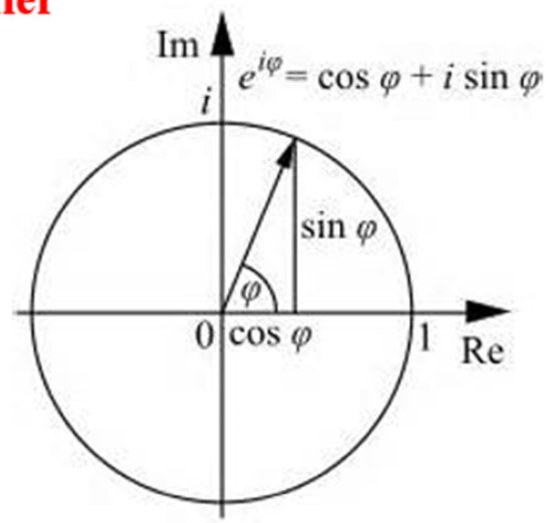
BACHELOR UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE

Ressource R1-04 : OUTILS MATHEMATIQUES ET LOGICIELS

Chapitre 2 : Les bases des nombres complexes pour le GEII

Leonhard Euler



$$e^{i\pi}+1=0$$

Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr

Table des matières

Notes

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

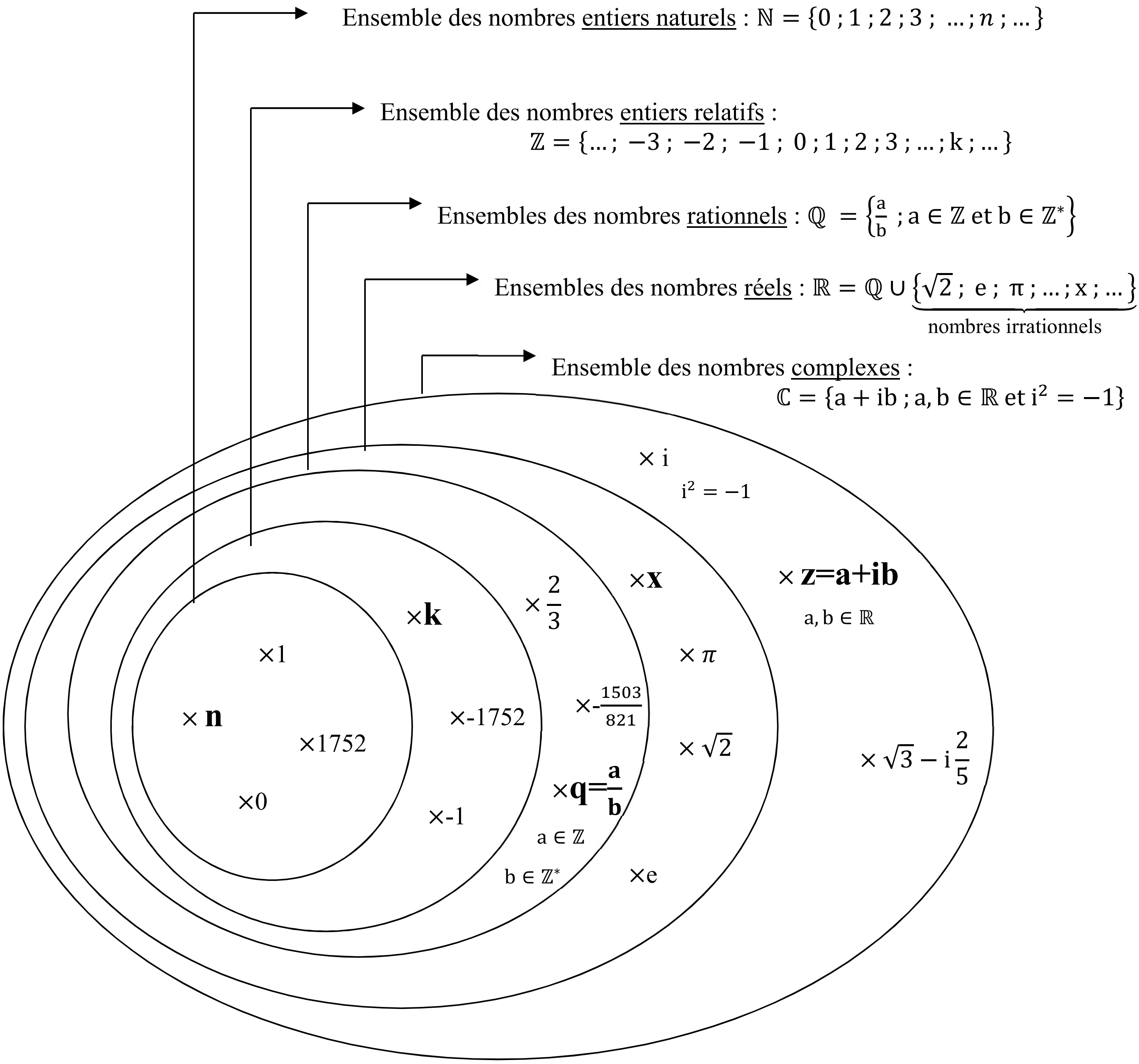
…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

Partie A : Définitions et notations du GEII

I. Introduction



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

On appelle i le nombre imaginaire, défini par : $i^2 = -1$.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$: $\mathbb{C} = \{\mathbf{z = a + ib}\,; \mathbf{a} \in \mathbb{R}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}\}$
Dans cet ensemble toute équation du second degré possède deux solutions.
En électricité la lettre i étant réservée à l'intensité d'un courant, nous la remplacerons par la lettre j.

Notes

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

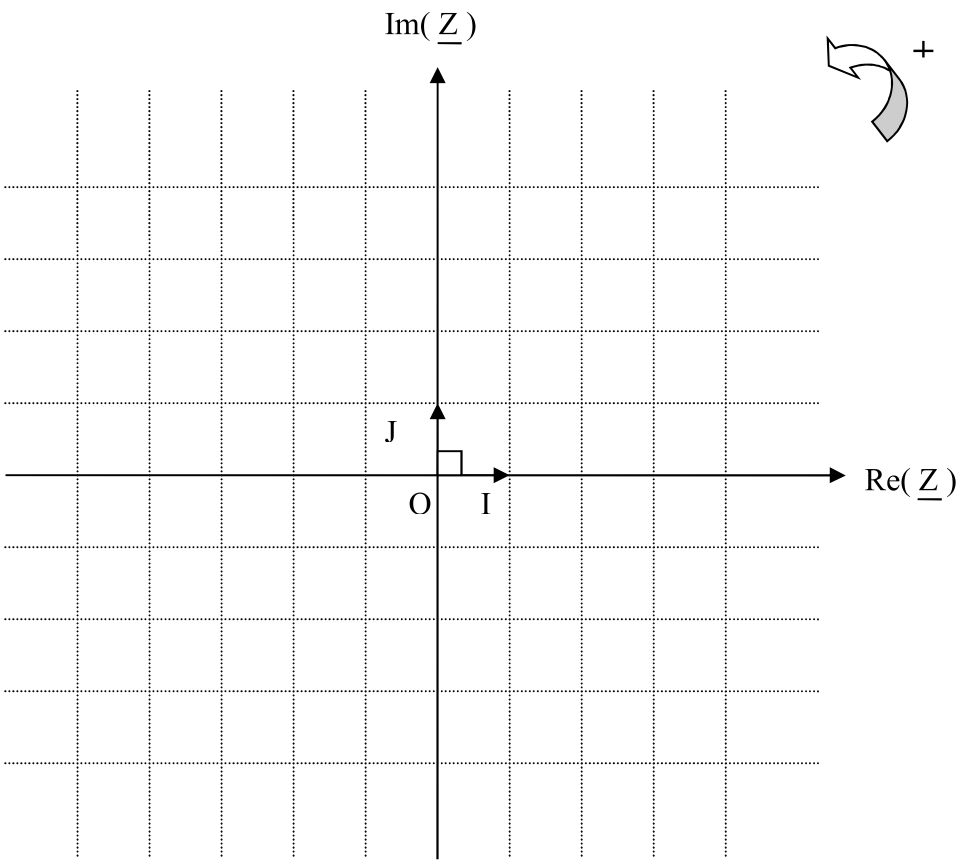
……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...



II. Définitions et notations du GEII

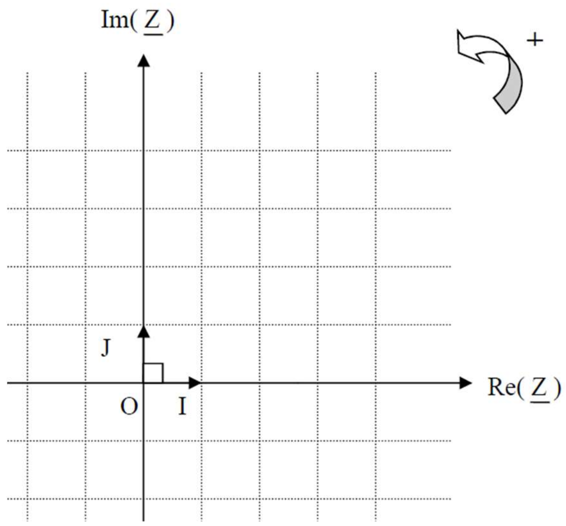
✓ **Tout nombre complexe $\underline{Z}$ s'écrit de la forme :**

$$\underline{Z} = x + j.y \quad \text{où } x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \text{ et } j^2 = -1$$

x est la partie réelle de $\underline{Z}$
On note : $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$
On note : $y = \mathrm{Im}(\underline{Z})$

✓ **Le plan complexe : On représente un nombre réel sur une droite munie d'un repère $\left(O, \vec{OI}\right)$. Tout nombre complexe $\underline{Z} = x + j.y$ (où $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) est représenté dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{OI}, \vec{OJ}\right)$ par le point M d'abscisse $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$ et d'ordonnée $y = \mathrm{Im}(\underline{Z})$**
Le point M(x,y) est appelé image de $\underline{Z}$.
$\underline{Z}$ est appelé l'affixe du point M.
$\underline{Z}$ est aussi appelé l'affixe du vecteur $\vec{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$



Calcul de OM : ……………………………………………

……………………………………………………………

Soit θ, la mesure de l'angle de vecteur orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$

$\cos(\theta) =$ ……………………………………………………

$\sin(\theta) =$ ……………………………………………………

✓ **Le module de $\underline{Z}$ est noté Z ou encore $|\underline{Z}|$, c'est la distance de O à M, ainsi :**
$$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

✓ **L'argument de $\underline{Z}$ est noté $\arg(\underline{Z})$, c'est la mesure en radians de l'angle de vecteur orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$, déterminée à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$). On note $\theta = \arg(\underline{Z})$,**

on a alors : $$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{Z} = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{\mathcal{R}e(\underline{Z})}{Z} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{Z} = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{\mathrm{Im}(\underline{Z})}{Z} \end{cases} \quad \text{si } Z \neq 0.$$

Remarques : 1. si Z=0, alors M=O, l'origine du repère, O, ne possède pas d'argument.

2. sinon, on a alors : x = ……………… et y =……………………….

3. **(**x,y) sont appelées « coordonnées cartésiennes » du point M, image du nombre complexe $\underline{Z} = x + j.y$ et ($|\underline{\mathbf{Z}}|$, θ) sont appelées « les coordonnées polaires » du point M.

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

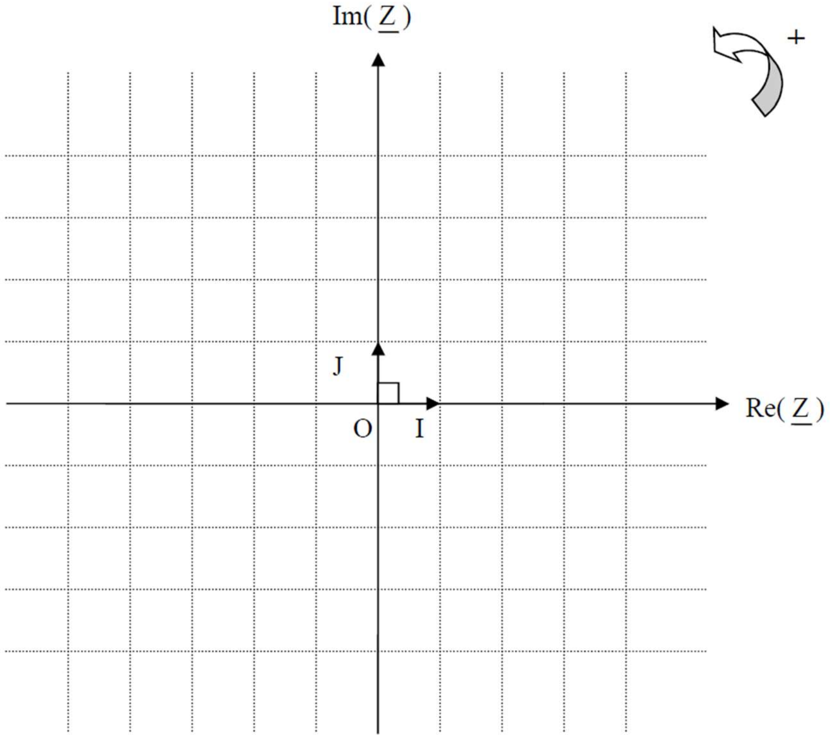
………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...



Partie B : Les différentes écritures d'un nombre complexe

I. Définitions

$$\underline{Z} = x + j.y \text{ où } x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \text{ et } j^2 = -1$$

x est la partie réelle de $\underline{Z}$
On note : $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$
On note : $y = Im(\underline{Z})$

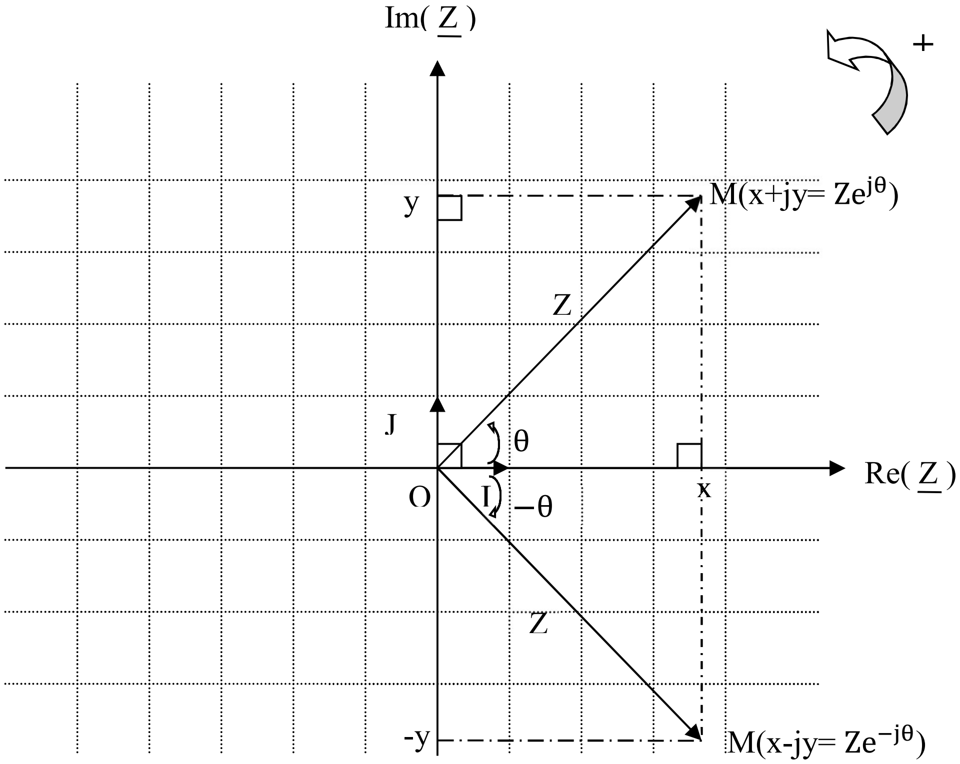
Le module de $\underline{Z}$ est noté Z ou encore $\left|\underline{Z}\right|$, c'est la distance de O à M, donc $\left|\underline{Z}\right| = Z = \sqrt{x^2 + y^2}$

L'argument de $\underline{Z}$ est noté $\arg(\underline{Z})$, c'est la mesure en radians de l'angle de vecteur orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$, déterminée à 2kπ près (k ∈ ℤ). On note $\theta = \arg(\underline{Z})$, on a alors :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{Z} = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{Re(\underline{Z})}{Z} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{Z} = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{Im(\underline{Z})}{Z} \end{cases} \text{ si } Z \neq 0.$$

Le plan complexe est muni d'un RON (O ; $\vec{OI}$, $\vec{OJ}$) orienté dans le sens direct.
$\underline{Z} = x + j.y$ où $x, y \in \mathbb{R}$

Le point M(x,y) est appelé image de $\underline{Z}$.
$\underline{Z}$ est appelé l'affixe du point M.
$\underline{Z}$ est aussi appelé l'affixe du vecteur $\vec{OM}$.
$\vec{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$



Forme algébrique de $\underline{Z}$: (coordonnées cartésiennes)
$\underline{Z} = x + j.y$

Forme trigonométrique de $\underline{Z}$: (coordonnées polaires)
$\underline{Z} = Z.\cos(\theta) + j.Z.\sin(\theta) = Z.(\cos(\theta) + j.\sin(\theta))$ **aussi noté :** $\underline{Z} = [Z, \theta]$

Forme exponentielle, géométrique ou polaire : Euler a noté $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j.\sin(\theta)$
$\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$

Nombre complexe conjugué de $\underline{Z}$: Soit $\underline{Z} = x + j.y$, on appelle conjugué de $\underline{Z}$, et on note $\underline{Z}^*$, le nombre complexe défini par : $\underline{Z}^* = x - j.y$. Si $\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$, alors $\underline{Z}^* = Z.e^{-j\theta}$

II. Exemples / Exercices

Compléter le tableau ci-après.

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

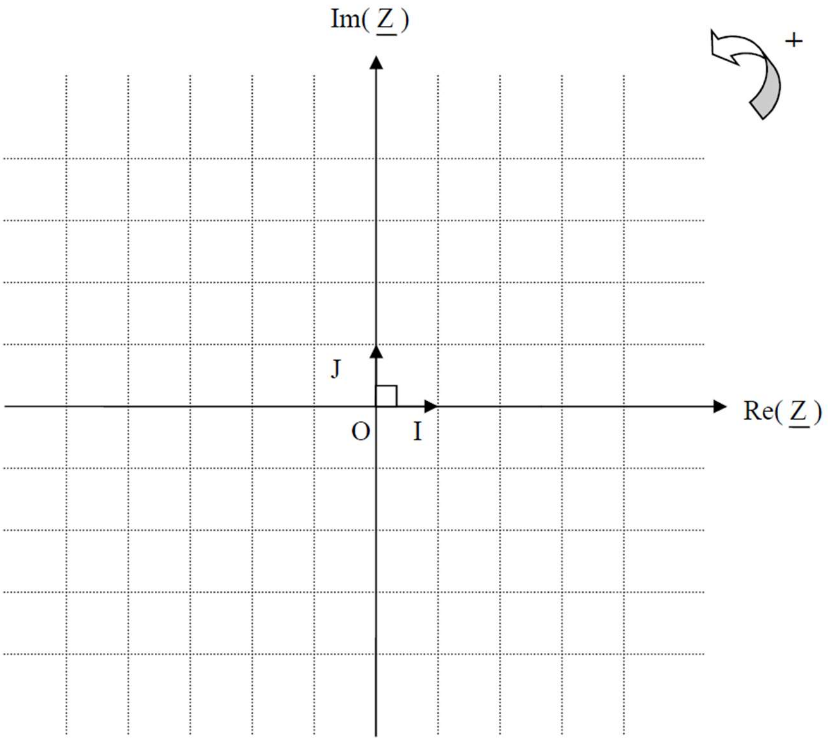
……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...



$\underline{Z}=x+jy$ $\underline{Z}=Z.e^{j\theta}$ $\underline{Z}=[Z,\theta]$	$\mathrm{Re}(\underline{Z})=x$ $\mathrm{Re}(\underline{Z})=Z.\cos\theta$	$\mathrm{Im}(\underline{Z})=y$ $\mathrm{Im}(\underline{Z})=Z.\sin\theta$	$\lvert\underline{Z}\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$ $\lvert\underline{Z}\rvert=Z$	$\mathrm{Arg}(\underline{Z})=\theta$	**Ecriture exponentielle ou algébrique**	**Conjugué :** $\underline{Z}^*=x-jy$ $\underline{Z}^*=Z.e^{-j\theta}$ $\underline{Z}^*=[Z,-\theta]$
$\underline{Z_1}=5$						
$\underline{Z_2}=-3j$						
$\underline{Z_3}=\sqrt{3}+j$						
$\underline{Z_4}=\sqrt{3}-j$						
$\underline{Z_5}=-1+j$						
$\underline{Z_6}=-4-4j\sqrt{3}$						
$\underline{Z_7}=e^{j\frac{\pi}{2}}$						
$\underline{Z_8}=e^{j\pi}$						
$\underline{Z_9}=e^{2j\pi}$						

$\underline{Z_{10}} =[7 , -\frac{\pi}{3}]$						
$\underline{Z_{11}} = e^{kj\pi}$; $k\epsilon\mathbb{Z}$						

Notes :

....

....

....

....

....

....

....

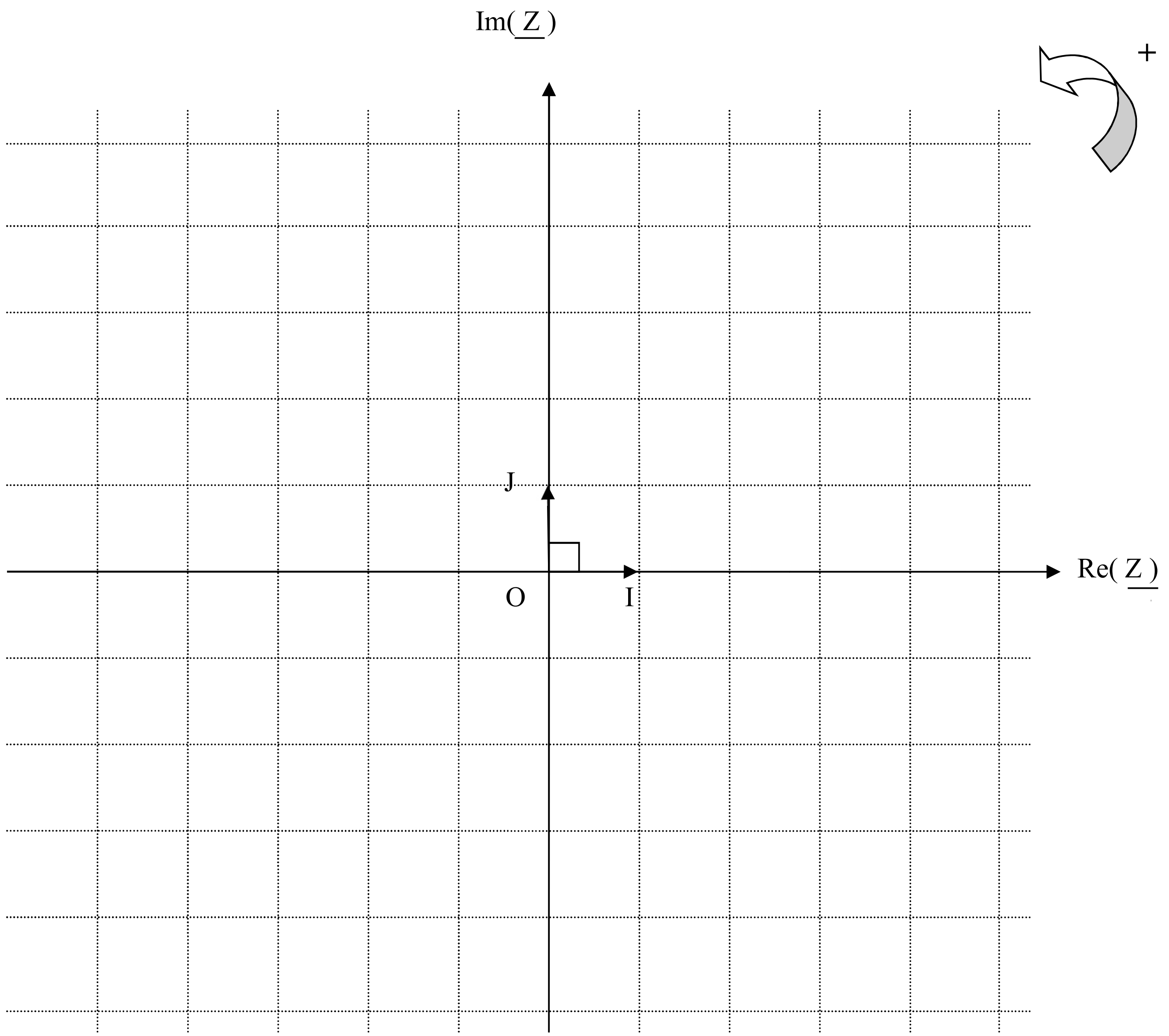
....

....

....

....

....


Im(Z)
+
J
O
I
Re(Z)

Notes

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

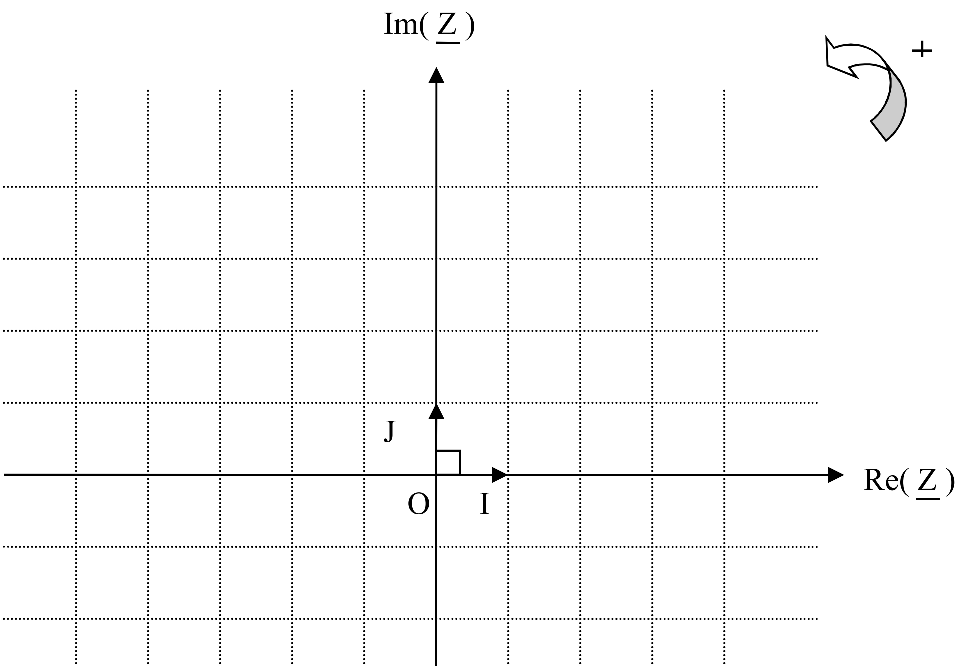
…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...



Partie C : Opérations sur les module et arguments d'un nombre complexe

I. Argument d'un nombre complexe et arctangente

Comment obtenir θ l'argument d'un nombre complexe, lorsqu'il n'est pas remarquable ?

Soit $\underline{Z} = a + j.b$ un nombre complexe non nul et $a \neq 0$.
Pour déterminer un argument de $\underline{Z}$, on calcule

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Si θ n'est pas un angle remarquable, alors on calcule : $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{b}{a}$.
On peut alors en déduire θ, en utilisant la fonction Arctangente, mais en faisant très attention, car Arctan(x)$\in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$!!! En effet, lorsque la partie réelle de $\underline{Z}$ est négative, la mesure principale de son argument θ n'est pas dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, pour obtenir le bon résultat, il suffit donc d'ajouter ou de soustraire π à Arctan $\left(\frac{b}{a}\right)$

A retenir

Soit $\underline{Z} = a + j.b$ un nombre complexe non nul, tel que $a \neq 0$.

$$\arg(\underline{Z}) = \begin{cases} \text{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \text{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right) \pm \pi & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Remarque : Que se passe-t-il si a = 0 ?

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

II. Propriétés et Opérations sur les module et arguments

$\underline{Z} = x + j.y = Z.e^{j.\theta} = [Z , \theta]$ et $\underline{Z'} = x' + j.y' = Z'.e^{j.\theta'} = [Z' , \theta']$ sont deux nombres complexes.

1) Egalité entre deux nombres complexes

$$\boxed{\underline{\mathbf{Z}} = \underline{\mathbf{Z'}} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{Re}(\underline{\mathbf{Z}}) = \mathbf{Re}(\underline{\mathbf{Z'}}) \\ \mathbf{Im}(\underline{\mathbf{Z}}) = \mathbf{Im}(\underline{\mathbf{Z'}}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\underline{\mathbf{Z}}| = |\underline{\mathbf{Z'}}| \\ \theta = \theta' + \mathbf{2.k.}\pi \end{cases}}$$

2) Produit de deux nombres complexes (Comme $e^a.e^b = e^{a+b}$ il est préférable d'utiliser l'écriture exponentielle/polaire le plus possible)

$$\underline{Z}.\underline{Z'} = Ze^{j.\theta}.Z'e^{j.\theta'} = Z.Z'e^{j(\theta+\theta')}$$ on en déduit que :

$$\mathbf{arg}(\underline{\mathbf{Z}}.\underline{\mathbf{Z'}}) = \mathbf{arg}(\underline{\mathbf{Z}}) + \mathbf{arg}(\underline{\mathbf{Z}}') + \mathbf{2k}\boldsymbol{\pi}, \ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}, \text{ et } |\underline{\mathbf{Z}}.\underline{\mathbf{Z}}'| = |\underline{\mathbf{Z}}|.|\underline{\mathbf{Z}}'|$$

$$[\mathbf{Z} , \boldsymbol{\theta}] \times [\mathbf{Z}' , \boldsymbol{\theta}'] = [\mathbf{ZZ}' , \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}']$$

Le module d'un produit de nombres complexes est le produit des modules, l'argument d'un produit de nombres complexes est la somme des arguments (à 2kπ près)

3) Quotient (Rappel : $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ on utilisera l'écriture exponentielle/polaire si possible)

$$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z'}} = \frac{Ze^{j.\theta}}{Z'e^{j.\theta'}} = \frac{Z}{Z'}e^{j(\theta-\theta')}$$ on en déduit que :

$$\mathbf{arg}\left(\frac{\underline{\mathbf{Z}}}{\underline{\mathbf{Z'}}}\right) = \mathbf{arg}(\underline{\mathbf{Z}}) - \mathbf{arg}(\underline{\mathbf{Z}}') + \mathbf{2k}\boldsymbol{\pi}, \ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}, \text{ et } \left|\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}'}\right| = \frac{|\underline{Z}|}{|\underline{Z}'|}$$

$$\frac{[\mathbf{Z} , \boldsymbol{\theta}]}{[\mathbf{Z}' , \boldsymbol{\theta}']} = [\frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Z}'} , \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}']$$

Le module d'un quotient de nombres complexes est le quotient des modules, l'argument d'un quotient de nombres complexes est la soustraction des arguments (à 2kπ près)

Cas particulier : (Rappel : $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$) $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z.e^{j.\theta}} = \frac{1}{Z}.e^{-j.\theta}$ avec $\underline{Z} \neq 0$. On en déduit que :

$\arg\left(\frac{1}{\underline{Z}}\right) = -\arg(\underline{Z}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et $\left|\frac{1}{\underline{Z}}\right| = \frac{1}{|\underline{Z}|}$ $\frac{1}{[Z , \theta]} = [\frac{1}{Z} , -\theta]$

Le module de l'inverse d'un nombre complexe est l'inverse de son module, l'argument de l'inverse d'un nombre complexe est l'opposé de son argument (à 2kπ près)

4) Puissances n^ième^ d'un nombre complexe (n est un entier naturel)

Rappel : $\left(e^{p}\right)^{n} = e^{p.n}$ et $(a.b)^{n} = a^{n}.b^{n}$)

$$\underline{Z}^{n} = \left(Ze^{j.\theta}\right)^{n} = Z^{n}.e^{n.j.\theta} \quad \text{on en déduit que :}$$

$$\mathbf{arg}\left(\underline{\mathbf{Z}}^{n}\right) = \mathbf{n} \times \mathbf{arg}(\underline{Z}) + \mathbf{2k}\boldsymbol{\pi}\text{ , } \mathbf{k} \in \mathbb{Z} \text{ , et } \left|\underline{\mathbf{Z}}^{n}\right| = \left|\underline{\mathbf{Z}}\right|^{n}$$

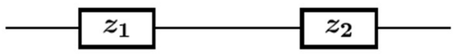
$$[\mathbf{Z}\,,\boldsymbol{\theta}]^{\boldsymbol{n}} = [\,\boldsymbol{Z^n}\,,\mathbf{n}.\boldsymbol{\theta}]$$

Le module de $\underline{\mathbf{Z}}^{\mathbf{n}}$ est le module de $\underline{\mathbf{Z}}$ à la puissance n, l'argument de $\underline{\mathbf{Z}}^{\mathbf{n}}$ est n fois l'argument de $\underline{\mathbf{Z}}$ (à 2kπ près)

III. Application au GEII

Soient les deux nombres complexes : $\boldsymbol{z_1 = 1 + j3}$ et $\boldsymbol{z_2 = 2 + j4}$.
Calculer le module, l'argument, la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

1. $\boldsymbol{z_1 + z_2}$ En génie électrique, ce calcul correspond à calculer l'impédance équivalente de deux impédances montées en série ($\boldsymbol{z_{eq} = z_1 + z_2}$).



…………………………………………………………………………………………………...

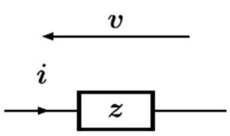
…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

2. $\boldsymbol{z_1.z_2}$ Cela correspond par exemple à calculer en régime sinusoïdal établi, la tension complexe $\boldsymbol{v}$ aux bornes d'une impédance $\boldsymbol{z = 1 + 3j}$ traversée par un courant $\boldsymbol{i = 2 + 4j}$ ($\boldsymbol{v = z.i}$).



……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

3. $\frac{z_1}{z_2}$. Cela correspond à calculer le courant $\boldsymbol{i}$ qui traverse une impédance $\boldsymbol{z = 2 + 4j}$ ayant une tension $\boldsymbol{v = 1 + 3j}$ à ses bornes $\left(\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{z}}\right)$.

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

Notes

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

Notes

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

Exercices

Exercice 1

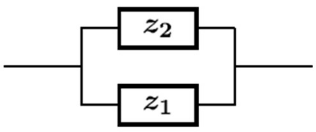
Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$\underline{Z}_1 = 4 + 3j$; $\underline{Z}_2 = -5 + 3j$; $\underline{Z}_3 = \sqrt{7} - j\sqrt{2}$

$\underline{Z}_4 = \left(-\sqrt{3} + j\right).(1 + j)$; $\underline{Z}_5 = \frac{-\sqrt{3}+j}{1+j}$; $\underline{Z}_6 = \left(-\sqrt{3} + j\right)^{10}$; $\underline{Z}_7 = \frac{1}{1+j}$

Exercice 2

Soient les deux nombres complexes : $\boldsymbol{z_1 = 2 - j3}$ et $\boldsymbol{z_2 = 5 + j}$.
Calculer l'argument du nombre complexe $\boldsymbol{z}$ défini par : $\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$. Ce calcul correspond au calcul de l'impédance équivalente de deux impédances $\boldsymbol{z_1}$ et $\boldsymbol{z_2}$ montées en parallèle.



Exercice 3 Dans les impédances suivantes R, L,C et ω sont des nombres réels strictement positifs ; déterminer leurs module et argument :
$\underline{Z}_1 = R + j.L.\omega$; $\underline{Z}_2 = R + \frac{1}{j.C.\omega}$; $\underline{Z}_3 = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$; $\underline{Z}_4 = \frac{jRL\omega}{R+jL\omega}$

$\underline{Z}_5 = \frac{(1+jx)^{10}}{(1-jx)^6}$ où x est un nombre réel.

Exercice 4 Soit $\underline{U} = \underline{I}\left(R - \frac{j}{C\omega}\right)$ l'expression complexe de la tension aux bornes de l'association en série comprenant une résistance R et un condensateur C. Déterminer le module et un argument de I, nombre complexe associé à l'intensité i du courant dans le circuit.

Exercice 5 Résolution d'équations du second degré :

Rappel : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$.
Pour résoudre l'équation $P(x) = 0$, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
- Si $\Delta > 0$, P possède deux racines réelles : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, P possède une racine réelle double : $x_1 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, P possède deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-b+j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Résoudre l'équation $1 + z + z^2 = 0$

Partie D : Exercices d'entraînement pour les poursuites d'études longues

Exercice 1

a, b et c sont des nombres complexes : Soit $P(z) = az^2 + bz + c$ avec $a \neq 0$:
pour résoudre $P(z) = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ qui est un nombre complexe. On cherche alors les racines carrées de Δ, par définition, ce sont les deux solutions δ_1 et δ_2 de l'équation : $\delta^2 = \Delta$

P possède alors deux racines : $z_1 = \dfrac{-b - \delta_1}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \delta_2}{2a}$

a) Résoudre l'équation : $z^2 + 2(1 + j)z + 4j = 0$
b) Résoudre l'équation : $z^2 + (2 - j)z - 2j = 0$

Exercice 2 Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

a) $\underline{Z} = \dfrac{1 + j.\tan\theta}{1 - j.\tan\theta}$, puis l'écrire sous forme géométrique.

b) $\underline{Z} = e^{4jx} + e^{2jx}$ où $x \in [0, \pi]$. (Indication : factoriser par e^{3jx})

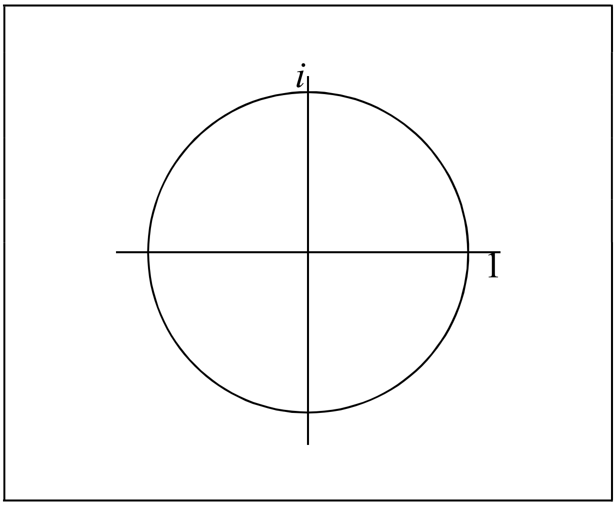
c) $\underline{Z} = \ln x.e^{jx}$; $0<x<1$

Exercice 3 **Pour aller plus loin….** Simplifier l'expression suivante :
$C = 1 + \cos\theta + \cos(2\theta) + ... + \cos(n\theta)$

Indication : Montrer que C est la partie réelle de $S = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + ... + e^{in\theta}$, et on rappelle la formule : $1 + a + a^2 + ... + a^n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$; avec $a \neq 1$

Exercice 4 **Annales du concours d'entrée à l'ITII**

(a) Placer sur la figure ci-dessous les solutions de l'équation $z^3 = i$:



(b) Soit S l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = i$. Calculer les valeurs possibles de la fonction *f(z)* ci-dessous lorsque *z* parcourt S, puis calculer la somme de ces valeurs :

$$f(z) = \frac{1+z+z^2+z^3+z^4+z^5}{1-\bar{z}} \qquad (z \neq 1)$$

$z \in S \;\Rightarrow\; f(z) =$

$$\sum_{z \in S} f(z) =$$

(c) On considère l'équation : $\left(\dfrac{z}{\bar{z}}\right)^n - \left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)^n = i\sqrt{2} \quad , \quad (|z| \neq 0)$,

et on note S^* l'ensemble de ses solutions.

$$z \in S^* \Rightarrow \begin{cases} \textit{Le module de z est de la forme } \rho = \\ \\ \textit{L'argument de z est de la forme } \theta = \end{cases}$$

Pour $n=2$ tracer sur la figure ci-dessus les éléments de S^* tels que $|z| \leq 1$.