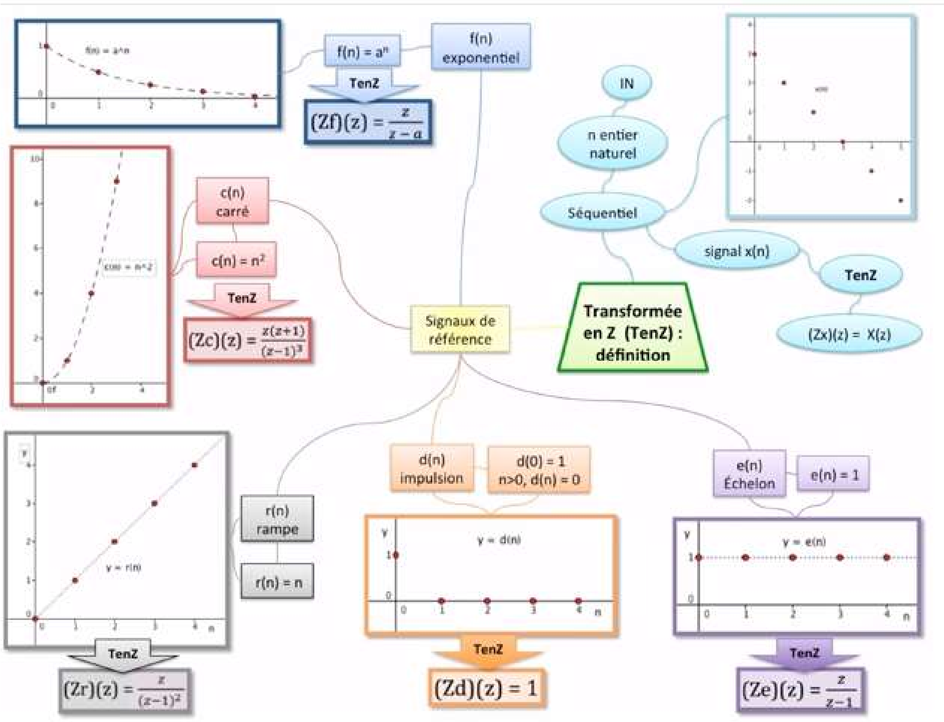
UNIVERSITE DE TOULON

IUT DE TOULON

DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques

Chapitre 2 : Transformation en Z



Enseignant : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr
Bureau A042 - 04 94 14 21 15
http://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=527

Transformation en Z

I. Définitions et exemples :

1) Séquence numérique

Soit f, une fonction causale et $T_e>0$, on appelle séquence numérique associée à f la suite des valeurs obtenues par échantillonnage de f selon la période T_e :

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ k &\mapsto f(kT_e) \end{aligned}$$

On notera : $f_e=\{ f(kT_e) ; k\in \mathbb{N} \}$ ou $f_e=\{ f(kT_e) \}$

f_e est aussi appelée fonction échantillonnée de f, T_e la période d'échantillonnage, et $f(kT_e)$ est l'échantillon de rang k.

2) Transformée en Z .

Soit $f_e=\{ f(kT_e) \}$, une séquence échantillonnée, on appelle transformée en Z de f_e la fonction F de la variable complexe z définie par : $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)\, z^{-k}$

On note : $F=TZ(f_e)$ ou encore $F(z)=TZ(\{ f(kT_e)\})$.

D_F est l'ensemble de définition F, c'est l'ensemble des nombres complexe z pour lesquels la série $\sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)\, z^{-k}$ converge.

On admet que F est infiniment dérivable sur D_F .

Rappel Suite géométrique de raison a : $\left(a^k\right)_k$

$\lim_{k\to\infty} a^k =$ ……………………………………………………………………………………

Série géométrique de raison a : $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$

$\sum_{k=0}^{n} a^k =$ ……………………………………………………………………………..................

3) Transformée en Z de séquences usuelles

- Suite échelon unité : en supposant $T_e=1$, $U_e=\{U(k)\ ;\ k \in IN\}$

U(k)=…………………………………………………………………………………………

Donc F(z)= ……………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

- Suite de Dirac : en supposant $T_e=1$, la suite de Dirac, notée δ est définie par :

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 0 \\ 0 \text{ si } k \in IN^* \end{cases}$$

Donc F(z)= ……………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

- Suite de Dirac retardé : en supposant $T_e=1$, la suite de Dirac retardée de n, notée δ_n est définie par : $\delta_n(k) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = n \\ 0 \text{ si } k \neq n \end{cases}$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

……

……

……

……

……

……...

……

……

……………………………………………………………………………………………………......

……

………………………………………………………………………………………………………

……

……

……

……

……

……...

……

……

……………………………………………………………………………………………………......

……

………………………………………………………………………………………………………

……

……

……

………………………………………………………………………………………………………

- Suite exponentielle : Soit $f(x) = a^{x}.U(x)$ $a \in \mathbb{C}$ alors $f_e = \{a^{kT_e}.U(kT_e)\}$ est la séquence numérique associée.

Donc F(z)= …………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………..

En particulier si T_e=1 :……………………………………………………………………..

II. <u>Propriétés de la transformation en Z</u> :

1) <u>Linéarité</u>

> **Soient $\alpha,\beta \in IC$, Soient $f_e = \{f(kT_e), k \in IN\}$ et $g_e = \{g(kT_e), k \in IN\}$ deux fonctions échantillonnées de même période d'échantillonnage.**
>
> $$\mathbf{TZ(\alpha f_e + \beta g_e) = \alpha\ TZ\ (f_e) + \beta\ TZ\ (g_e)}.$$

<u>Exemples</u>

- TZ($\{\cos(k\omega T_e)U(kT_e)\}$)=……………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………………

- $TZ(\{\sin(k\omega T_e)U(kT_e\})=$………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2) Séquence numérique retardée

Soient $f_e = \{f(kT_e), k \in IN\}$ et $n \in IN$. On note $f_{ret} = \{f(kT_e - nT_e), k \in IN\}$, le signal numérique retardé de n du signal f_e.
Alors : $TZ(f_{ret})=z^{-n}.TZ(f_e)$

Démonstration

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Cas particulier pour T_e=1 et n=1, on obtient :

…………………………………………………………………………………………………...

Le retard se traduit donc par la multiplication par z^{-1}.

Exemple

TZ(U(k-3))=…………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3) Séquence numérique avancée

Soient $f_e = \{f(kT_e), k \in IN\}$ et $n \in IN$. On note $f_{av} = \{f(kT_e + nT_e), k \in IN\}$, le signal numérique avancé de n du signal f_e. On a alors :

$$TZ(f_{av})=z^n.[\,TZ(f_e)-f(0)-f(T_e)z^{-1}-f(2T_e)z^{-2}-\ldots-f((n-1)T_e)z^{-n+1}]$$

Démonstration

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

Cas particulier pour T_e=1, on obtient :

$TZ(\{f(k+1)\})$=……………………………………………………………………………

$TZ(\{f(k+2)\})$=……………………………………………………………………………

Si en plus f(0)=0, alors $TZ(\{f(k+1)\})$=……………………………………………………...

L'avance se traduit donc par la multiplication par z.

Exemple

TZ(U(k+3))=…………………………………………………………………………………..

3) Transformée de $\{a^{kT_e}.f(kT_e)\}$

$$TZ(\{a^{kT_e}.f(kT_e)\})=F\left(\frac{z}{a^{T_e}}\right) \text{ où } F(z)=TZ(f_e)$$

Démonstration

……

……

……

……

………………………………………………………………………………………………………

……

……

……

……

……

………………………………………………………………………………………………………...

……

……

……………………………………………………………………………………………………......

……

………………………………………………………………………………………………………

……

……

……

……

……

………………………………………………………………………………………………………..

……

……

……………………………………………………………………………………………………......

Exemple

$TZ(\{e^{-k}\cos(k\omega)U(k)\}) =$ ……………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

4) Transformée de $\{kT_e.f(kT_e)\}$

$$\boldsymbol{TZ(\{kT_e.f(kT_e), k \in IN\}) = -zT_e.F'(z) \text{ où } F(z) = TZ\ (f_e)}$$

Démonstration

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………..

....

…………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Exemples

$TZ(\{kU(k)\})=$…………………………………………………………………………………………

$TZ(\{k^2U(k)\})=$………………………………………………………………………………………..

$TZ\left(\left\{(k^2+2k-3)U(k-2)\right\}\right)=$……………………………………………………………………...

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

III. Transformation en Z inverse :

1) Définition / Théorème

On admet que la transformation en Z est inversible, et on note TZ^{-1} la transformation en Z inverse. On a donc :

$$TZ(f_e)=F \Leftrightarrow f_e=TZ^{-1}(F) \text{ ou encore : } TZ(f(kT_e))=F(z) \Leftrightarrow f(kT_e)=TZ^{-1}(F(z))$$

Exemples On posera, lorsque cela n'est pas précisé $T_e=1$.

$TZ^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right)=$ ……………………… $TZ^{-1}\left(\frac{z}{z-a^{T_e}}\right)=$ ………………………

$TZ^{-1}\left(\frac{z}{z-3}\right)=$ ……………………… $TZ^{-1}\left(\frac{z/2}{z^2-z\sqrt{3}+1}\right)=$ ………………………

$TZ^{-1}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)=$ ……………………… $TZ^{-1}\left(\frac{1}{z^3}\right)=$ ………………………

2) Propriétés

Linéarité : Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, $TZ^{-1}(\alpha F+\beta G)=\alpha\, TZ^{-1}(F)+\beta\, TZ^{-1}(G)$

Retard de n : $TZ^{-1}(z^{-n}.F(z)) = f(kT_e-nT_e)$ où $f(kT_e)=TZ^{-1}(F(z))$

Etc…

Exemples On posera $T_e=1$

$TZ^{-1}\left(\frac{1}{z-1}\right)=$ ………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

$TZ^{-1}\left(\frac{1}{z(z-3)}\right)=$ ………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

$TZ^{-1}\left(\frac{z^2-z}{z^2-2z+4}\right)=$ ………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3) Deux méthodes pour déterminer $TZ^{-1}(F)$ sur un exemple

On souhaite calculer $TZ^{-1}(F)$ où $TZ^{-1}\left(\dfrac{1}{(z-1).(z-2)}\right)$

- Méthode 1 On décompose F en somme d'éléments simples dans IR :

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

- <u>Méthode 2</u> Par définition : $F(z) = TZ(f(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$. On écrit donc $F(z) = \dfrac{1}{(z-1).(z-2)}$ sous la forme $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$, afin d'obtenir les valeurs de f(k). Pour cela on effectue la <u>division suivant les puissances décroissantes</u> de 1 par (z-1)(z-2).

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………….......

……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

4) Résolution d'une équation aux différences

On appelle équation aux différences linéaire d'ordre 1, toute équation de la forme :
(E) $a.s(k-1)+b.s(k)=f(k)$ où k>0 est un entier naturel f(k) une suite donnée, a, b des réels et s(k) une suite inconnue. Résoudre (E) c'est rechercher toutes les suites s(k) vérifiant (E)

(E) $\begin{cases} a.s(k-1)+b.s(k)=f(k) \\ s(0)=s_0 \end{cases}$ $s(0)=s_0$ est appelée condition initiale de l'équation (E).

On admet que (E) admet une unique solution.

On appelle équation aux différences linéaire d'ordre 2, toute équation de la forme :
(E) $a.s(k-2)+b.s(k-1)+c.s(k)=f(k)$ où k>1 est un entier naturel f(k) une suite donnée, a, b,c des réels et s(k) une suite inconnue. Résoudre (E) c'est rechercher toutes les suites s(k) vérifiant (E)

(E) $\begin{cases} a.s(k-1)+b.s(k)=f(k) \\ s(0)=s_0 \\ s(1)=s_1 \end{cases}$ $\begin{cases} s(0)=s_0 \\ s(1)=s_1 \end{cases}$ sont appelées conditions initiales de l'équation (E). On admet que (E) admet une unique solution.

Exemple Déterminer la suite s(k) telle que :

$$(E)\begin{cases} s(k)-3.s(k-1)+2.s(k-2)=\delta_2(k) \\ s(0)=s(1)=0. \end{cases}$$

Appliquons la transformation en Z à (E). Pour cela, on pose Y(z)=TZ(s(k)).

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Transformation en Z

Soit f_e, une séquence numérique associée à la fonction réelle f de période d'échantillonnage T_e : $f_e = \{f(k.T_e)\,;\, k \in N\}$.

Transformée en Z de f_e : $TZ(f_e) = F(z) = \sum_{k\geq 0} f(k.T_e).z^{-k}$. F est définie pour tout z complexe tel que :

$|z| > \frac{1}{R}$ (R étant le rayon de convergence de la série entière : $\sum_{k\geq 0} f(k.T_e).z^k$).

Z est une application inversible : $TZ(f_e) = F(z) = \sum_{n\geq 0} f(k.T_e).z^{-k} \Leftrightarrow f_e = TZ^{-1}(F)$.

Transformées en Z de séquences numériques usuelles (T_e est quelconque)

$f_e=\{f(kT_e)\}=TZ^{-1}(F)$	$TZ(f_e) = F(z) = \sum_{k\geq 0} f(kT_e).z^{-k}$
δ_n où n est un entier naturel	z^{-n} ; $z \neq 0$
$U(kT_e)$	$\frac{z}{z-1}$; $\|z\| > 1$
$kT_e.U(kT_e)$	$\frac{z.T_e}{(z-1)^2}$; $\|z\| > 1$
$a^{kT_e}.U(kT_e)$	$\frac{z}{z-a^{T_e}}$; $\|z\| > \|a^{T_e}\|$
$\cos(\omega kT_e).U(kT_e)$	$\frac{z^2 - z\cos(\omega T_e)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_e)+1}$; $\|z\| > 1$
$\sin(\omega kT_e).U(kT_e)$	$\frac{z\sin(\omega T_e)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_e)+1}$; $\|z\| > 1$
$a^{kT_e}.\cos(\omega kT_e).U(kT_e)$	$\frac{z^2 - a^{T_e}z\cos(\omega T_e)}{z^2 - 2a^{T_e}z\cos(\omega T_e)+a^{2T_e}}$; $\|z\| > \|a^{T_e}\|$
$a^{kT_e}.\sin(\omega kT_e).U(kT_e)$	$\frac{a^{T_e}z\sin(\omega T_e)}{z^2 - 2a^{T_e}z\cos(\omega T_e)+a^{2T_e}}$; $\|z\| > \|a^{T_e}\|$

Propriétés de la transformation en Z

$f_e=\{f(kT_e)\}=TZ^{-1}(F)$	$TZ(f_e) = F(z) = \sum_{k\geq 0} f(kT_e).z^{-k}$
$\alpha f_e + \beta g_e$	$\alpha F(z) + \beta G(z)$; $\lvert z\rvert > \max(\frac{1}{R_1};\frac{1}{R_2})$
$kT_e.f(kT_e)$	$-T_e.z.F'(z)$; $\lvert z\rvert > \frac{1}{R}$
$a^{kT_e}.f(kT_e)$	$F(\frac{z}{a^{T_e}})$; $\lvert z\rvert > \frac{\lvert a^{T_e}\rvert}{R}$
Séquence retardée de pT_e : $f(kT_e-pT_e)$	$z^{-p}.F(z)$; $\lvert z\rvert > \frac{1}{R}$
Séquence avancée de pT_e : $f(kT_e+pT_e)$	$z^p.\left[F(z) - f(0) - f(T_e).z^{-1} - \ldots - f((p-1)T_e).z^{-(p-1)}\right]$ $\lvert z\rvert > \frac{1}{R}$
$\sum_{n=0}^{k} f(nT_e)$	$\frac{z}{z-1}.F(z)$
Produit de convolution : $(f_e * g_e)(k) = \sum_{n=0}^{k} f(nT_e)g(kT_e - nT_e)$	$F(z).G(z)$; $\lvert z\rvert > \max(\frac{1}{R_1};\frac{1}{R_2})$

Théorème de la valeur initiale : $\lim_{\lvert z\rvert\to\infty} F(z) = f(0)$.

Théorème de la valeur finale : $\lim_{z\to 1}(1-\frac{1}{z}).F(z) = \lim_{k\to\infty} f(kT_e)$.

IV. Exercices

Exercice 1 :

Déterminer la transformées en Z des séquences {f(k)} de période 1 définies par :

$f(k)=(2k-3)U(k)$; $f(k)=k.U(k-1)$; $f(k)=5^kU(k)$; $f(k)=3^{-k}U(k)$; $f(k)=\dfrac{3^k}{2^k}.U(k)$;

$f(k)=(k^2+2k-3)U(k-2)$; $f(k)=2^{-k}[U(k)-U(k-n)]$; $f(k)=e^{-k}\cos(k\omega)U(k)$

Exercice 2 : Trouver les originaux de :

$$F(z)=\frac{z-1}{z+3} \quad ; \quad F(z)=\frac{1}{z^2-9z+20}$$

$$F(z)=\frac{z}{z^2+4} \quad ; \quad F(z)=\frac{1}{z^3-1}$$

Exercice 3 : Soit l'équation :

$$(E)\begin{cases} y(k)-ay(k-1)=x(k), k\geq 1 \\ y(0)=x(0). \end{cases}$$

On pose X(z)=TZ(x(k)) et Y(z)=TZ(y(k)), appliquer TZ à l'équation (E), puis en déduire la fonction de transfert $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}$.

Déterminer alors l'expression de la réponse impulsionnelle ($x=\delta$) ; de la réponse indicielle (x=U) ; de la réponse harmonique ($x(k)=e^{ik\omega}$).

Exercice 4 : Résoudre l'équation aux différences du second ordre :

$$\begin{cases} y(k+2)-2y(k+1)+2y(k)=U(k) \\ y(0)=0\,,\ y(1)=1. \end{cases}$$

……

……

……

……

……

……...

……

……

……………………………………………………………………………………………………......

……

……

……

……

……

……...

……

……

……………………………………………………………………………………………………….......

……

……

……

……

……

……...

……

……

……………………………………………………………………………………………………….......

……

……

……

……

……

……...

……

……

……