf{W}$ dans la 1-détente.
   6.2. Reprendre la question pour la troisième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit = (\tau_\heartsuit, u_\heartsuit, v_\heartsuit)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (\tau_R, u_R, v_R)$.
7. *Étude des chocs.*

7.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L, v_L)$ à un état droit $\mathbf{W} = (\tau_*, u_*, v_*)$. Montrer que $v_* = v_L$, $u_* < u_L$, $\tau_* < \tau_L$. Exprimer u_* en fonction de τ_L, u_L et τ_*.

7.2. Reprendre la question pour la troisième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit = (\tau_\heartsuit, u_\heartsuit, v_\heartsuit)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (\tau_R, u_R, v_R)$.

8. *Étude de la discontinuité de contact.*
Soit une onde de la deuxième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_* = (\tau_*, u_*, v_*)$ à un état droit $\mathbf{W}_\heartsuit = (\tau_\heartsuit, u_\heartsuit, v_\heartsuit)$. Montrer que $u_\heartsuit = u_*$ et $\tau_\heartsuit = \tau_*$. Quelle est la vitesse de déplacement $\dot{\sigma}_2$ de cette discontinuité ?

9. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (τ_L, u_L, v_L) et un état droit (τ_R, u_R, v_R) on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires (τ_*, u_*, v_*) et $(\tau_\heartsuit, u_\heartsuit, v_\heartsuit)$. On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes.

11

Étude du modèle $\tau u v \pi$

Le système $\tau u v \pi$ a la forme suivante

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \pi = 0, \\ \partial_t v + \frac{a}{b}\partial_x \pi = 0 \\ \partial_t \pi + ab\partial_x v = 0. \end{cases} \tag{11.1}$$

avec $\tau(x,t) > 0$, $u(x,t) \in \mathbb{R}$, $v(x,t) \in \mathbb{R}$ et $\pi(x,t) \in \mathbb{R}$ les quatre fonctions inconnues et $a > b > 0$ deux constantes.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ et $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\tau, u, v, \pi)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forma quasilinéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W})\partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$.
3. Montrer que, pour des solutions régulières, le système se réécrit sous la forme quasi-linéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W})\partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{b} \\ 0 & 0 & ab & 0 \end{pmatrix}.$$
4. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$, $\lambda_2(\mathbf{W})$ (double) et $\lambda_3(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les trois valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W}) < \lambda_3(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$, $\mathbf{r}_{2a}(\mathbf{W})$, $\mathbf{r}_{2b}(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est hyperbolique (mais non strictement hyperbolique).
5. Vérifier que les trois champs sont linéairement dégénérés.
6. Pour les champs $k = 1$ et $k = 3$ on a trois invariants de Riemann qu'on notera $\mathfrak{I}_k(\mathbf{W})$ $\mathrm{J}_k(\mathbf{W})$ et $\mathfrak{K}_k(\mathbf{W})$. Pour le champ $k = 2$ on deux invariants de Riemann qu'on notera $\mathfrak{I}_2(\mathbf{W})$ et $\mathrm{J}_2(\mathbf{W})$. Montrer qu'un choix possible est :
   - pour le 1-champ : $\mathfrak{I}_1(\mathbf{W}) = \pi + bv$, $\mathrm{J}_1(\mathbf{W}) = \pi + au$, $\mathfrak{K}_1(\mathbf{W}) = \pi + ab\tau$;
   - pour le 2-champ : $\mathfrak{I}_2(\mathbf{W}) = \pi$ et $\mathrm{J}_2(\mathbf{W}) = v$;
   - pour le 3-champ : $\mathfrak{I}_3(\mathbf{W}) = \pi - bv$, $\mathrm{J}_3(\mathbf{W}) = \pi - au$, $\mathfrak{K}_3(\mathbf{W}) = \pi + ab\tau$;
7. *Étude des discontinuités de contact.*
   Pour chaque k-onde, calculer $\dot{\sigma}_k$ les vitesses de propagation de la k-onde.
   En utilisant les invariants de Riemann et les relations de Rankine-Hugoniot,
   - trouver une relation entre un état gauche $\mathbf{W}_L$ et un état droit $\mathbf{W}_*$ séparés par la 1-onde,
   - trouver une relation entre un état gauche $\mathbf{W}_*$ et un état droit $\mathbf{W}_\heartsuit$ séparés par la 2-onde,
   - trouver une relation entre un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit$ et un état droit $\mathbf{W}_R$ séparés par la 3-onde.
8. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche $(\tau_L, u_L, v_L, \pi_L)$ et un état droit $(\tau_R, u_R, v_R, \pi_R)$ on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires $(\tau_*, u_*, v_*, \pi_*)$ et $(\tau_\heartsuit, u_\heartsuit, v_\heartsuit, \pi_\heartsuit)$. On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes.

12

Étude du p-système isotherme avec friction

On modifie le p-système isotherme pour prendre en compte une loi de frottement. Les équations de conservation peuvent être écrite comme suit :

$$\begin{cases}\partial_t\varrho + \partial_x(\varrho u) = 0,\\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x\big(\varrho u^2 + p(\varrho)\big) = m\varrho.\end{cases}$$

Les inconnues sont $\varrho(x,t) > 0$ la densité et $u(x,t)$ la vitesse du fluide. La constante m représente une force externe spécifique, telle que la gravité, les forces de Coriolis et les forces électromagnétiques. Si la température du gaz est constante et si on considère une loi des gaz parfaits, la pression s'écrit

$$p(\varrho) = a^2\varrho$$

où $a > 0$ est une constante (c'est la vitesse du son et l'on a $a^2 = RT$).

Partie ① Montrer que (ϱ, u) est une solution régulière du système autonome non homogène précédent ssi (ϱ, v) est solution du système non-autonome homogène suivant :

$$\begin{cases}\partial_t\varrho + \partial_x(\varrho(v+mt)) = 0,\\ \partial_t(\varrho(v+mt)) + \partial_x\big(\varrho v(v+mt) + p(\varrho)\big) = 0,\end{cases} \tag{12.1}$$

ayant noté $v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) - mt$.

Partie ② Désormais et pour tout ce qui suit on ne s'intéresse qu'au système non-autonome homogène en variable ϱ et v.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}(\mathbf{V},t)\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t\mathbf{V} + \partial_x\mathbf{F}(\mathbf{V},t) = \mathbf{0}$. On remarquera que le flux dépend explicitement du temps : on dit que le système n'est pas autonome.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\varrho, v)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasilinéaire $\partial_t\mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W},t)\partial_x\mathbf{W} = \mathbf{0}$.
   Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W},t)$ s'écrit
   $$\begin{pmatrix} v+mt & \varrho \\ \frac{a^2}{\varrho} & v+mt\end{pmatrix}.$$
   On remarquera que la matrice dépend explicitement du temps.
3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W},t)$ et $\lambda_2(\mathbf{W},t)$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W},t) < \lambda_2(\mathbf{W},t)$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W},t)$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
   On remarquera que les valeurs propres dépendent explicitement du temps, mais pas les vecteurs propres.

4. Vérifier que les deux champs sont vraiment non linéaires.
5. Pour chaque champ k on a un invariant de Riemann qu'on notera $\mathfrak{I}_k(\mathbf{W})$. Montrer qu'un choix possible est :
   - pour le 1-champ : $\mathfrak{I}_1 = v + a\ln(\varrho)$;
   - pour le 2-champ : $\mathfrak{I}_2 = v - a\ln(\varrho)$.
6. *Étude des détentes.*
7. *Étude des détentes.*

   On cherche les états gauche $\mathbf{W}_g = (\varrho_g, v_g)$ qui peuvent être reliés à un état droit $\mathbf{W}_d = (\varrho_d, v_d)$ par une onde de détente. La k-détente est comprise entre la courbe dont la vitesse est $x'(t) = \lambda_k(\mathbf{W}_g, t)$ et la courbe dont la vitesse est $x'(t) = \lambda_k(\mathbf{W}_d, t)$. Puisque les valeurs propres dépendent explicitement du temps, les courbes de détente ne sont plus des droites de pente la valeur propre mais des paraboles (il faut intégrer l'équation différentielle pour obtenir $t \mapsto x(t)$).

   7.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\varrho_L, v_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, v_*)$. Montrer que $v_* > v_L$ et $\varrho_* < \varrho_L$. Exprimer v_* en fonction de ϱ_L, u_L et ϱ_* et tracer son graphe dans le plan (ϱ, v). Calculer enfin $\mathbf{W}$ dans la 1-détente.

   7.2. Reprendre la question pour la deuxième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\varrho_L, v_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (\varrho_*, v_*)$.
8. *Étude des choc.*

   On cherche les états gauche $\mathbf{W}_g = (\varrho_g, v_g)$ qui peuvent être reliés à un état droit $\mathbf{W}_d = (\varrho_d, v_d)$ par une onde de choc. Le k-choc a pour équation $x = x(t)$ qui vérifie $x'(t) = \dot{\sigma}_k(\mathbf{W}_g, \mathbf{W}_d ro, t)$. Puisque $\dot{\sigma}$ dépend explicitement du temps, les courbes de choc ne sont plus des droites mais des paraboles (il faut intégrer l'équation différentielle pour obtenir $t \mapsto x(t)$).

   8.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\varrho_L, v_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, v_*)$. Montrer que $v_* < v_L$ et $\varrho_* < \varrho_L$. Exprimer v_* en fonction de ϱ_L, v_L et ϱ_* et tracer son graphe dans le plan (ϱ, v).

   8.2. Reprendre la question pour la deuxième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, v_*)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (\varrho_R, v_R)$.
9. À l'aide du dessin d'onde dans le plan (ϱ, v) résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (ϱ_L, v_L) et un état droit (ϱ_R, v_R) on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire (ϱ_*, v_*). On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes de détente.

On observe que, sous l'influence d'une force externe constante, les courbes caractéristiques, les raréfactions et les ondes de choc prennent des formes paraboliques. De plus, lorsque la force externe constante disparaît, les solutions convergent vers les solutions correspondantes du p-système classique.

13

Étude du p-système isentrope

On note $\varrho(x,t) > 0$ la densité et $u(x,t)$ la vitesse du fluide. En dimension un d'espace, on modélise un écoulement isentrope par le p-système :

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) = 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u^2 + p(\varrho)) = 0, \end{cases} \tag{13.1}$$

où $p(\varrho) > 0$ est la pression du gaz. Si l'entropie du système est constante, la loi des gaz parfaits se réduit à

$$p(\varrho) = \varrho^\gamma$$

où $\gamma > 1$ est une constante.[1] Pour simplifier les notations on introduit la fonction $\varrho \mapsto c(\varrho) > 0$ tel que $c^2 \stackrel{\text{def}}{=} p'(\varrho) = \gamma\varrho^{\gamma-1}$. Notons que c est une fonction strictement croissante.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}(\mathbf{V})\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\varrho, u)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasilinéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W})\partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$.
   Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit
   $$\begin{pmatrix} u & \varrho \\ \frac{c^2}{\varrho} & u \end{pmatrix}.$$
3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les deux champs sont vraiment non linéaires.
5. On notera $\mathfrak{I}_k$ l'invariant de Riemann du k^{e} champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est $\mathfrak{I}_1 = u + \frac{2c(\varrho)}{\gamma-1}$) et $\mathfrak{I}_2 = u - \frac{2c(\varrho)}{\gamma-1}$).
6. *Étude des détentes.*
   1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\varrho_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, u_*)$. Montrer que $u_* > u_L$ et $\varrho_* < \varrho_L$. Exprimer u_* en fonction de ϱ_L, u_L et ϱ_* et tracer son graphe dans le plan (ϱ, u). Calculer enfin $\mathbf{W}$ dans la 1-détente.
   2. Reprendre la question pour la deuxième famille.
7. *Étude des choc.*
   1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\varrho_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, u_*)$. Montrer que $u_* < u_L$ et $\varrho_* < \varrho_L$. Exprimer u_* en fonction de ϱ_L, u_L et ϱ_* et tracer son graphe dans le plan (ϱ, u).
   2. Reprendre la question pour la deuxième famille.
8. À l'aide du dessin d'onde dans le plan (ϱ, u) résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (ϱ_L, u_L) et un état droit (ϱ_R, u_R) on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire (ϱ_*, u_*). On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes de détente.

1. Par exemple, pour un gaz monoatomique $\gamma = 5/3$, pour un gaz diatomique $\gamma = 7/5$

14

Étude du p-système isentrope par relaxation en volume

On considère le système de la dynamique des gaz isentropique en une dimension d'espace

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) = 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u^2 + p) = 0, \end{cases} \tag{14.1}$$

avec une loi d'état $p(\varrho)$. On note $\varrho(x,t) > 0$ la densité et $u(x,t) \in \mathbb{R}$ la vitesse du fluide. Lorsque le fluide n'est pas un gaz parfait, le caractère vraiment non linéaire des champs caractéristiques rend la résolution du problème de Riemann assez compliquée. C'est pourquoi il a été proposé de le remplacer par un système approché, dit *système de relaxation*, qui s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) = 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u^2 + \pi) = 0, \\ \partial_t(\varrho V) + \partial_x(\varrho u V) = \mu \varrho \left(\frac{1}{\varrho} - V\right), \end{cases} \tag{14.2}$$

avec $\mu > 0$ un paramètre constant, $V(x,t) > 0$ une nouvelle variable dite *volume de relaxation* et $\pi \equiv \pi(\varrho, V)$ une nouvelle loi d'état

$$\pi(\varrho, V) = p\left(\frac{1}{V}\right) - a^2\left(\frac{1}{\varrho} - V\right)$$

où $a > 0$ est une nouvelle constante et $p(1/V)$ est la «vraie» loi d'état du fluide (sur laquelle on ne fait aucune hypothèse).

Partie ① Montrer formellement que, lorsque le paramètre μ tend vers $+\infty$, alors on retrouve le système (14.1) à partir du système (14.2) (et on aura $V = 1/\varrho$).

Partie ② Désormais et pour tout ce qui suit on ne s'intéresse qu'à la structure différentielle de (14.2), c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte du terme source (*i.e.* on pose $\mu = 0$).

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{U}\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{H}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tels que le système (14.2) s'écrit $\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{Y} \equiv (\varrho, u, V)$, montrer que le système (14.2) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{Y} + \mathbb{B}(\mathbf{Y}) \partial_x \mathbf{Y} = \mathbf{0}, \qquad \mathbb{B}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} u & \varrho & 0 \\ \frac{a^2}{\varrho^3} & u & \frac{1}{\varrho} \left.\frac{\partial \pi}{\partial V}\right|_{\varrho} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}. \tag{14.3}$$

3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{Y})$, $\lambda_2(\mathbf{Y})$ et $\lambda_3(\mathbf{Y})$ de la matrice $\mathbb{B}(\mathbf{Y})$. Afin de fixer les notations on ordonne les valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{Y}) < \lambda_2(\mathbf{Y}) < \lambda_3(\mathbf{Y})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{Y})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{Y})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{Y})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.

4. Vérifier que les trois champs caractéristiques sont linéairement dégénérés. (Par conséquent, les ondes associées à chaque champ sont des discontinuités de contact).
5. Pour chaque champ $k = 1, 2, 3$, on a deux invariants de Riemann qu'on notera $\mathfrak{I}_k$ et J_k. Montrer qu'un choix possible est

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_1(\mathbf{Y}) &= V, & \mathrm{J}_1(\mathbf{Y}) &= u - \frac{a}{\varrho},\\
\mathfrak{I}_2(\mathbf{Y}) &= u, & \mathrm{J}_2(\mathbf{Y}) &= \pi(\varrho, V),\\
\mathfrak{I}_3(\mathbf{Y}) &= V, & \mathrm{J}_3(\mathbf{Y}) &= u + \frac{a}{\varrho}.
\end{aligned}$$

6. *Étude des discontinuités de contact.*
   Calculer $\dot{\sigma}_k$ les vitesses de propagation de la k-onde.
   En utilisant les invariants de Riemann et les relations de Rankine-Hugoniot, montrer que
   - u et $\pi(\varrho, V)$ sont constants dans une 2-onde,
   - les courbes de 1-onde et de 3-onde sont des droites dans le plan (u, π).
7. À l'aide du dessin d'ondes dans le plan (u, π) résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche $\mathbf{Y}_L$ et un état droit $\mathbf{Y}_R$ on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires $\mathbf{Y}_1$ et $\mathbf{Y}_2$. On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes.

15

Étude d'un mélange diphasique isentrope

On considère un mélange homogène et isentrope de deux fluides compressibles. En dimension un d'espace, on modélise ce type d'écoulements bi-fluide par le système suivant

$$\begin{cases} \partial_t\varrho + \partial_x(\varrho u) = 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u^2 + p(\varrho, c)) = 0, \\ \partial_t(\varrho c) + \partial_x(\varrho u c) = 0. \end{cases} \tag{15.1}$$

où $\varrho(x,t) > 0$ est la densité du mélange, $u(x,t)$ la vitesse du mélange, $c(x,t) \in [0;1]$ la concentration massique du premier fluide et $p(\varrho, c) > 0$ la pression du mélange qu'on supposera vérifier les deux conditions suivantes

$$\partial_\varrho p(\varrho, c) > 0, \qquad\qquad 2\partial_\varrho p(\varrho, c) + \varrho\partial^2_{\varrho\varrho} p(\varrho, c) > 0,$$

Pour simplifier les notation on introduit la fonction $a(\varrho, c) > 0$ (vitesse du son du mélange) telle que

$$a^2(\varrho, c) = \partial_\varrho p(\varrho, c).$$

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tels que le système s'écrit $\partial_t\mathbf{V} + \partial_x\mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\varrho, u, c)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forma quasilinéaire $\partial_t\mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W})\partial_x\mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit
$$\begin{pmatrix} u & \varrho & 0 \\ \frac{a^2}{\varrho} & u & \frac{1}{\varrho}\left.\frac{\partial p}{\partial c}\right|_\varrho \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$
3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$, $\lambda_2(\mathbf{W})$ et $\lambda_3(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les trois valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W}) < \lambda_3(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les champs 1 et 3 sont vraiment non linéaires tandis que le champ 2 est linéairement dégénéré.

Dans la suite on prendra

$$p(\varrho, c) = (c\varrho)^2 + \big((1-c)\varrho\big)^2 = \big(c^2 + (1-c)^2\big)\varrho^2 = \big(2c^2 + 2c + 1\big)\varrho^2$$

ainsi

$$\partial_\varrho p(\varrho, c) = 2\left(c^2 + (1-c)^2\right)\varrho, \qquad \partial^2_{\varrho\varrho} p(\varrho, c) = 2\left(c^2 + (1-c)^2\right) \qquad \partial_c p(\varrho, c) = 2\,(2c-1)\,\varrho^2,$$

et

$$a(\varrho, c) = \sqrt{2\left(c^2 + (1-c)^2\right)}\sqrt{\varrho} > 0, \qquad\qquad \partial_\varrho a(\varrho, c) = \frac{\sqrt{2\left(c^2 + (1-c)^2\right)}}{2\sqrt{\varrho}} > 0.$$

5. Pour chaque champ k on a deux invariants de Riemann qu'on notera $\mathfrak{I}_k(\mathbf{W})$ et $\mathrm{J}_k(\mathbf{W})$. Montrer qu'un choix possible est :
   - pour le 1-champ : $\mathfrak{I}_1(\mathbf{W}) = c$ et $\mathrm{J}_1(\mathbf{W}) = u + \int^{\varrho} \frac{a(r,c)}{r}\,\mathrm{d}r = u + 2a(\varrho, c)$.;
   - pour le 2-champ : $\mathfrak{I}_2(\mathbf{W}) = u$ et $\mathrm{J}_2(\mathbf{W}) = p(\varrho, c)$;
   - pour le 3-champ : $\mathfrak{I}_3(\mathbf{W}) = c$ et $\mathrm{J}_3(\mathbf{W}) = u - \int^{\varrho} \frac{a(r,c)}{r}\,\mathrm{d}r = u - 2a(\varrho, c)$..
6. *Étude des détentes.*
   6.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\varrho_L, u_L, c_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, u_*, c_*)$. Montrer que $c_* = c_L$, $u_* > u_L$, $\varrho_* < \varrho_L$. Exprimer u_* en fonction de ϱ_L, u_L et ϱ_* et tracer son graphe dans le plan (ϱ, u). Calculer enfin $\mathbf{W}$ dans la 1-détente.
   6.2. Reprendre la question pour la troisième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit = (\varrho_\heartsuit, u_\heartsuit, c_\heartsuit)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (\varrho_R, u_R, c_R)$.
7. *Étude des chocs.*
   7.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\varrho_L, u_L, c_L)$ à un état droit $\mathbf{W} = (\varrho_*, u_*, c_*)$. Montrer que $c_* = c_L$, $u_* < u_L$, $\varrho_* > \varrho_L$. Exprimer u_* en fonction de ϱ_L, u_L et ϱ_* et tracer son graphe dans le plan (ϱ, u).
   7.2. Reprendre la question pour la troisième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit = (\varrho_\heartsuit, u_\heartsuit, c_\heartsuit)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (\varrho_R, u_R, c_R)$.
8. *Étude de la discontinuité de contact.*
   Soit une onde de la deuxième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, u_*, c_*)$ à un état droit $\mathbf{W}_\heartsuit = (\varrho_\heartsuit, u_\heartsuit, c_\heartsuit)$. Montrer que $u_\heartsuit = u_*$ et $p(\varrho_\heartsuit, c_\heartsuit) = p(\varrho_*, c_*)$. Quelle est la vitesse de déplacement $\dot{\sigma}_2$ de cette discontinuité ?
9. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (ϱ_L, u_L, c_L) et un état droit (ϱ_R, u_R, c_R) on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires (ϱ_*, u_*, c_*) et $(\varrho_\heartsuit, u_\heartsuit, c_\heartsuit)$. On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes.

16

Étude du p-système isentrope en coordonnées Lagrangiennes

On veut étudier un modèle qui décrit la dynamique d'un gaz isentropique en coordonnées lagrangiennes. On note $\tau(x,t) > 0$ le volume spécifique du fluide, $u(x,t) \in \mathbb{R}$ sa vitesse et $p(\tau) > 0$ sa pression.

En dimension un d'espace, on modélise ce type d'écoulements par le système

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = 0, \end{cases} \qquad \text{avec } x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{16.1}$$

Dans tout l'exercice on considère un gaz parfait. La loi de pression se réduit alors à $p(\tau) = \tau^{-\gamma}$ avec $\gamma > 1$ une constante[1] ainsi

$$p(\tau) = \tau^{-\gamma} > 0, \qquad p'(\tau) = -\gamma\tau^{-\gamma-1} < 0, \qquad p''(\tau) = \gamma(\gamma+1)\tau^{-\gamma-2} > 0.$$

C'est une fonction positive, décroissante et convexe. Pour simplifier les notations, on introduit la fonction $\tau \mapsto c(\tau) > 0$ telle que

$$c^2(\tau) = -p'(\tau) = \gamma\tau^{-\gamma-1}.$$

c est une fonction positive et décroissante car $c'(\tau) = -\frac{p''(\tau)}{c(\tau)} < 0$.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{W}\colon \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}$.
2. Pour des solutions régulières, le système se réécrit sous la forme quasi-linéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W})\partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2(\tau) & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les deux champs sont vraiment non linéaires.
5. On note $\mathfrak{I}_k(\mathbf{W})$ l'invariant de Riemann du k^{e} champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est
$$\mathfrak{I}_1 = u - \int^\tau c(r)\,\mathrm{d}r = u + \frac{2}{\gamma-1}\tau c(\tau), \qquad \mathfrak{I}_2 = u + \int^\tau c(r)\,\mathrm{d}r = u - \frac{2}{\gamma-1}\tau c(\tau).$$
6. *Étude des détentes.*
   6.1. Considérons le 1-champ. Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L)$ donné on cherche les états $\mathbf{W}_* = (\tau_*, u_*)$ qui peuvent être relié à $\mathbf{W}_L$ par une onde de détente. Montrer que $u_* > u_L$ et $\tau_* > \tau_L$. Exprimer u_* en fonction de τ_L, u_L et τ_* et tracer son graphe dans le plan (τ, u). Calculer enfin $\mathbf{W}$ dans la 1-détente.

1. Par exemple, pour un gaz monoatomique, $\gamma = 5/3$, pour un gaz diatomique $\gamma = 7/5$.

6.2. Reprendre la question pour le 2-champ.

7. *Étude des chocs.*

   7.1. Considérons le 1-champ. Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L)$ donné on cherche les états $\mathbf{W}_* = (\tau_*, u_*)$ qui peuvent être relié à $\mathbf{W}_L$ par une onde de choc. Montrer que $u_* < u_L$ et $\tau_* < \tau_L$. Exprimer u_* en fonction de τ_L, u_L et τ_* et tracer son graphe dans le plan (τ, u).

   7.2. Reprendre la question pour le 2-champ.

8. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche $\mathbf{W}_L$ et un état droit $\mathbf{W}_R$ on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire $\mathbf{W}^*$. On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes de détente.

17

Étude du p-système isentrope en coordonnées Lagrangiennes par relaxation en volume

On considère le système de la dynamique des gaz isentropique en coordonnées Lagrangiennes et une dimension d'espace

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = 0, \end{cases} \tag{17.1}$$

où $\tau > 0$ est le volume spécifique, $u \in \mathbb{R}$ la vitesse du fluide et p la pression donnée par une loi d'état telle que $p(\tau) > 0$, $p'(\tau) < 0$.

Lorsque le fluide n'est pas un gaz parfait, le caractère vraiment non linéaire des champs caractéristiques rend la résolution du problème de Riemann assez compliquée. C'est pourquoi il a été proposé de le remplacer par un système approché, dit *système de relaxation*, qui s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \pi(\tau, V) = 0, \\ \partial_t V = \mu(\tau - V), \end{cases} \tag{17.2}$$

avec $\mu > 0$ un paramètre constant, $V > 0$ une nouvelle variable dite *volume de relaxation* et π une nouvelle loi d'état

$$\pi(\tau, V) = p(V) + a^2(V - \tau)$$

où $a > 0$ est une nouvelle constante et $p(V)$ est la «vraie» loi d'état du fluide (sur laquelle on ne fait aucune hypothèse). On a

$$\partial_\tau \pi(\tau, V) = -a^2, \qquad \partial_V \pi(\tau, V) = p'(V) + a^2.$$

Partie ① Montrer formellement que, lorsque le paramètre μ tend vers $+\infty$, on retrouve le système (17.1) à partir du système (17.2) (et on aura $V = \tau$).

Partie ② Désormais et pour tout ce qui suit on ne s'intéresse qu'à la structure différentielle de (17.2), c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte du terme source (*i.e.* on pose $\mu = 0$). On suppose aussi que τ et V sont strictement positifs.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{W}\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{H}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{H}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}$.
2. Montrer que, pour des solutions régulières, le système se réécrit sous la forme quasi-linéaire $\partial_t \mathbf{Y} + \mathbb{B}(\mathbf{Y})\partial_x \mathbf{Y} = \mathbf{0}$ avec

$$\mathbb{B}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -a^2 & 0 & a^2 + p'(V) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{Y})$, $\lambda_2(\mathbf{Y})$ et $\lambda_3(\mathbf{Y})$ de la matrice $\mathbb{B}(\mathbf{Y})$. Afin de fixer les notations on ordonne les valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{Y}) < \lambda_2(\mathbf{Y}) < \lambda_3(\mathbf{Y})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{Y})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{Y})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{Y})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les trois champs caractéristiques sont linéairement dégénérés. (Par conséquent, les ondes associées à chaque champ sont des discontinuités de contact).
5. Pour chaque champ $k = 1, 2, 3$, on a deux invariants de Riemann qu'on notera $\mathfrak{I}_k$ et J_k. Montrer qu'un choix possible est

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_1(\mathbf{Y}) &= V, & \mathrm{J}_1(\mathbf{Y}) &= au + \pi(\tau, V),\\
\mathfrak{I}_2(\mathbf{Y}) &= u, & \mathrm{J}_2(\mathbf{Y}) &= \pi(\tau, V),\\
\mathfrak{I}_3(\mathbf{Y}) &= V, & \mathrm{J}_3(\mathbf{Y}) &= au - \pi(\tau, V).
\end{aligned}$$

6. *Étude des discontinuités de contact.*
   Pour chaque k-onde, calculer $\dot{\sigma}_k$ les vitesses de propagation de la k-onde.
   En utilisant les invariants de Riemann et les relations de Rankine-Hugoniot,
   - trouver une relation entre un état gauche $\mathbf{W}_L$ et un état droit $\mathbf{W}_*$ séparés par la 1-onde,
   - montrer que u et π sont constants dans une 2-onde,
   - trouver une relation entre un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit$ et un état droit $\mathbf{W}_R$ séparés par la 3-onde.
7. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche $\mathbf{Y}_L$ et un état droit $\mathbf{Y}_R$ on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires $\mathbf{Y}_1$ et $\mathbf{Y}_2$. On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes.

18

Étude d'un mélange diphasique isentrope en coordonnées Lagrangiennes

On considère un mélange homogène et isentrope de deux fluides compressibles. En dimension un d'espace, on modélise ce type d'écoulements bi-fluide par le système suivant

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau, c) = 0, \\ \partial_t c = 0, \end{cases} \tag{18.1}$$

où $\tau(x,t) > 0$ est la densité du mélange, $u(x,t)$ la vitesse du mélange, $c(x,t) \in [0;1]$ la concentration massique du premier fluide et $p(\tau,c) > 0$ la pression du mélange qu'on supposera vérifier la condition

$$\partial_\tau p(\tau,c) < 0,$$

Pour simplifier les notation on introduit la fonction $a(\tau,c) > 0$ (vitesse du son du mélange) telle que

$$a^2(\tau,c) = -\partial_\tau p(\tau,c).$$

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\tau, u, c)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forma quasilinéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W})\partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \partial_\tau p & 0 & \partial_c p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$, $\lambda_2(\mathbf{W})$ et $\lambda_3(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les trois valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W}) < \lambda_3(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_3(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les champs 1 et 3 sont vraiment non linéaires tandis que le champ 2 est linéairement dégénéré.

Dans la suite on prendra

$$p(\tau,c) = \left(\frac{c}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{1-c}{\tau}\right)^2 = \frac{c^2 + (1-c)^2}{\tau^2} = \frac{2c^2 - 2c + 1}{\tau^2}$$

ainsi

$$\partial_\tau p(\tau,c) = -\frac{2c^2 + 2(c-1)^2}{\tau^3} = -\frac{2p(\tau,c)}{\tau}, \qquad \partial^2_{\tau\tau} p(\tau,c) = \frac{6\left(2c^2 - 2c + 1\right)}{\tau^4}, \qquad \partial_c p(\tau,c) = \frac{2(2c-1)}{\tau^2}$$

et

$$a(\tau,c) = \sqrt{-\partial_\tau p(\tau,c)} = \frac{\sqrt{2c^2 + 2(c-1)^2}}{\sqrt{\tau^3}} > 0, \quad \partial_\tau a(\tau,c) = \frac{-3}{2\tau} a(\tau,c) > 0, \quad \partial_c a(\tau,c) = \frac{\partial_c p(\tau,c)}{\tau\, a(\tau,c)}.$$

5. Pour chaque champ k on a deux invariants de Riemann qu'on notera $\mathfrak{I}_k(\mathbf{W})$ et $\mathrm{J}_k(\mathbf{W})$. Montrer qu'un choix possible est :
   - pour le 1-champ : $\mathfrak{I}_1(\mathbf{W}) = c$ et $\mathrm{J}_1(\mathbf{W}) = u + 2\tau a(\tau, c)$.;
   - pour le 2-champ : $\mathfrak{I}_2(\mathbf{W}) = u$ et $\mathrm{J}_2(\mathbf{W}) = p(\tau, c)$;
   - pour le 3-champ : $\mathfrak{I}_3(\mathbf{W}) = c$ et $\mathrm{J}_3(\mathbf{W}) = u - 2\tau a(\tau, c)$.
6. *Étude des détentes.*
   6.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L, c_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\tau_*, u_*, c_*)$. Montrer que $c_* = c_L$, $u_* > u_L$, $\tau_* > \tau_L$. Exprimer u_* en fonction de τ_L, u_L et τ_* et tracer son graphe dans le plan (τ, u). Calculer enfin $\mathbf{W}$ dans la 1-détente.
   6.2. Reprendre la question pour la troisième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit = (\tau_\heartsuit, u_\heartsuit, c_\heartsuit)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (\tau_R, u_R, c_R)$.
7. *Étude des chocs.*
   7.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L, c_L)$ à un état droit $\mathbf{W} = (\tau_*, u_*, c_*)$. Montrer que $c_* = c_L$, $u_* < u_L$, $\tau_* < \tau_L$. Exprimer u_* en fonction de τ_L, u_L et τ_* et tracer son graphe dans le plan (τ, u).
   7.2. Reprendre la question pour la troisième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_\heartsuit = (\tau_\heartsuit, u_\heartsuit, c_\heartsuit)$ à un état droit $\mathbf{W}_R = (\tau_R, u_R, c_R)$.
8. *Étude de la discontinuité de contact.*
   Soit une onde de la deuxième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_* = (\tau_*, u_*, c_*)$ à un état droit $\mathbf{W}_\heartsuit = (\tau_\heartsuit, u_\heartsuit, c_\heartsuit)$. Montrer que $u_\heartsuit = u_*$ et $p(\tau_\heartsuit, c_\heartsuit) = p(\tau_*, c_*)$. Quelle est la vitesse de déplacement $\dot{\sigma}_2$ de cette discontinuité?
9. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (τ_L, u_L, c_L) et un état droit (τ_R, u_R, c_R) on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires (τ_*, u_*, c_*) et $(\tau_\heartsuit, u_\heartsuit, c_\heartsuit)$. On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes.

19

Étude du modèle de gaz de Chaplygin

On note $\varrho(x,t) > 0$ la densité et $u(x,t)$ la vitesse du gaz. En dimension un d'espace, on modélise un écoulement isentrope par le p-système :

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) = 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u^2 + p(\varrho)) = 0, \end{cases} \tag{19.1}$$

où $p(\varrho)$ est la pression du gaz. L'équation d'état d'un gaz isentrope de Chaplygin s'écrit

$$p(\varrho) = -\frac{A}{\varrho} < 0$$

où $A > 0$ est une constante.[1] Notons que

$$p'(\varrho) = \frac{A}{\varrho^2} = -\frac{p(\varrho)}{\varrho} > 0.$$

Pour simplifier les notations on introduit la fonction $\varrho \mapsto c(\varrho) > 0$ tel que $c^2(\varrho) \stackrel{\text{def}}{=} p'(\varrho) = \frac{A}{\varrho^2}$. Alors on a $p(\varrho) = -\varrho c^2(\varrho)$ et $c(\varrho) = \frac{\sqrt{A}}{\varrho} > 0$ et c est une fonction strictement décroissante.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}(\mathbf{V})\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\varrho, u)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasilinéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W})\partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$.
   Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit
   $$\begin{pmatrix} u & \varrho \\ \frac{c^2}{\varrho} & u \end{pmatrix}.$$
3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les deux champs sont vraiment non linéaires.
5. On notera $\mathfrak{I}_k$ l'invariant de Riemann du k^{e} champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est $\mathfrak{I}_1 = u - c(\varrho)$ et $\mathfrak{I}_2 = u + c(\varrho)$.
6. *Étude des discontinuités de contact.*
   - Soit une onde de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\varrho_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, u_*)$. Quelle est la vitesse de déplacement $\dot{\sigma}_1$ de cette discontinuité ?
   - Reprendre la question pour la deuxième famille.

1. Cette loi d'état a été introduit par Chaplygin pour calculer la force de portance sur l'aile d'un avion en aérodynamique. Récemment, le gaz de Chaplygin a été proposé comme un modèle possible pour décrire la matière noire et l'énergie noire représentées par un seul fluide et la cosmologie de Chaplygin offre une possibilité intéressante de rendre compte des observations actuelles sur l'expansion de l'univers.

7. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (ϱ_L, u_L) et un état droit (ϱ_R, u_R) on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire (ϱ_*, u_*). On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes. On montrera notamment que les deux ondes s'intersectent ssi

$$u_R + c(\varrho_R) > u_L + c(\varrho_L).$$

20

Étude du p-système isentrope avec une loi d'état logarithmique

On note $\varrho(x,t) > 0$ la densité et $u(x,t)$ la vitesse du fluide. En dimension un d'espace, on modélise un écoulement isentrope par le p-système :

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) = 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u^2 + p(\varrho)) = 0, \end{cases} \tag{20.1}$$

où p est la pression du gaz définie par une loi d'état logarithmique :

$$p(\varrho) = A\ln(\varrho)$$

où $A > 0$ est une constante. Cette loi d'état a été introduite pour étudier l'évolution dynamique de l'univers. Comparé aux diverses généralisations du modèle de gaz de Chaplygin, le modèle logotropique avec l'équation d'état logarithmique dépend du seul paramètre A et conduit à des comportements cosmologiques intéressants. Il est remarquable de constater que la pression est positive lorsque $\varrho > 1$ et négative pour $0 < \varrho < 1$. Il peut donc être considéré comme une transition entre les gaz polytropiques et les gaz de Chaplygin (généralisés). En conséquence, il a été présenté comme un candidat naturel et robuste pour une nouvelle unification de la matière noire et de l'énergie noire.

Pour simplifier les notations on introduit la fonction $\varrho \mapsto c(\varrho) > 0$ tel que $c^2(\varrho) \stackrel{\text{def}}{=} p'(\varrho) = \frac{A}{\varrho}$. Notons que c est une fonction positive, strictement décroissante, convexe :

$$c(\varrho) = \sqrt{\frac{A}{\varrho}} > 0, \qquad c'(\varrho) = -\frac{c(\varrho)}{2\varrho} < 0, \qquad c''(\varrho) = \frac{3c(\varrho)}{4\varrho^2} > 0.$$

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}(\mathbf{V})\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\varrho, u)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasilinéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W})\partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$.
   Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit
   $$\begin{pmatrix} u & \varrho \\ \frac{c^2(\varrho)}{\varrho} & u \end{pmatrix}.$$
3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les deux champs sont vraiment non linéaires.
5. On notera $\mathfrak{I}_k$ l'invariant de Riemann du k^{e} champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est $\mathfrak{I}_1 = u - 2c(\varrho)$ et $\mathfrak{I}_2 = u + 2c(\varrho)$.
6. *Étude des détentes.*

6.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\varrho_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, u_*)$. Montrer que $u_* > u_L$ et $\varrho_* < \varrho_L$. Exprimer u_* en fonction de ϱ_L, u_L et ϱ_* et tracer son graphe dans le plan (ϱ, u). Calculer enfin $\mathbf{W}$ dans la 1-détente.

6.2. Reprendre la question pour la deuxième famille.

7. *Étude des choc.*

7.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\varrho_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, u_*)$. Montrer que $u_* < u_L$ et $\varrho_* < \varrho_L$. Exprimer u_* en fonction de ϱ_L, u_L et ϱ_* et tracer son graphe dans le plan (ϱ, u).

7.2. Reprendre la question pour la deuxième famille.

8. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (ϱ_L, u_L) et un état droit (ϱ_R, u_R) on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire (ϱ_*, u_*). On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes de détente.

21

Étude d'un modèle d'écoulement sanguin

Un modèle monodimensionnel d'écoulement sanguin est obtenu par intégration des équations de Navier-Stokes sur chaque section transverse d'une artère. Pour une artère donnée, on obtient alors le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \partial_t A + \partial_x Q = 0, \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\frac{Q^2}{A} + \frac{\beta}{3\varrho} A^{3/2} \right) = -K_r \frac{Q}{A}. \end{cases}$$

où $A(t,x)$ est l'aire de la section de l'artère considérée et $Q(t,x)$ le débit sanguin. Les coefficients K_r et β apparaissant dans le modèle sont liés respectivement à la viscosité sanguine et aux propriétés élastiques de la paroi artérielle. En particulier, β peut être interprété comme un coefficient de rigidité de l'artère, proportionnel au module de Young.

Désormais et pour tout ce qui suit on ne s'intéresse qu'à la structure différentielle du modèle, c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte du terme source en posant $K_r = 0$.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V} \colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}(\mathbf{V}) \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.
2. Notons $u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q}{A}$. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (A, u)$, le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasilinéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

   $$\begin{pmatrix} u & A \\ \frac{e^2}{\sqrt{A}} & u \end{pmatrix}.$$

   ayant noté $e > 0$ la constante telle que $e^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\beta}{2\varrho}$.
3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les deux champs sont vraiment non linéaires.
5. On notera $\mathfrak{I}_k$ l'invariant de Riemann du k^{e} champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est $\mathfrak{I}_1 = 4e\sqrt[4]{A} + u$ et $\mathfrak{I}_2 = 4e\sqrt[4]{A} - u$.
6. *Étude des détentes.*
   - 6.1. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (A_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (A_*, u_*)$. Montrer que $u_* > u_L$ et $A_* < A_L$. Exprimer u_* en fonction de A_L, u_L et A_* et tracer son graphe dans le plan (A, u). Calculer enfin $\mathbf{W}$ dans la 1-détente.
   - 6.2. Reprendre la question pour la deuxième famille.
7. *Étude des choc.*
   - 7.1. Soit un choc de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (A_L, u_L)$ à un état droit $\mathbf{W}_* = (A_*, u_*)$. Montrer que $u_* < u_L$ et $A_* < A_L$. Exprimer u_* en fonction de A_L, u_L et A_* et tracer son graphe dans le plan (A, u).

7.2. Reprendre la question pour la deuxième famille.

8. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (A_L, u_L) et un état droit (A_R, u_R) on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire (A_*, u_*). On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes de détente.

22

Étude du système de Aw Rascle en ϱ-w

On considère le système :

$$\begin{cases} \partial_t\varrho + \partial_x\Big(\varrho(w-\varrho)\Big) = 0, \\ \partial_t(\varrho w) + \partial_x\Big(\varrho w\big(w-\varrho\big)\Big) = 0, \end{cases} \qquad \text{avec } x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{22.1}$$

où $\varrho(t,x) > 0$ et $w(t,x) \in \mathbb{R}$ sont les inconnues. [1]

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{U} \colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$.
2. Soit $\mathbf{W} = (\varrho, w)$, alors le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W})\partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit
$$\begin{pmatrix} w-2\varrho & \varrho \\ 0 & w-\varrho \end{pmatrix}.$$
3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite qu'on notera $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que le champs 1 est vraiment non linéaire tandis que le champ 2 est linéairement dégénéré. Quelle est la nature de ces deux champs ? Autrement dit, il s'agit de chocs, de détentes ou de discontinuités de contact ?
5. On note $\mathfrak{I}_k$ l'invariant de Riemann du k^{e} champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est $\mathfrak{I}_1 = w$ et $\mathfrak{I}_2 = \lambda_2$.
6. *Étude du* 1*-champ.*
   - Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (\varrho_L, w_L)$ donné on cherche les états droit $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, w_*)$ qui peuvent être relié à $\mathbf{W}_L$ par une 1-onde de détente. Montrer que $w_* = w_L$ et $\varrho_* \le \varrho_L$. Calculer enfin $\mathbf{W}$ dans la 1-détente.
   - Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (\varrho_L, w_L)$ donné on cherche les états droit $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, w_*)$ qui peuvent être relié à $\mathbf{W}_L$ par une 1-onde de choc de vitesse $\dot\sigma_1$. Montrer que $w_* = w_L$ et $\varrho_* > \varrho_L$.
7. *Étude du* 2*-champ.*
   Quelle est la vitesse $\dot\sigma_2$ de cette discontinuité ? Expliciter les états $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, w_*)$ qui peuvent être relié à un état droit $\mathbf{W}_R$ par une discontinuité de vitesse $\dot\sigma_2$.
8. Résoudre le problème de RIEMANN : pour un état gauche $\mathbf{W}_L$ et un état droit $\mathbf{W}_R$ on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire $\mathbf{W}_*$. On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes de détente.

1. Il s'agit du système de AW et RASCLE pour la modélisation macroscopique du trafic routiero où ϱ est la densité des véhicules et $w = u + \varrho$ est leur vitesse moyenne u augmentée d'un facteur d'anticipation $p(\varrho) = \varrho$.

23

Étude du système de Aw et Rascle

On considère le système de Aw et Rascle pour la modélisation macroscopique du trafic routier :

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) = 0, \\ \partial_t\Big(\varrho\big(u + p(\varrho)\big)\Big) + \partial_x\Big(\varrho u\big(u + p(\varrho)\big)\Big) = 0, \end{cases} \qquad \text{avec } x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{23.1}$$

où $\varrho > 0$ est la densité des véhicules, u leur vitesse moyenne et p joue le rôle d'un facteur d'anticipation qu'on supposera vérifier les deux conditions suivantes

$$p(\varrho) > 0 \qquad\qquad p'(\varrho) > 0, \qquad\qquad p''(\varrho) \geq 0.$$

Par exemple on pourra prendre $p(\varrho) = \varrho$.

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{U}\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tels que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$.
2. Soit $\mathbf{W} = (\varrho, u)$, alors le système se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W})\partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit
$$\begin{pmatrix} u & \varrho \\ 0 & u - \varrho p'(\varrho) \end{pmatrix}.$$
3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite qu'on notera $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$. En déduire que le système est strictement hyperbolique. (Que se passe-t-il quand $\varrho \to 0$?)
4. Vérifier que le champs 1 est vraiment non linéaire tandis que le champ 2 est linéairement dégénéré. Quelle est la nature de ces deux champs ? Autrement dit, il s'agit de chocs, de détentes ou de discontinuités de contact ?
5. On note $\mathfrak{I}_k$ l'invariant de Riemann du k^{e} champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est $\mathfrak{I}_1 = u + p(\varrho)$ et $\mathfrak{I}_2 = \lambda_2$.
6. *Étude du* 1*-champ.*
   - Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (\varrho_L, u_L)$ donné on cherche les états droit $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, u_*)$ qui peuvent être relié à $\mathbf{W}_L$ par une 1-onde de détente. Montrer que $u_* > u_L$ et $\varrho_* < \varrho_L$. Exprimer u_* en fonction de ϱ_L, u_L et ϱ_*. Plus précisément, écrire la fonction $\varrho_* \mapsto u_*(\varrho_*, \varrho_L, u_L)$ et tracer son graphe dans le plan (ϱ, u). Calculer enfin $\mathbf{W}$ dans la 1-détente.
   - Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (\varrho_L, u_L)$ donné on cherche les états droit $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, u_*)$ qui peuvent être relié à $\mathbf{W}_L$ par une 1-onde de choc de vitesse $\dot\sigma_1$. Montrer que les relations de Rankine-Hugoniot peuvent s'écrire sous la forme
   $$\begin{cases} j_1 \equiv \varrho_*(u_* - \dot\sigma_1) = \varrho_L(u_L - \dot\sigma_1), \\ (u_* + p(\varrho_*))\varrho_*(u_* - \dot\sigma_1) = (u_L + p(\varrho_L))\varrho_L(u_L - \dot\sigma_1). \end{cases}$$
   Montrer que $u_* < u_L$ et $\varrho_* > \varrho_L$. Exprimer u_* en fonction de ϱ_L, u_L et ϱ_*. Plus précisément, écrire la fonction $\varrho_* \mapsto u_*(\varrho_*, \varrho_L, u_L)$ et tracer son graphe dans le plan (ϱ, u).

7. *Étude du* 2*-champ.*
   Quelle est la vitesse $\dot{\sigma}_2$ de cette discontinuité ? Expliciter les états $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, u_*)$ qui peuvent être relié à un état droit $\mathbf{W}_R$ par une discontinuité de vitesse $\dot{\sigma}_2$.
8. Résoudre le problème de RIEMANN : pour un état gauche $\mathbf{W}_L$ et un état droit $\mathbf{W}_R$ on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire $\mathbf{W}_*$. On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes et la solution dans les ondes de détente.

24

Étude du système uv

On considère le système hyperbolique suivant

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\dfrac{au}{u+v} \right) = 0, \\ \partial_t v + \partial_x \left(\dfrac{bv}{u+v} \right) = 0, \end{cases} \tag{24.1}$$

où $0 < a < b$ sont des constantes données et $u(x,t) > 0$ et $v(x,t) > 0$ les deux fonctions inconnues.

1. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, trouver le vecteur $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}$.
2. Pour des solutions régulières, le système est équivalent à $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Expliciter la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$.
3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$. En déduire que le système (**??**) est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que le 1-champ est linéairement dégénéré et que le 2-champ est vraiment non linéaire.
5. On note $\mathfrak{I}_k$ l'invariant de Riemann du k-ème champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est $\mathfrak{I}_1 = \ln(u) - \ln(v)$ et $\mathfrak{I}_2 = \frac{u}{a} + \frac{v}{b}$.
6. *Étude du 1-champ.*
   Expliciter les états $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, w_*)$ qui peuvent être relié à un état gauche $\mathbf{W}_L$ par une discontinuité de vitesse $\dot\sigma_1$. Quelle est la vitesse $\dot\sigma_1$ de cette discontinuité ?
7. *Étude du 2-champ.*
   - Pour un état gauche $\mathbf{W}_*$ donné on cherche les états droit $\mathbf{W}_R$ qui peuvent être relié à $\mathbf{W}_*$ par une 2-onde de détente. Exprimer v_* en fonction de u_R, v_R et u_*. Plus précisément, écrire la fonction $u_* \mapsto v_*(u_*, u_L, v_L)$ et tracer son graphe dans le plan (u, v). Calculer enfin $\mathbf{W}$ dans la 2-détente.
   - Pour un état gauche $\mathbf{W}_*$ donné on cherche les états droit $\mathbf{W}_R$ qui peuvent être relié à $\mathbf{W}_*$ par une 2-onde de choc de vitesse $\dot\sigma_2$. Exprimer v_* en fonction de u_R, v_R et u_*. Plus précisément, écrire la fonction $u_* \mapsto v_*(u_*, u_L, v_L)$ et tracer son graphe dans le plan (u, v).
8. Résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche $\mathbf{W}_L$ et un état droit $\mathbf{W}_R$ on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire $\mathbf{W}_*$. On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes.

25

Étude du système uv bis

On considère le système hyperbolique suivant

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \big((u^2 + v^2) u \big) = 0, \\ \partial_t v + \partial_x \big((u^2 + v^2) v \big) = 0, \end{cases} \tag{25.1}$$

où $u(x,t) > 0$ et $v(x,t) > 0$ sont les deux fonctions inconnues.

1. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, trouver le vecteur $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que le système s'écrit $\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}$.
2. Pour des solutions régulières, le système est équivalent à $\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Expliciter la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$.
3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_1(\mathbf{W})$ et $\mathbf{r}_2(\mathbf{W})$. En déduire que le système (**??**) est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que le 1-champ est linéairement dégénéré et que le 2-champ est vraiment non linéaire.
5. On note $\mathfrak{I}_k$ l'invariant de Riemann du k-ème champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible est $\mathfrak{I}_1 = u^2 + v^2$ et $\mathfrak{I}_2 = \ln(u) - \ln(v)$.
6. *Étude du 1-champ.*
   Expliciter les états $\mathbf{W}_* = (\varrho_*, w_*)$ qui peuvent être relié à un état gauche $\mathbf{W}_L$ par une discontinuité de vitesse $\dot\sigma_1$. Quelle est la vitesse $\dot\sigma_1$ de cette discontinuité ?
7. *Étude du* 2*-champ.*
   - Pour un état gauche $\mathbf{W}_*$ donné on cherche les états droit $\mathbf{W}_R$ qui peuvent être relié à $\mathbf{W}_*$ par une 2-onde de détente. Exprimer v_* en fonction de u_R, v_R et u_*. Plus précisément, écrire la fonction $u_* \mapsto v_*(u_*, u_L, v_L)$ et tracer son graphe dans le plan (u, v). Calculer enfin $\mathbf{W}$ dans la 2-détente.
   - Pour un état gauche $\mathbf{W}_*$ donné on cherche les états droit $\mathbf{W}_R$ qui peuvent être relié à $\mathbf{W}_*$ par une 2-onde de choc de vitesse $\dot\sigma_2$. Exprimer v_* en fonction de u_R, v_R et u_*. Plus précisément, écrire la fonction $u_* \mapsto v_*(u_*, u_L, v_L)$ et tracer son graphe dans le plan (u, v).
8. Résoudre le problème de RIEMANN : pour un état gauche $\mathbf{W}_L$ et un état droit $\mathbf{W}_R$ on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire $\mathbf{W}_*$. On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes.