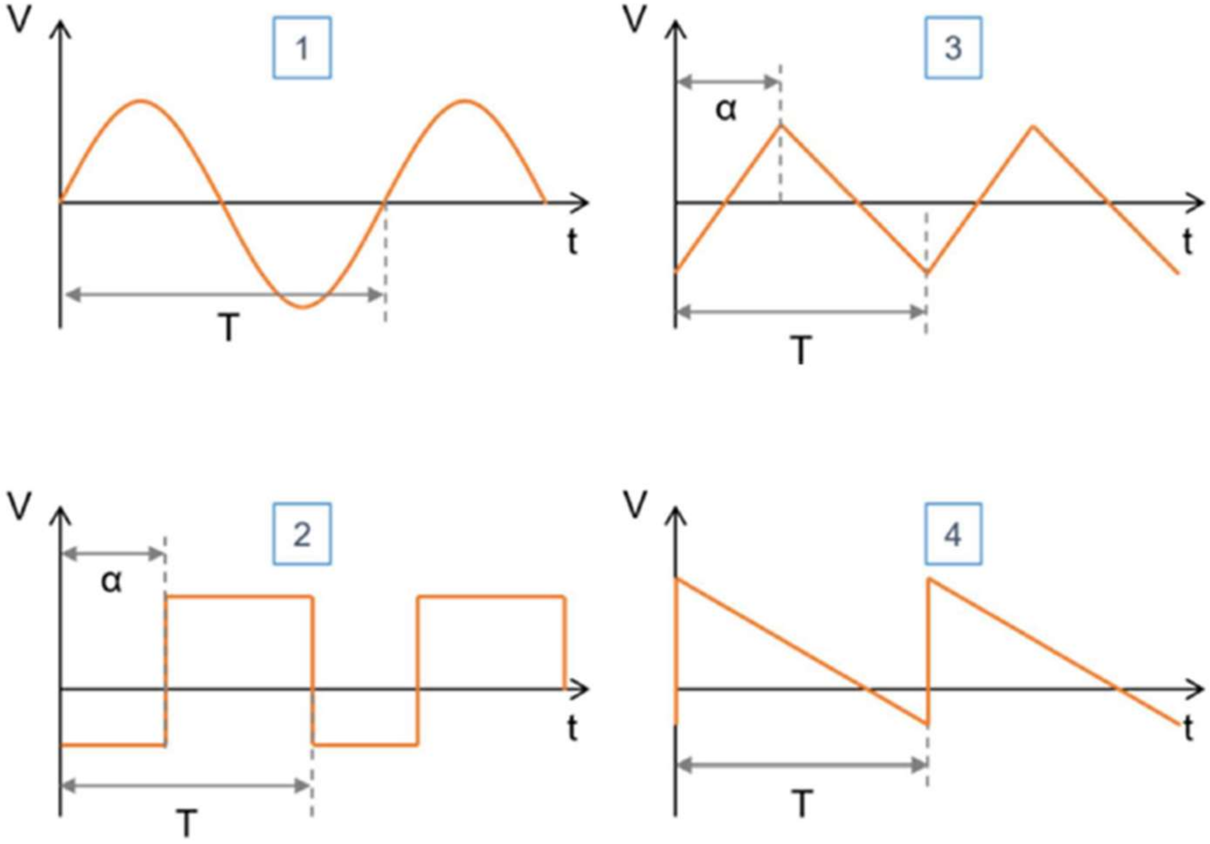
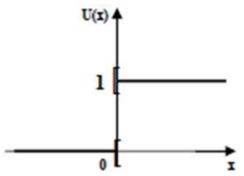
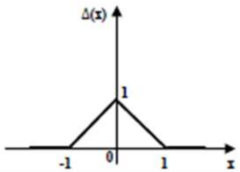
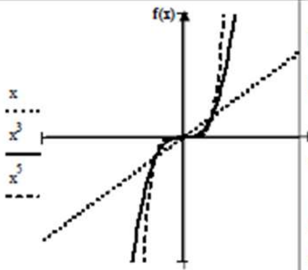
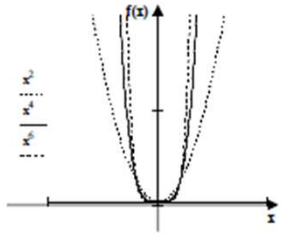
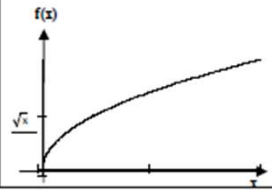
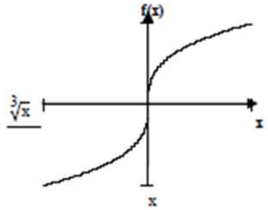
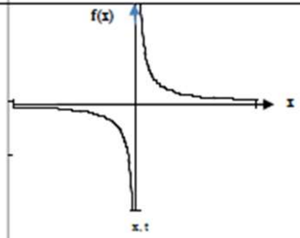
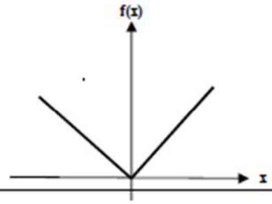
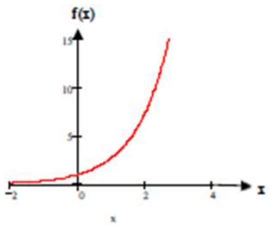
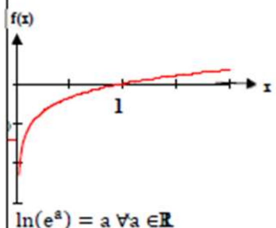
Chapitre 2 : Fonctions numériques à variable réelle.
Signaux du GEII



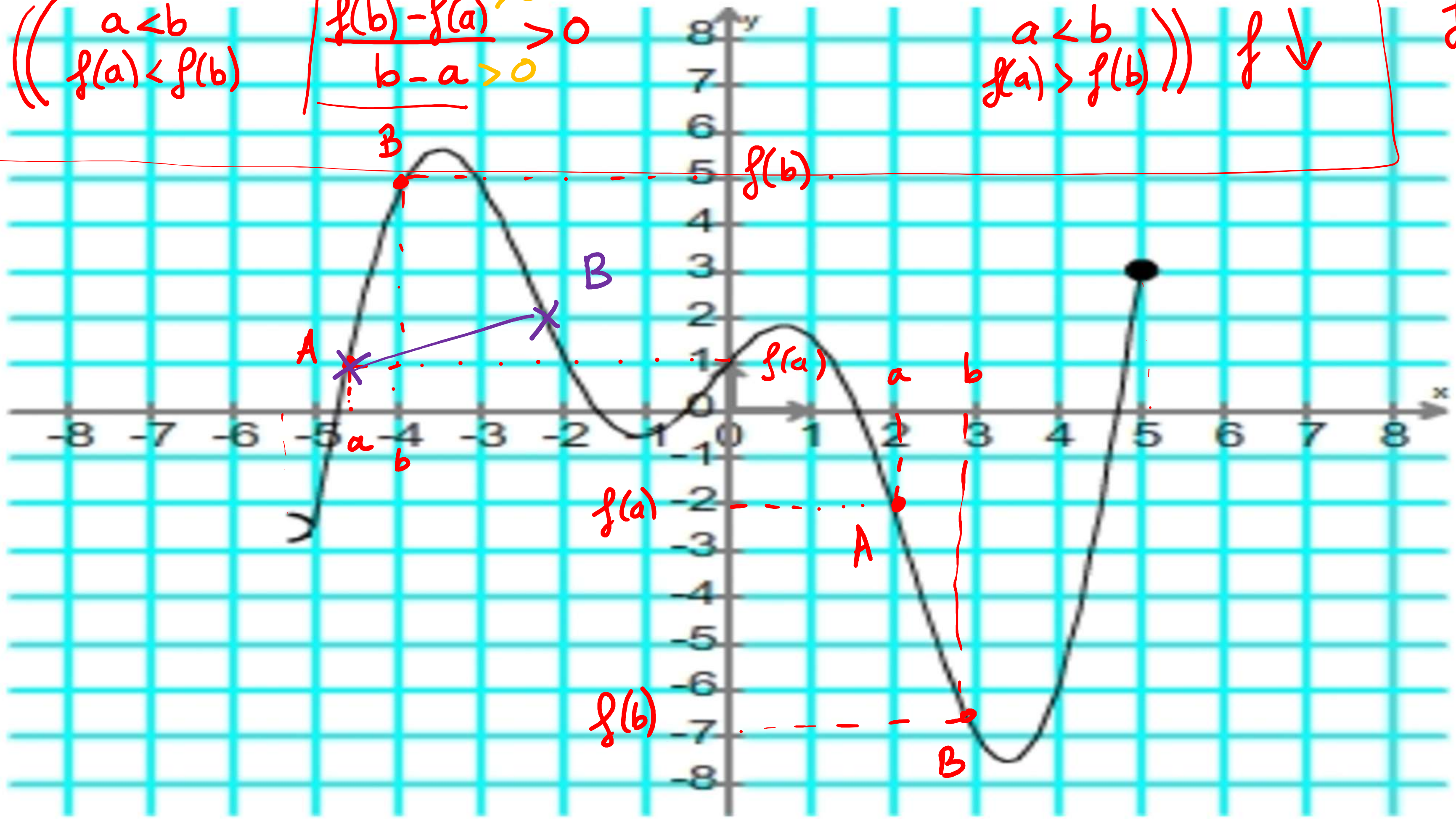
Echelon-unité : (Heaviside Φ) $U : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ $x \longmapsto U(x)$ avec $U(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $U(\mathbb{R}) = \{0,1\}$ On dit que la fonction U est continue sur $\mathbb{R}$, sauf en 0. $\lim_{x\to 0^-} U(x) = 0$ $\lim_{x\to 0^+} U(x) = 1$
Triangle : (notée aussi tri) $\Delta : \mathbb{R} \longrightarrow [0;1]$ $x \longmapsto \Delta(x)$ $\Delta(x) = \begin{cases} 1 - \lvert x\rvert \text{ si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : [0 ; 1] On dit que la fonction triangle est continue sur $\mathbb{R}$.
Puissance impaire : $n \in \mathbb{N}$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto f(x) = x^{2n+1}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $\mathbb{R}$ On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
Puissance paire : $n \in \mathbb{N}$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto f(x) = x^{2n}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $\mathbb{R}_+ = [0;+\infty[$ On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
Racine carrée : $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto f(x) = \sqrt{x}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}_+$ Ensemble image : $\mathbb{R}_+$ On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

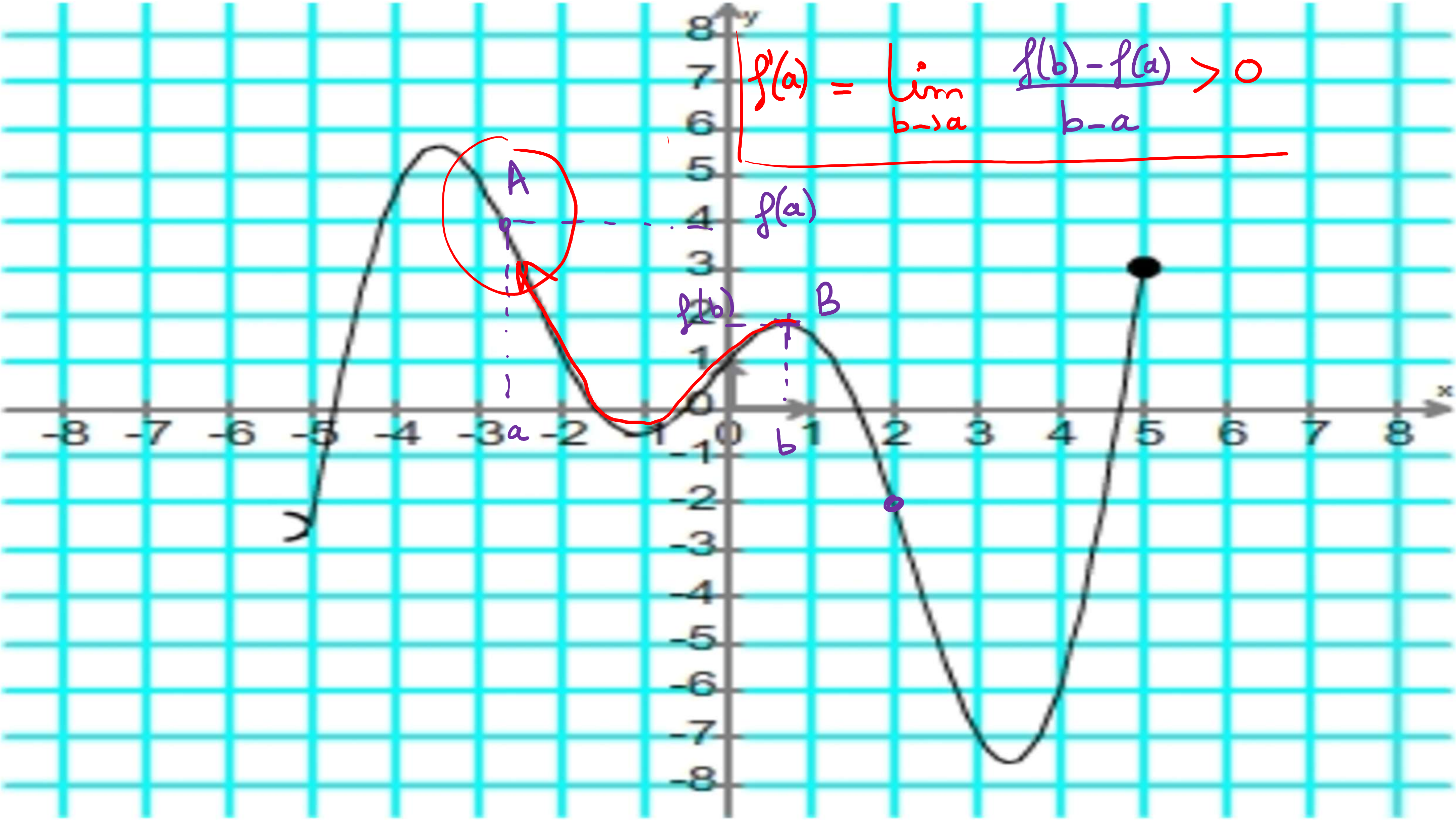
Racine cubique : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto f(x) = \sqrt[3]{x}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $\mathbb{R}$ On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
Inverse : $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ $x \longmapsto f(x) = 1/x$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}^*$ Ensemble image : $\mathbb{R}^*$ f est continue sur $]0;+\infty[$ f est continue sur $]-\infty;0[$ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
Valeur absolue : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto f(x) = \lvert x\rvert$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $\mathbb{R}_+$ f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
Exponentielle : $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0;+\infty[$ $x \longmapsto f(x) = e^x$ $e^0 = 1$ $e^{a+b} = e^a \times e^b$; $(e^a)^n = e^{a.n}$ $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $]0;+\infty[= \mathbb{R}^*_+$ f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
Logarithme népérien : $f :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto f(x) = \ln(x)$ $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$ $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ $\ln(a^n) = n.\ln(a)$	 $\ln(e^a) = a \ \forall a \in \mathbb{R}$ $e^{\ln(a)} = a \ \forall a > 0$	Ensemble de définition : $\mathbb{R}^*_+$ Ensemble image : $\mathbb{R}$ f est continue sur $\mathbb{R}^*_+$ $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

<u>Problématique</u> : comment déterminer le sens de variation d'une fonction ?

f est ↑ $\left(\left(\begin{array}{c} a<b \\ f(a)<f(b) \end{array} \right.\right.$ $\left| \dfrac{f(b)-f(a)^{>0}}{b-a>0} > 0 \right.$

$\left.\left. \begin{array}{c} a<b \\ f(a)>f(b) \end{array} \right)\right)$ f ↓ $\dfrac{f(b)-f(a)<0}{b-a>0} < 0$





$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$
A
B
f(a)
f(b)
a
b
x
y

Page 14 chapitre 3

III. Dérivabilité

1) Définitions et opérations

Soit f, une fonction définie en a, on dit que f est dérivable en a lorsque : la limite suivante $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On la note alors $\boxed{f'(a)}$ et on l'appelle nombre dérivé de f en a.

....

....

....

....

....

....

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ **existe et est finie. On la note alors** $\boxed{f'(a)}$

Page 14 chapitre 3

Exemples

$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

✓ Soit f, la fonction définie par : $f(x) = x^2$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Forme Indéterminée

Dérivabilité de f en 3 : $L = \lim\limits_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ F.I

$L = \lim\limits_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} = \lim\limits_{x \to 3} x+3 = 6$ est finie, donc

f est dérivable en 3 et son nombre dérivé vaut : $f'(3) = 6$

Dérivabilité de f en a, réel quelconque : $L = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ FI

$L = \lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}} = \lim_{x \to a} x + a = 2a$ est finie donc f est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ et $f'(a) = 2a$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$ $D_{f'} = \mathbb{R}$.

Soit f, une fonction définie en a, on dit que f est dérivable en a lorsque : la limite suivante $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On la note alors $f'(a)$ et on l'appelle nombre dérivé de f en a.

Page 14 chapitre 3

Soit f, une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que f est dérivable sur I, lorsque f est dérivable en tout point a de I. On appelle alors fonction dérivée de f et on note f ', la fonction qui à tout élément a de I, associe son nombre dérivé $f'(a)$.

Si f et g sont dérivables sur I, alors : αf, f+g, $f \times g$ et f/g (avec $g \neq 0$) sont dérivables sur I. (α est un nombre réel) et $(\alpha f)' = \alpha f'$, $(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$ et $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur f(I), alors $g \circ f$ est dérivable sur I et : $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

$g \circ f = g(f) = \sin(U)$ .... $g' = \cos$ ....

$(g \circ f)' = (\sin(U))' = \cos(U) \times U'$ ....

$x^{-5} = \frac{1}{x^5}$

Page 16 chapitre 3

2) Formulaire $\boxed{\text{U est une fonction dérivable sur I.}}$

Cas particulier $U = x$ — Cas général

$(x^n)' = n.x^{n-1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N} - \{1\}$	$x \to U$ $(\mathbf{U^n})' = \mathbf{n.U'.U^{n-1}}$, $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$ $U' = 1$ $U = x$ $= (x^{1/2})' = \frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{x}}$	$(\sqrt{\mathbf{U}})' = \frac{\mathbf{U'}}{\mathbf{2\sqrt{U}}}$, $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}_+^*$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $= (x^{-1})' = -1.x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{U}}\right)' = \frac{\mathbf{-U'}}{\mathbf{U^2}}$, $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}^*$
$(e^x)' = e^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$	$(\mathbf{e^U})' = \mathbf{U'.e^U}$, $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$	$(\mathbf{ln(U)})' = \frac{\mathbf{U'}}{\mathbf{U}}$, $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}_+^*$

Page 16 chapitre 3

$(\sin(x))' = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$\mathbf{(\sin(U))' = U'.\cos(U) \quad , \quad U(I) \subseteq \mathbb{R}}$
$(\cos(x))' = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$\mathbf{(\cos(U))' = -U'.\sin(U) \quad , \quad U(I) \subseteq \mathbb{R}}$
$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbf{(\tan(U))' = \frac{U'}{\cos^2(U)} = \left(1 + \tan^2(U)\right).U'}$ $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$

Page 16&17 chapitre 3

Exemples

✓ $f(x) = (2x - 3).\cos x$

$(U.V)' = U'V + UV'$

$D_f =$ $\mathbb{R}$

$f'(x) = 2.\cos x + (2x-3).(-\sin x) = 2\cos x - (2x-3)\sin x$

$D_{f'} =$ $\mathbb{R}$

sinus cardinal de x et se note $\text{sinc}(x)$

✓ $g(x) = \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

$D_g =$ $\mathbb{R}^*$

$g'(x) = \frac{(\sin x)'.x - \sin x.(x)'}{x^2} = \frac{x.\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$

$D_{g'} = \mathbb{R}^*$

Page 17 chapitre 3

$D_{g'} = \mathbb{R}^*$

✓ $i(t) = V_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$

$\boxed{(\underbrace{\alpha}_{\text{constante}} \cdot U)' = \alpha \cdot U'}$

$(\cos U)' = -U' \cdot \sin U$

$D_i = \mathbb{R}$ ici $U = \omega t + \varphi \Rightarrow U' = \omega$

$i'(t) = V_{eff}\sqrt{2} \cdot \left(\cos(\omega t + \varphi)\right)' = -V_{eff}\sqrt{2} \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

$D_{i'} = \mathbb{R}$

✓ $h(t) = (t^2 + 5)^{10}$ $(U^n)' = n.U^{n-1}.U'$

Page 17 chapitre 3

$D_h =$ $\mathbb{R}$

$h'(t) = 10 \times 2t \times (t^2+5)^9 = 20t.(t^2+5)^9$

$U = t^2+5 \Rightarrow U' = 2t$

$D_{h'} =$ $\mathbb{R}$

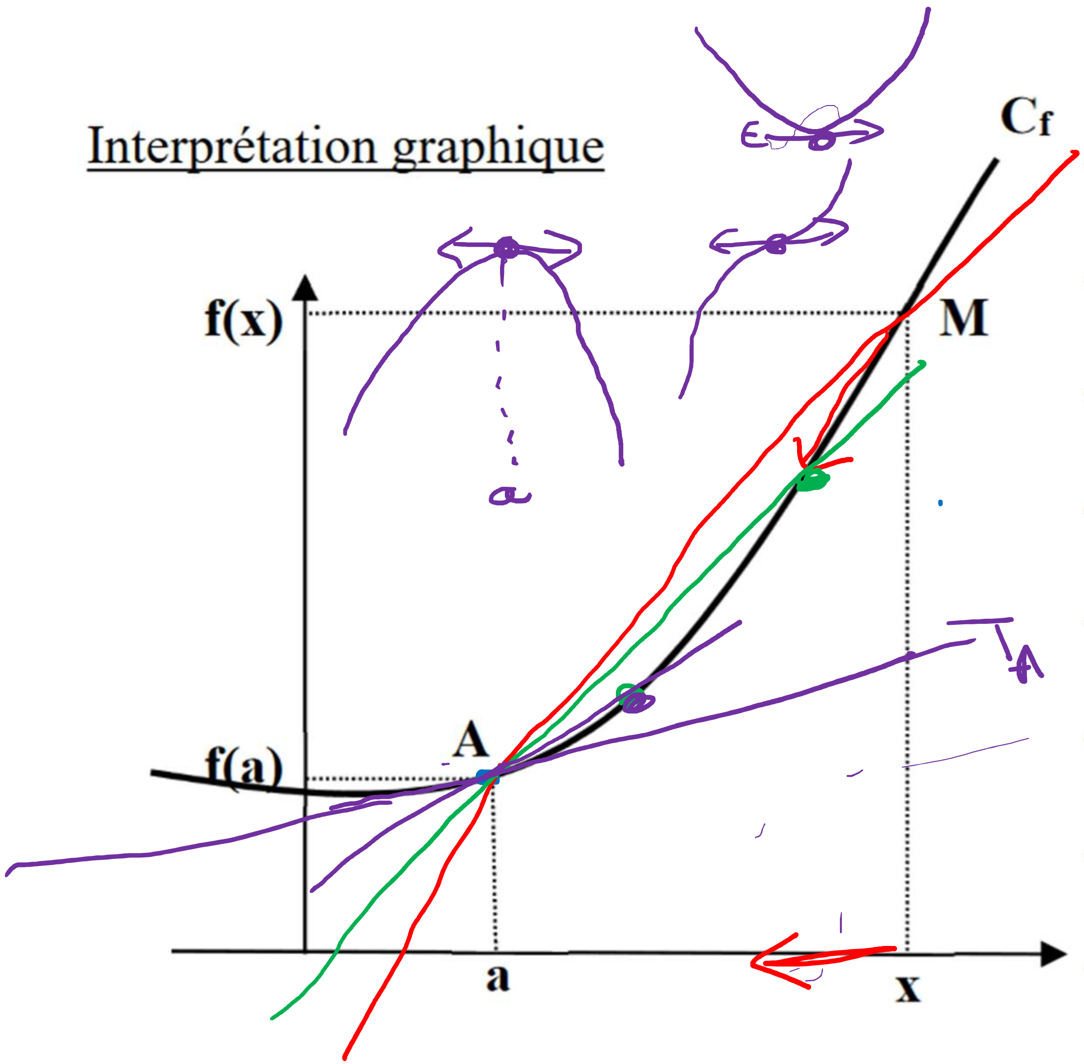
✓ A l'aide de la définition du nombre dérivé du sinus en 0, calculer : $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = \frac{0}{0}$ F.I

$\lim_{t\to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a} = f'(a)$ si f est dérivable en a avec $\begin{cases} f(t) = \sin t \Rightarrow f'(t) = \cos t \\ a = 0 \end{cases}$

f est dérivable en 0 donc : $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t - \overset{0}{\sin 0}}{t} = f'(0) = \cos 0 = 1$

$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

Interprétation graphique



$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = f'(a)$$

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$ est la pente de (AM)

$x \to a \iff M \to A$

$(AM) \longrightarrow T_A$ tangente

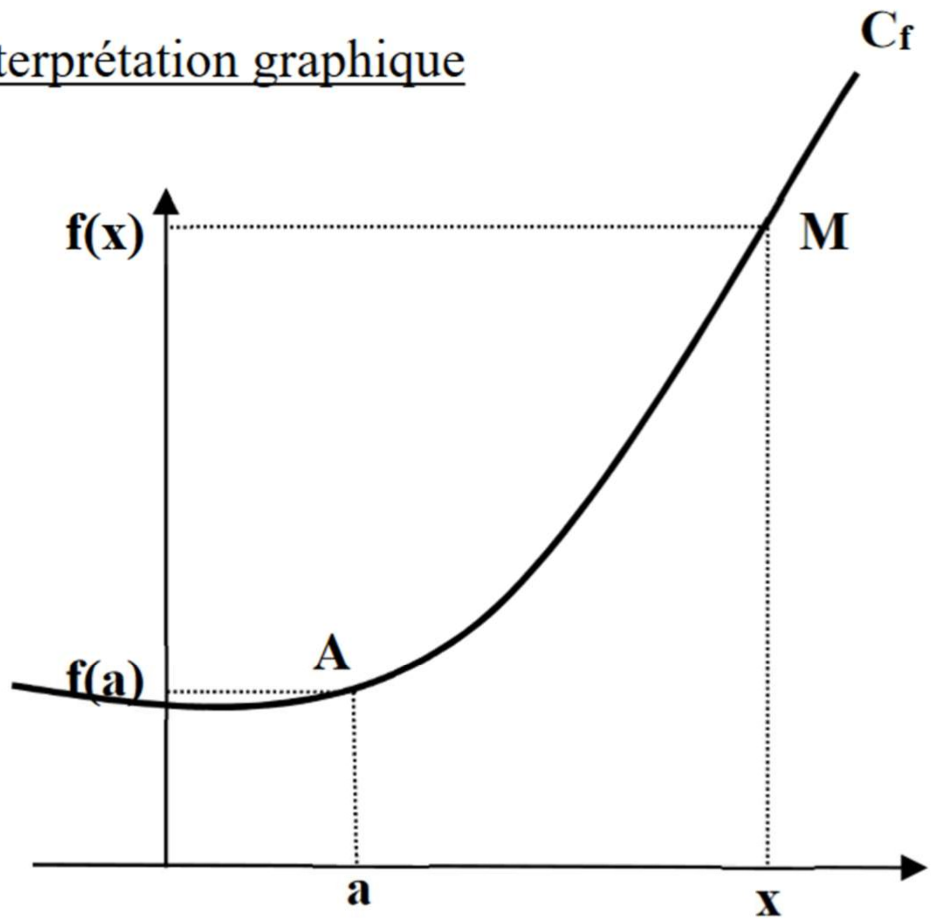
$f'(a)$ est la pente de T_A

$\boxed{f'(x) = 0}$ $\quad y = \cancel{mx} + p$

$\downarrow$ tangente horizontale

<u>Interprétation graphique</u>

Page 18 chapitre 3



$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est la pente de la droite (AM)
Lorsque x tend vers a, M tend vers A le long de la courbe, et la droite (AM) se rapproche de la droite T_a, qui est la tangente à la courbe au point A.

Conclusion :

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ **est la pente de la tangente à la courbe au point A(a,f(a)).**

$T_a : y = mx + p$ avec $m = f'(a)$

p ?

Consequence Equation de la tangente T_a

Page 18 chapitre 3

$T_a : y = f'(a)x + p$

p ? $A(a; f(a)) \in T_a \iff f(a) = f'(a) \cdot a + p$

$\iff p = f(a) - f'(a) \cdot a$

donc $T_a : y = f'(a) \cdot x + f(a) - f'(a) \cdot a$

$T_a : y = f(a) + f'(a)(x - a)$

Page 19 chapitre 3

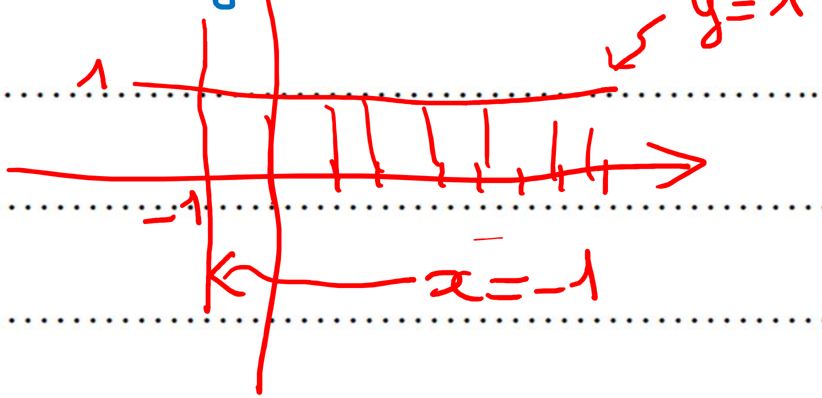
Exemples

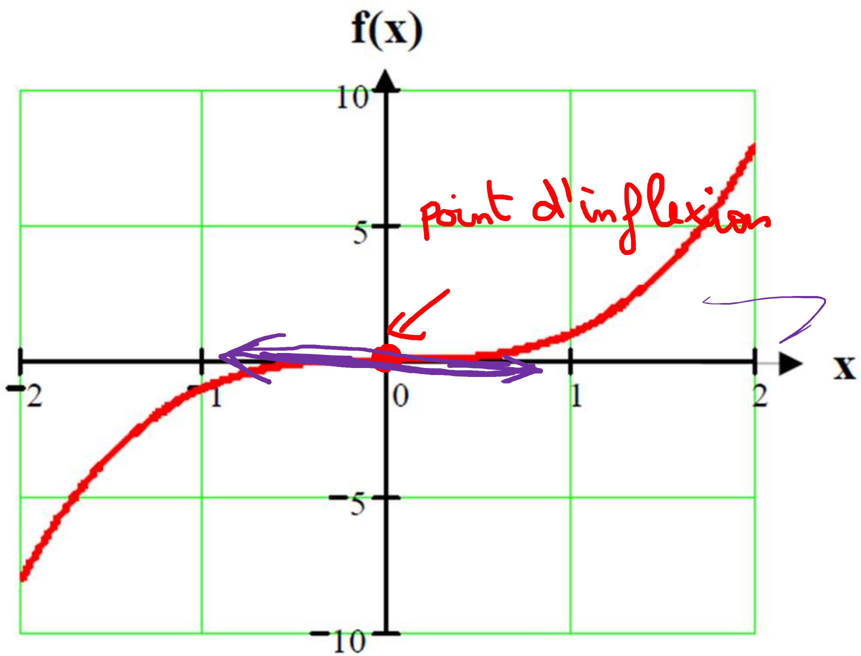
✓ Equation de la tangente en O à la courbe représentant la fonction f définie par :
$f(x) = x^3$

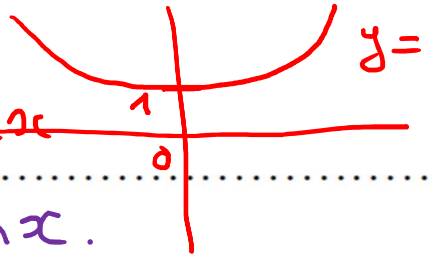
$T_a : y = f(a) + (x-a).f'(a)$

$T_0 : y = f(0) + x.\underbrace{f'(0)}_{=0}$ ici $f(x) = x^3$ et $f'(x) = 3x^2 \geq 0$

$T_0 : y = 0$







$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$

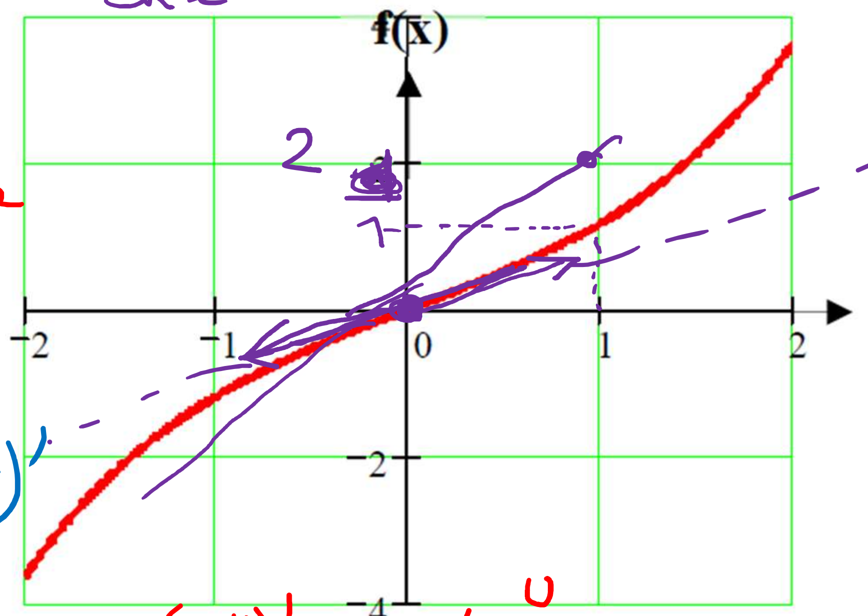
$y = \operatorname{ch} x.$ "chaînette"

$\operatorname{ch} x^2 = \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^2$ Cosinus hyperbolique.

$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$

- ✓ Equation de la tangente en O à la courbe représentant la fonction f définie par : $f(x) = \operatorname{sh}(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

sinus hyperbolique



$T_0 : y = f(0) + x f'(0)$

$f(0) = \frac{e^{0}-e^{0}}{2} = 0$

$f'(x) = \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)'$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right) = \operatorname{ch} x$

$f'(0) = \frac{1}{2}\left(e^{0}+e^{0}\right) = \frac{2}{2} = 1$

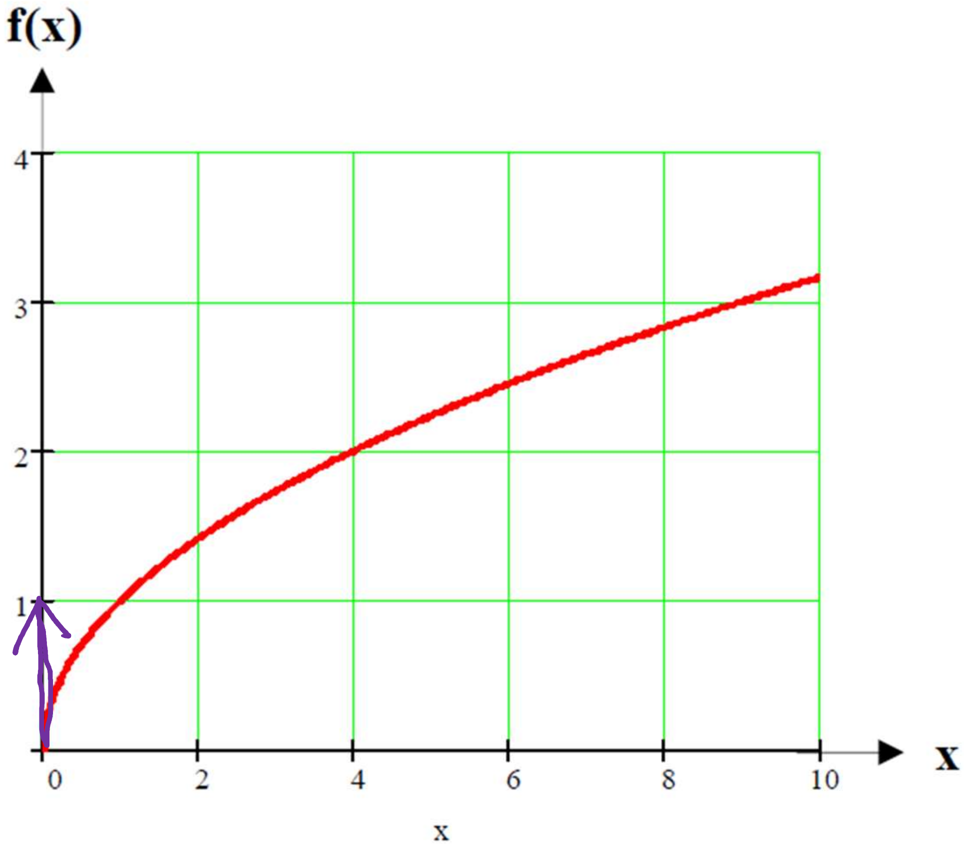
$(e^{u})' = u'e^{u}$

$T_0 : y = x$

✓ La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

$f(x) = \sqrt{x} \quad \forall x \geq 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x > 0$



$\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$

En O, la tangente à la courbe est donc verticale tournée vers les ordonnées positives.

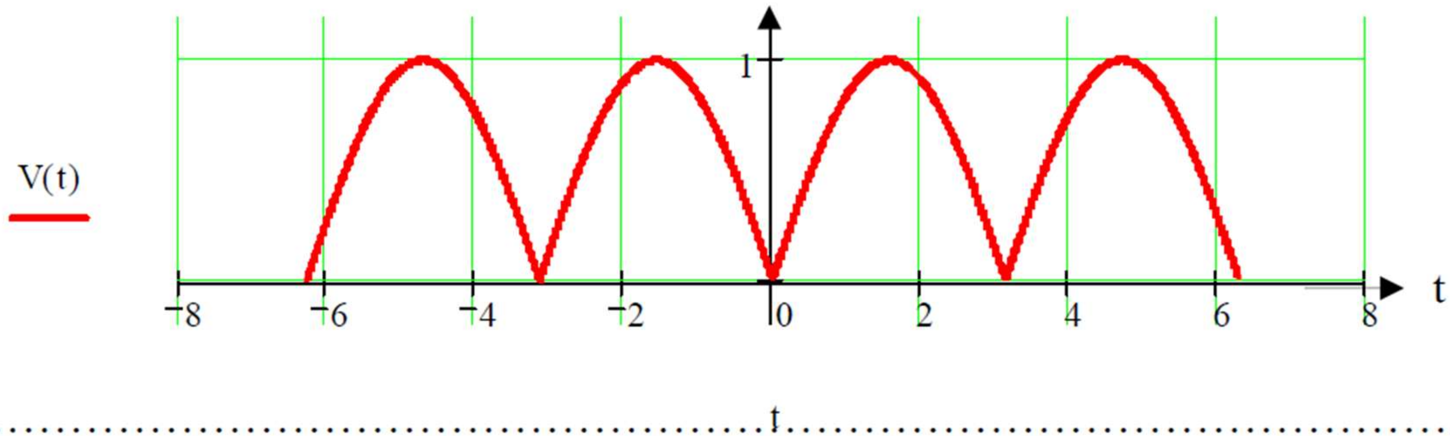
✓ Redressement double alternance : $V(t) = |\sin(t)|$.

Page 20 chapitre 3

Dérivabilité de V en 0 : …………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………



……………………………………………………………………………………………………

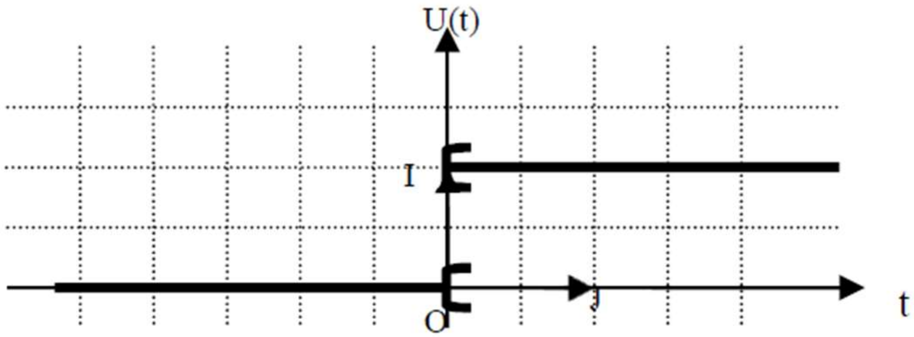
……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

- ✓ U, la fonction échelon-unité définie et représentée ci-dessous est-elle dérivable sur son ensemble de définition ?

Page 20 chapitre 3

$$U(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}.$$



....

....

....

....

EDLCC = Equation différentielle Linéaire à coefficients constants

Les objectifs

1) Formule mathématique pour résoudre $\mathbf{a.y' + y = b}$ **où a$\neq$ 0, b sont des constantes et y la fonction inconnue à trouver.**
2) Exemples
3) Méthode de la tangente ou des 63% pour calculer la constante de temps τ

1) Formule mathématique : **a≠ 0, b sont des constantes.**

Théorème : Les solutions de l'EDLCC du premier ordre : $\mathbf{a.\,y' + y = b}$ **sont les fonctions y de la forme :** $\boxed{y(t) = K.e^{-\frac{t}{a}} + b}$**, où K est une constante**

$a\,y'(t) + y(t) = b.$

$\left.\begin{aligned} a\frac{dy}{dt} + y &= b \\ a\dot{y} + y &= b \end{aligned}\right) \varphi.$

Remarque voir la démonstration dans la vidéo en ligne sur moodle.

2) Exemples

✓ Résoudre l'EDLCC suivante : $\underset{a}{\mathbf{3}}.\mathbf{y' + y =} \underset{b}{\mathbf{5}}$ **avec** $\underbrace{\mathbf{y(0) = 0}}_{\text{Condition initiale}}$

Les solutions sont : $y(t) = k.e^{-\frac{t}{3}} + 5$ où $k \in \mathbb{R}$.

CI : $y(0) = 0$ $\quad y(0) = k.e^{0} + 5 = 0 \iff k + 5 = 0 \iff k = -5.$

Conclusion : La solution est donc : $y(t) = -5e^{-\frac{t}{3}} + 5 = 5(1 - e^{-t/3})$

Théorème : Les solutions de l'EDLCC du premier ordre : $\boxed{\mathbf{a.y' + y = b}}$ sont les fonctions y de la forme : $\boxed{y(t) = K.e^{-\frac{t}{a}} + b}$, où K est une constante

✓ Résoudre l'EDLCC suivante : $\boxed{3.y' + 2.y = 7}$ avec $y(0) = 0$

$\div 2 \quad \frac{3}{2}y' + y = \frac{7}{2} \quad \div 2$

a   b

Les solutions sont : $y(t) = ke^{-\frac{2}{3}t} + \frac{7}{2}$; $k \in \mathbb{R}$.

CI : $y(0) = 0 \iff y(0) = ke^{0} + \frac{7}{2} = 0 \iff k = -\frac{7}{2}$

La solution est donc : $2y(t) = \left(-\frac{7}{2}e^{-\frac{2}{3}t} + \frac{7}{2}\right) \times 2$ $(e^u)' = u'e^u$

Vérification : $3 \times y'(t) = \left(-\frac{7}{2} \times -\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}t}\right) \times 3$

$3y' + 2y = -7e^{-\frac{2}{3}t} + 7 + \underbrace{\cancel{3} \times \frac{-7}{\cancel{2}} \times \frac{-\cancel{2}}{\cancel{3}}e^{-\frac{2}{3}t}}_{7e^{-\frac{2}{3}t}} = 7$ OK

Théorème : Les solutions de l'EDLCC du premier ordre : $\mathbf{a.y' + y = b}$ sont les fonctions y de la forme : $y(t) = K.e^{-\frac{t}{a}} + b$, où K est une constante

- ✓ Résoudre l'EDLCC suivante : $\mathbf{y' - 5.y = 2}$ avec $\mathbf{y(0) = 1}$

$\div(-5)$ $\boxed{-\frac{y'}{5} + y = -\frac{2}{5}}$ $\div(-5)$

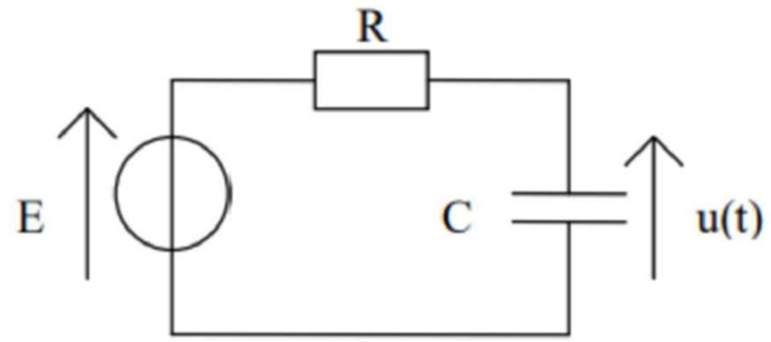
$a = -\frac{1}{5}$

Les solutions sont $y(t) = K.e^{5t} - \frac{2}{5}$; $K \in \mathbb{R}$.

CI : $y(0) = 1 \iff y(0) = Ke^{0} - \frac{2}{5} = 1 \iff K = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$.

La solution est $y(t) = \frac{7}{5}.e^{5t} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}(7e^{5t} - 2)$

3) Méthode de la tangente et méthode des 63% pour calculer la constante de temps τ



$$\boxed{RCu' + u = E.}$$

Dans cette équation E, R et C sont des constantes strictement positives.

a) Résoudre l'EDLCC ci-dessus. On notera $\tau = \mathrm{RC}$.

$\tau u' + u = E$ $\qquad$ $ay' + y = b$

Les solutions sont : $u(t) = k\, e^{-\frac{t}{\tau}} + E$; $k \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $y = k e^{-\frac{t}{a}} + b$.

b) Quelle est la solution qui vérifie u(0) = 0 ? $k+E=0$

CI $u(0)=0 \iff u(0)=ke^{0}+E=0 \iff k=-E$

La solution est donc $u(t)=-Ee^{-t/\tau}+E=E\left(1-e^{-t/\tau}\right)$

$$\boxed{\begin{array}{l}(e^u)'=u'e^u\\ \left(-t/\tau\right)'=-\frac{1}{\tau}\\ \left(-t/3\right)'=-\frac{1}{3}\end{array}}$$

c) Construire le tableau de variation de la fonction précédente.

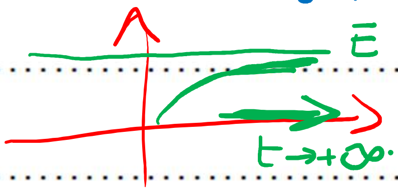
$u'(t)=E\left(1-e^{-t/\tau}\right)'=E\left(\_-\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\right)$

$u'(t)=\frac{E}{\tau}\underbrace{e^{-t/\tau}}_{>0}>0 \quad (E,\tau>0)$

t	0		$+\infty$
$u'(t)$		$+$	
u	0	$\nearrow$	E

$u(0)=0$

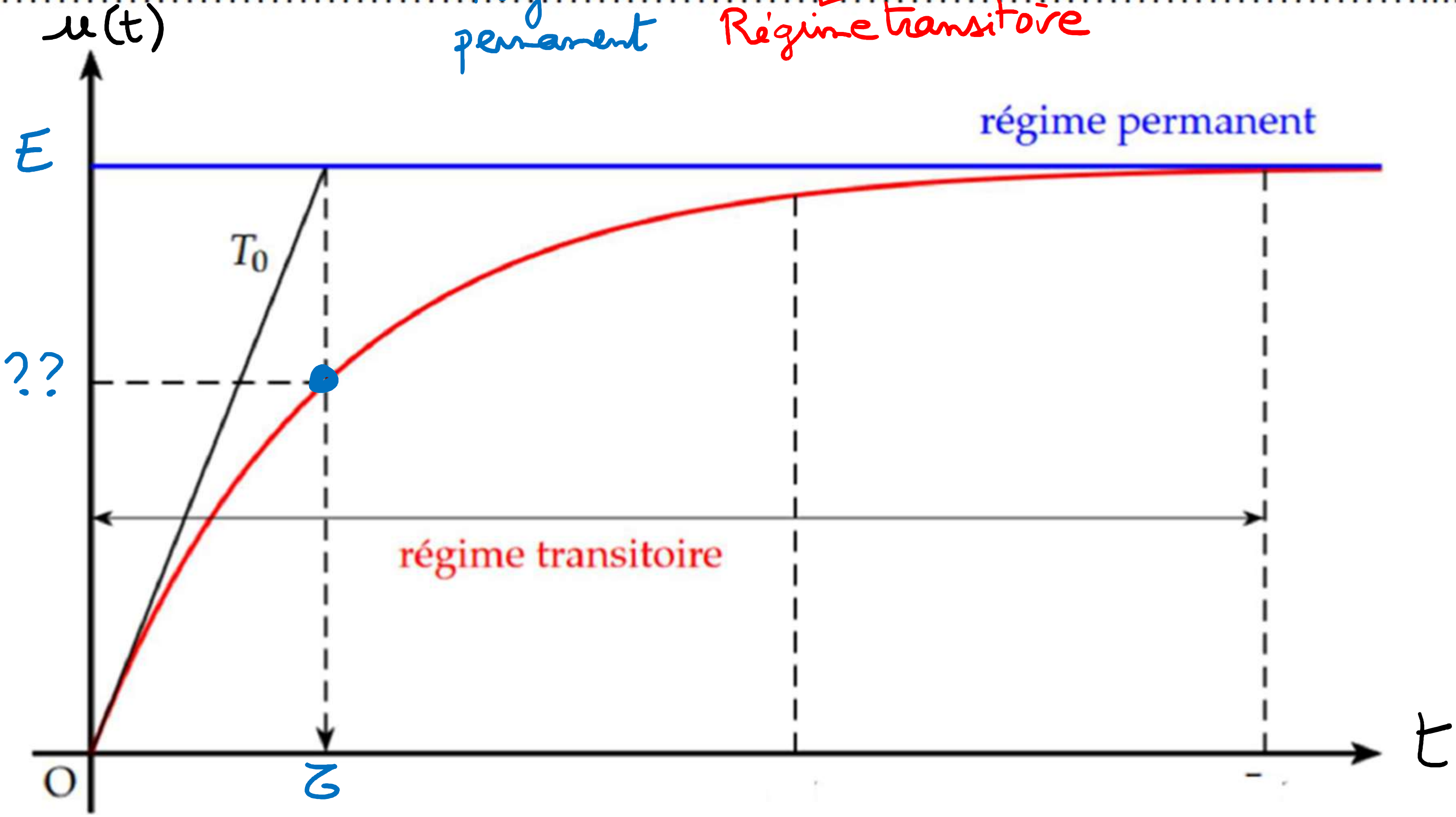
$\lim_{t\to+\infty}u(t)=\lim_{t\to+\infty}E\left(1-\underbrace{e^{-t/\tau}}_{\text{"}e^{-\infty}\text{"}}\right)=E.$



Asymptote d'équation $y=E$ en $+\infty$

<u>Remarque</u> Régime permanent / Régime transitoire.

$$u(t) = \underbrace{E}_{\text{Régime permanent}} - \underbrace{\underbrace{E \cdot e^{-t/\tau}}_{\xrightarrow[t \to +\infty]{} 0}}_{\text{Régime transitoire}}$$



d) Déterminer l'équation de T_0 la tangente à la courbe représentant u (la solution précédente) en 0.

$$\boxed{\mathbf{T_a : y = f(a) + (x - a).f'(a)}}$$

$T_0 : y = u(0) + t\,u'(0)$

$\Leftrightarrow \quad y = 0 + t.\frac{E}{\tau}$

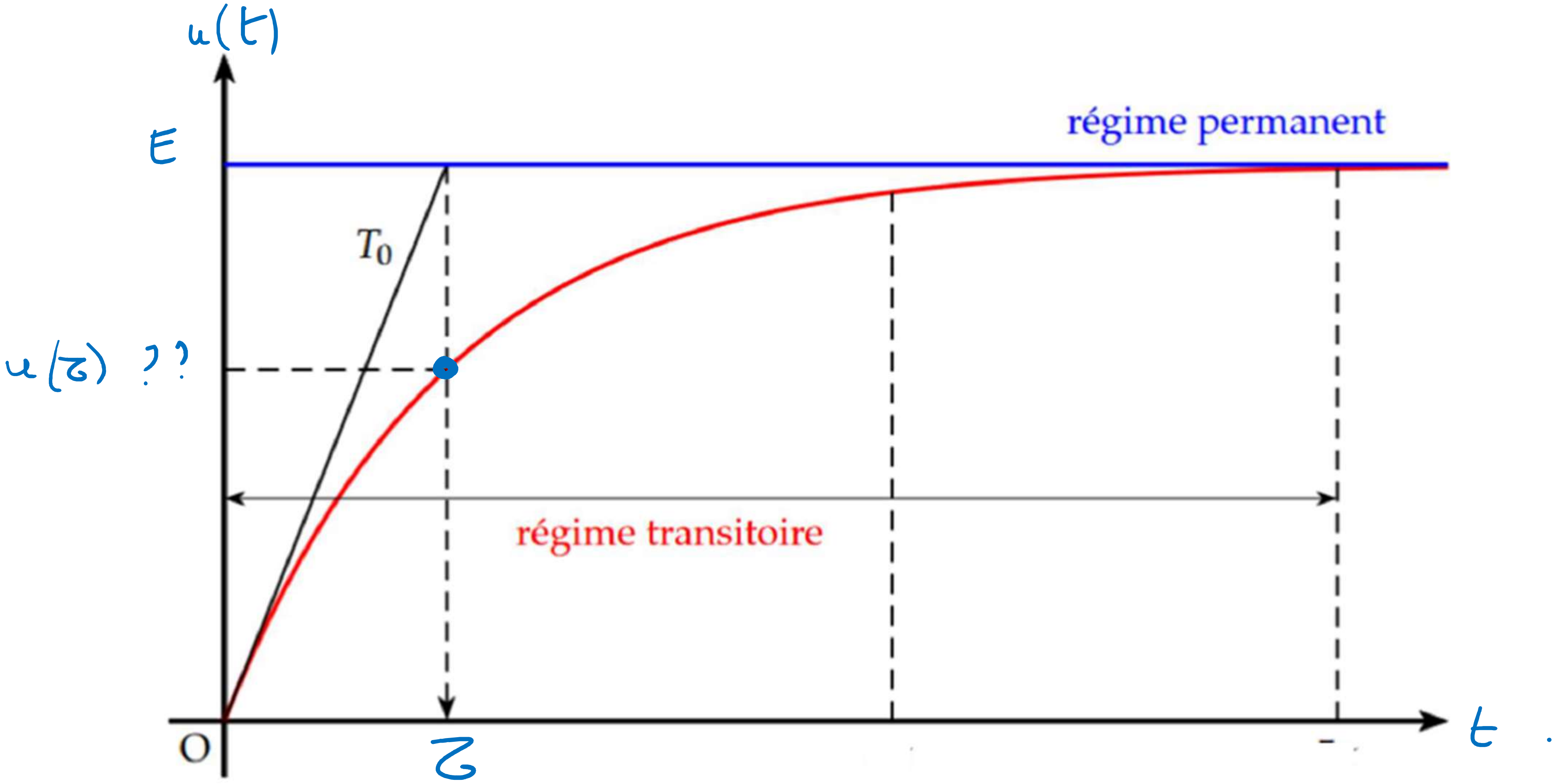
$T_0 : y = \frac{E}{\tau}t$

e) Méthode de la tangente pour déterminer τ, la « constante de temps »

Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la tangente T_0 et de l'asymptote à la courbe représentant u en l'infini :

$y = \frac{E}{\tau}t$ $\qquad$ $y = E$

On résout : $\frac{E}{\tau}t = E \Leftrightarrow t = \frac{E}{\frac{E}{\tau}} = \tau$

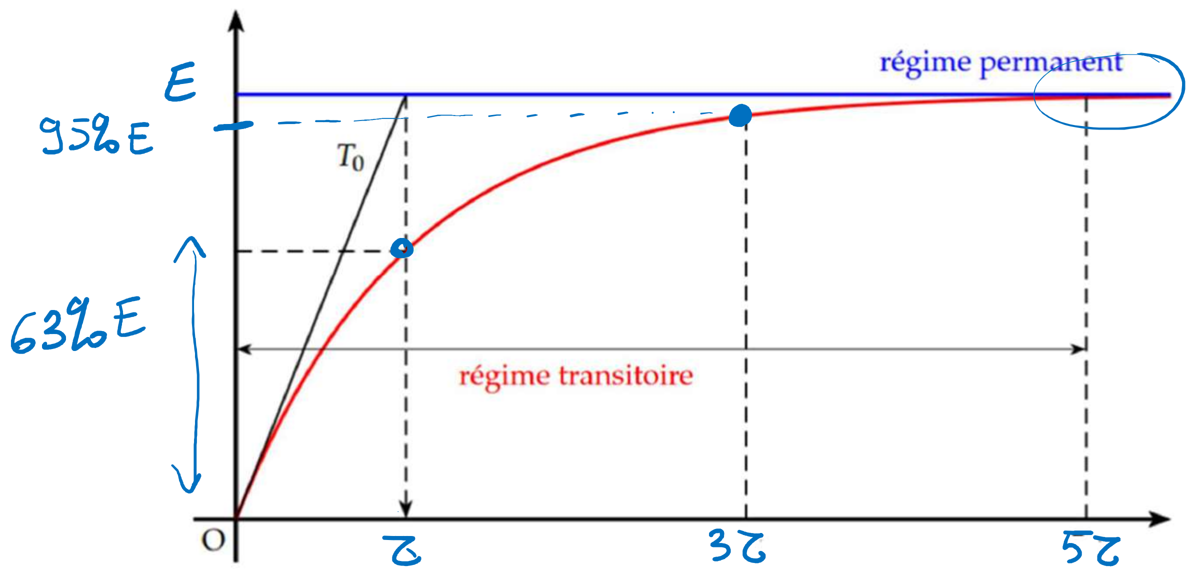

u(t)
E
régime permanent
T_0
u(τ) ??
régime transitoire
O
τ
t

f) Méthode des 63% pour déterminer τ, la « constante de temps »

Déterminer l'ordonnée du point d'abscisse τ sur la courbe représentant u.

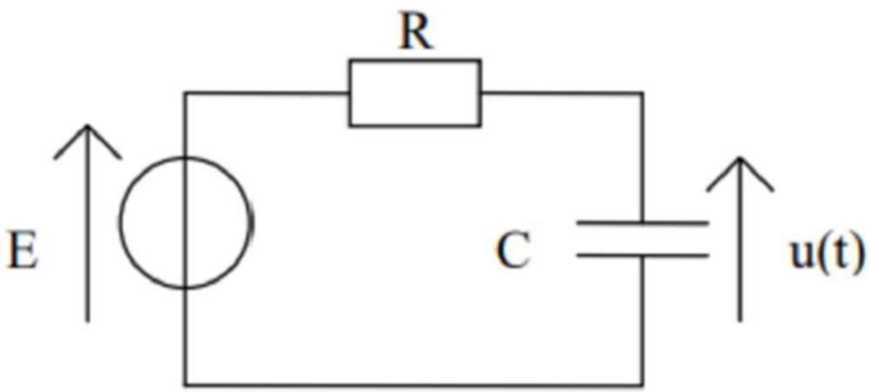
$$u(\tau) = E\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = E\left(\underbrace{1 - e^{-1}}_{\simeq 0{,}63}\right) = \frac{63}{100}E$$

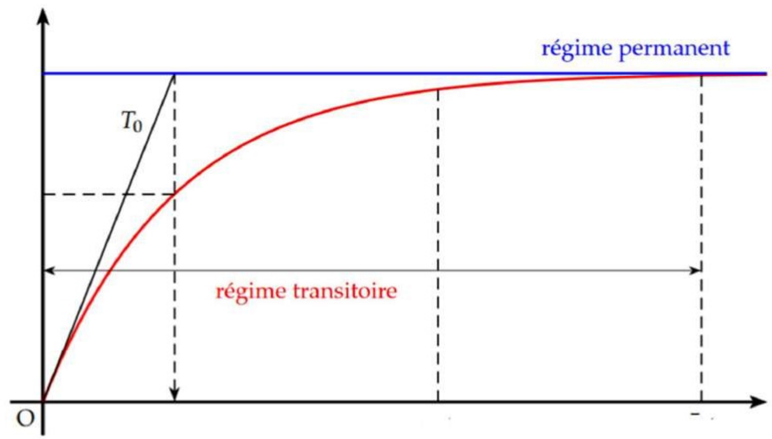
Remarque $u(3\tau) = E\left(1 - e^{-\frac{3\tau}{\tau}}\right) = E\left(\underbrace{1 - e^{-3}}_{0{,}95}\right)$; $u(5\tau) = E\left(\underbrace{1 - e^{-5}}_{0{,}99}\right)$



t	τ	3τ	5τ
u(t)	63% E	95% E	99% E

Conclusion :





$$RCu' + u = E.$$

On note $\tau = RC$

Pour déterminer τ la constante de temps :

Ou bien on cherche l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe solution en 0, ou bien on cherche l'abscisse du point de la courbe solution dont l'ordonnée est 63% du régime permanent.

Page 26 chapitre 3

$$\frac{0}{0} \quad , \quad \frac{\infty}{\infty} \quad , \quad 0 \cdot \infty \quad , \quad \infty - \infty$$

$$0^0 \quad , \quad \infty^0 \quad , \quad 1^\infty$$

Page 26 chapitre 3

FI

$\frac{0}{0}$

$\frac{\infty}{\infty}$

$\infty - \infty$

$0 \times \infty$

Partie B : Calcul de limites

<u>Formes indéterminées</u> <u>FI</u> **Soit x_0, un nombre réel ou $\pm\infty$.**

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =$	L	L	$\pm\infty$	∞	∞	$\pm\infty$	0	0	L
et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) =$	L' $\neq 0$	$\pm\infty$	L' $\neq 0$	∞	$-\infty$	0	$\pm\infty$	0	0
alors $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) =$	L+L'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	∞	FI	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	L
et $\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x) =$	LL'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	∞	$-\infty$	FI	FI	0	0
et $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{L}{L'}$	0	$\pm\infty$	FI	FI	$\pm\infty$	0	FI	$\pm\infty$

<u>Remarque</u> $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \exp\big(g(x).\ln(f(x))\big)$ cette écriture permet de « lever » les formes indéterminées suivantes : $"L^{\infty}", "0^0"$ et $"\infty^0"$

Voici quelques techniques permettant de « lever » une forme indéterminée :

Technique 1 : Croissance comparée

Page 26 chapitre 3

Définition Soit x_0 un réel ou $\pm\infty$. On dit que la fonction f est négligeable devant la fonction g en x_0 lorsque : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$. On note alors : $f(x)\underset{x_0}{<<}g(x)$

Théorèmes Soient : $0<\alpha<\beta$

$$\ln(x)\underset{\infty}{<<}x^{\alpha}\underset{\infty}{<<}x^{\beta}\underset{\infty}{<<}e^{x}$$

Exemples : Calculer $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ où $f(x)=x.e^{x}-x^{2}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=$ "$\infty-\infty$" F.I

$e^{x}\underset{\infty}{\gg}x^{2}$

Lycée $xe^{x}\left(1-\dfrac{x^{2}}{xe^{x}}\right)$

$=\underbrace{xe^{x}}_{\infty}\underbrace{\left(1-\dfrac{x}{e^{x}}\right)}_{\to 1}\underset{x\to+\infty}{\Longrightarrow}+\infty$

$\dfrac{x}{e^{x}}\to 0$

IUT $e^{x}\underset{\infty}{\gg}x^{2}\Leftrightarrow xe^{x}\underset{\infty}{\gg}x^{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{x}-\cancel{x^{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{x}=+\infty$

Page 26 chapitre 3

Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ où $f(x)=\dfrac{\ln(4x)}{x}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \text{“}\dfrac{\infty}{\infty}\text{”}$ F.I

Comme $\ln x \underset{\infty}{\ll} x$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\ln(4x) = \ln 4 + \ln x$

$$f(x) = \frac{\ln 4 + \ln x}{x} = \underbrace{\frac{\ln 4}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$ car $\ln x \underset{\infty}{\ll} x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

<u>Technique 2</u> : Expression conjuguée

<u>Exemples</u> : Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = "\frac{0}{0}"$ F.I

Page 27 chapitre 3

$$f(x) = \frac{\overbrace{\sqrt{1+x^2}}^{A} - \overbrace{1}^{B}}{x} \times \frac{\overbrace{\sqrt{1+x^2}+1}^{A+B}}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{\overbrace{1+x^2}^{A^2} - \overbrace{1}^{B^2}}{x\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{x^2}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$$ donc $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{2} = 0$

$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

Calculer $\lim_{x\to 1} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\overbrace{\sqrt{x^2+3x-3}}^{A} \overbrace{-x}^{-B}}{x-1}$

$\lim_{x\to 1} f(x) = "\frac{0}{0}"$ F.I

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3x-3}-x}{x-1} \times \frac{\sqrt{x^2+3x-3}+x}{\sqrt{x^2+3x-3}+x} = \frac{\overbrace{x^2+3x-3-x^2}^{A^2-B^2}}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3x-3}+x\right)} = \frac{\overbrace{3x-3}^{3(\cancel{x-1})}}{\cancel{(x-1)}\sqrt{\cdots}}$$

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2+3x-3}+x}$$ $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{\sqrt{1}+1} = \frac{3}{2}$

Technique 3 : Théorèmes de comparaison

Page 27 chapitre 3

Soient f, g et h trois fonctions définies sur [a,b[où b est un réel ou $\pm\infty$

1) Si $\forall x \in [a,b[$ $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x) = -\infty$

2) Si $\forall x \in [a,b[$ $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \infty$, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$

3) Si $\forall x \in [a,b[$ $|f(x)| \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x) = 0$

4) Si $\forall x \in [a,b[$ $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} h(x) = \lim\limits_{x\to b} g(x) = L$, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x) = L$ (théorème des gendarmes)

Exemples : Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?$ car $\sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

On sait que : $-1 \leq \sin x \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

alors : $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$ $\forall x > 0$

Comme $\lim\limits_{\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, alors d'après le th. des Gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Technique 4 : Equivalence

Page 29 chapitre 3

Définition Soit x_0 un réel ou $\pm\infty$. On dit que la fonction f est équivalente à la fonction g en x_0 lorsque : $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors : $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$

Exemples : Montrer que les fonctions f et g suivantes sont équivalentes en ∞ :

" Cosinus hyperbolique "

$ch(x)$

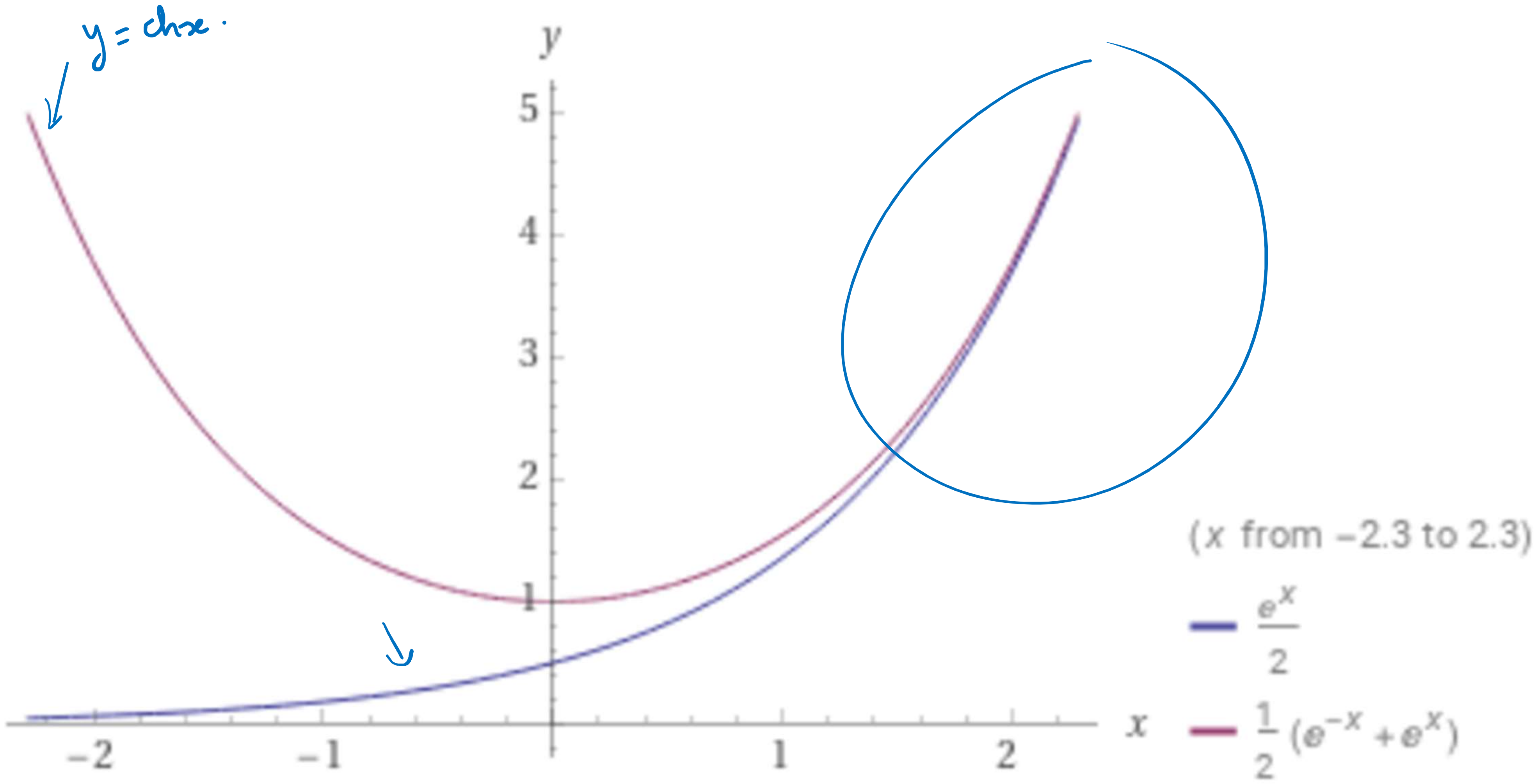
$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $g(x) = \frac{e^x}{2}$:

" $\frac{\infty}{\infty}$ " FI

$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{\frac{e^x}{2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x}$

$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} + \frac{e^{-x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + e^{-2x} = 1$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$


y = chx .
y
5
4
3
2
1
−2
−1
1
2
x
(x from −2.3 to 2.3)
e^x / 2
1/2 (e^−x + e^x)

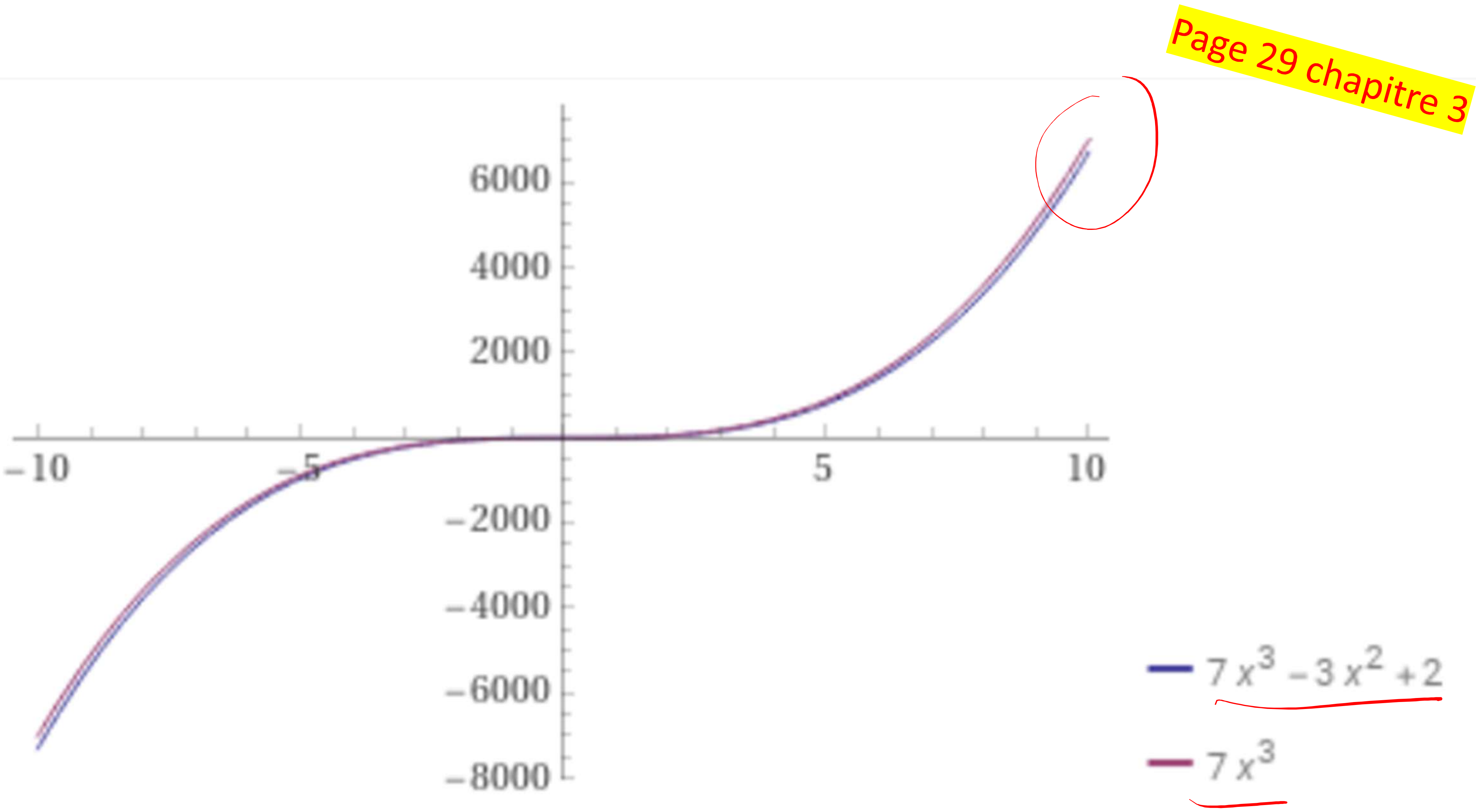
Page 29 chapitre 3

Chercher un équivalent de f en ∞ où $f(x) = 7x^3 - 3x^2 + 2$

$$f(x) \underset{\substack{\infty \\ -\infty ??}}{\sim} 7x^3 \quad \text{car} \quad \lim_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} \frac{f(x)}{7x^3} = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} \frac{7x^3 - 3x^2 + 2}{7x^3}$$

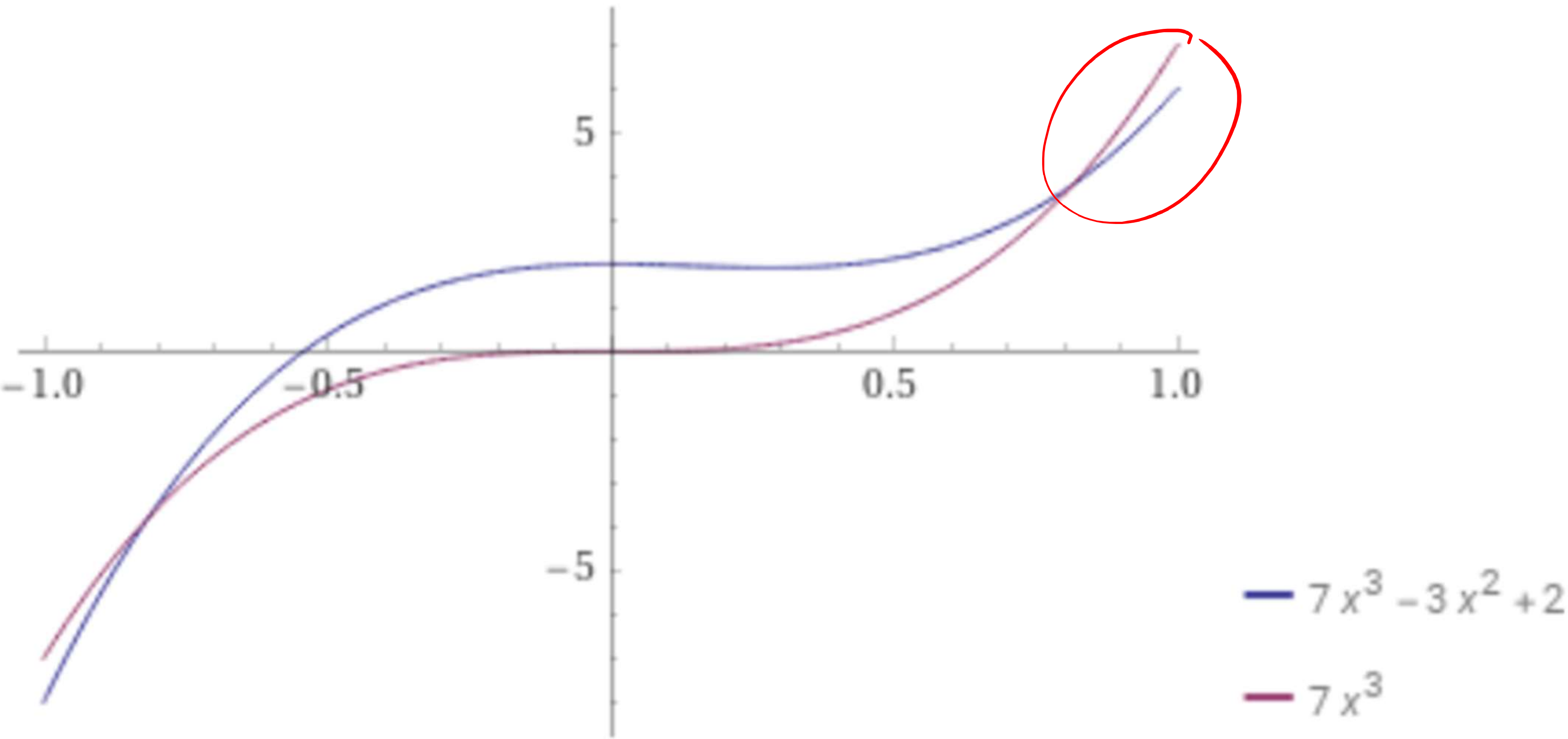
$$= \lim_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} \frac{7x^3}{7x^3} - \frac{3x^2}{7x^3} + \frac{2}{7x^3}$$

$$= \lim_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} \left(1 - \frac{3}{7x} + \frac{2}{7x^3}\right) = 1$$



Page 29 chapitre 3
6000
4000
2000
-2000
-4000
-6000
-8000
-10
-5
5
10
$7x^3 - 3x^2 + 2$
$7x^3$

Page 29 chapitre 3



Page 29 chapitre 3

Tout polynôme est équivalent en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré.
Tout polynôme est équivalent en 0 à son terme de plus bas degré.

$$f(x) = 2x^2 - 7x^8 + 5x \underset{0}{\sim} 5x \quad \text{car} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{5x} \overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{” FI}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{5x} - \frac{7x^8}{5x} + 1$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{5} - \frac{7x^7}{5} + 1$$

$$= 1.$$

Page 29 chapitre 3

Si f est dérivable en x_0, alors : $f(x) \underset{x_0}{\sim} \underbrace{f(x_0)+(x-x_0).f'(x_0)}_{\text{équation de la tangente à } C_f \text{ en } x_0.}$

$f(x) \underset{0}{\sim} f(0)+x.f'(0)$

Compléter :

$\sin(x) \underset{0}{\sim} \underbrace{\sin 0}_{0} + x.\underbrace{\cos 0}_{1}$ donc $\boxed{\sin x \underset{0}{\sim} x}$

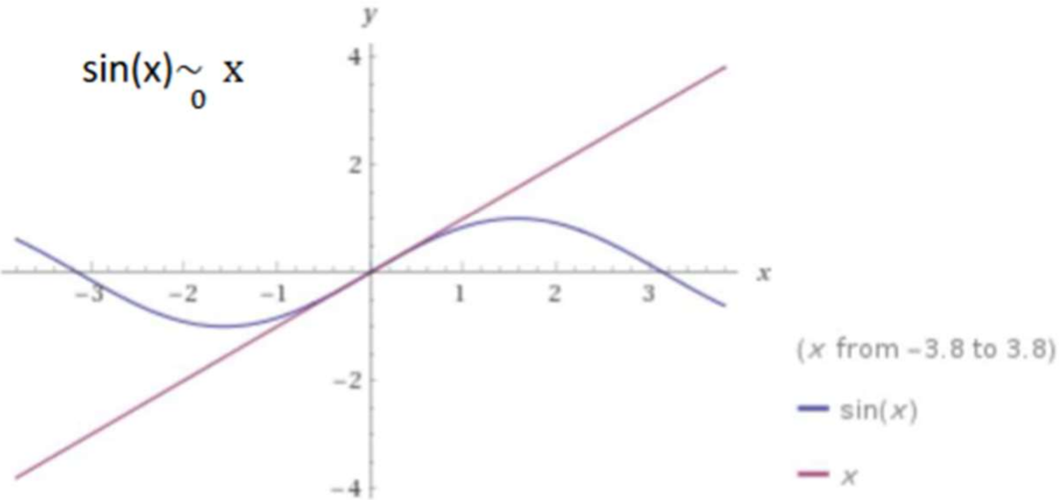
$e^x \underset{0}{\sim} \underbrace{e^0}_{1} + x.\underbrace{e^0}_{1}$ donc $\boxed{e^x \underset{0}{\sim} 1+x}$

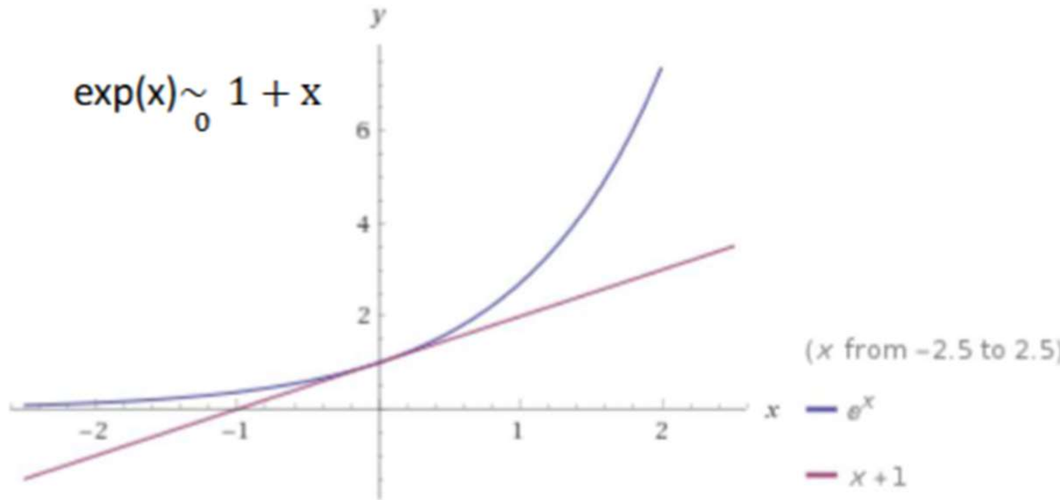
$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} \ln 1 + x.1$ donc $\boxed{\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x}$

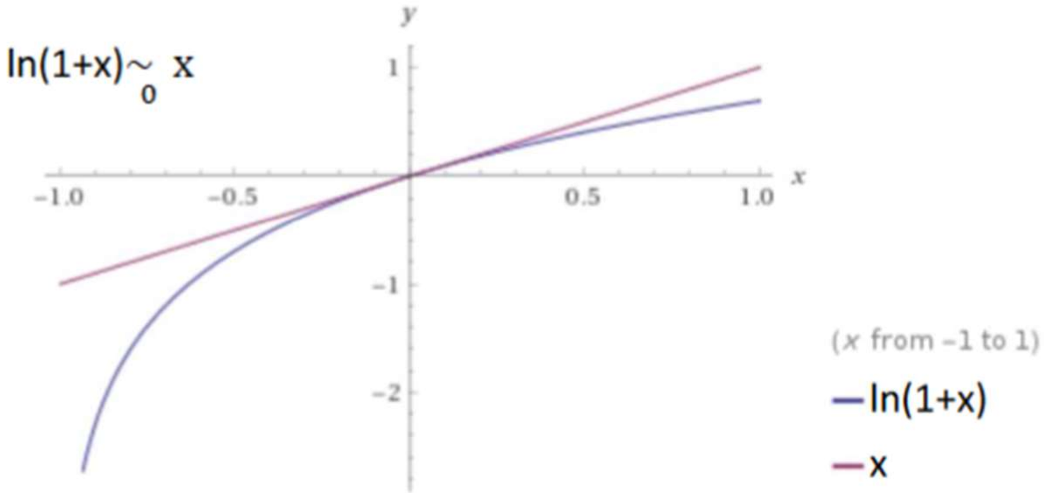
$f(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$ $\quad f(0) = \ln(1+0) = 0$

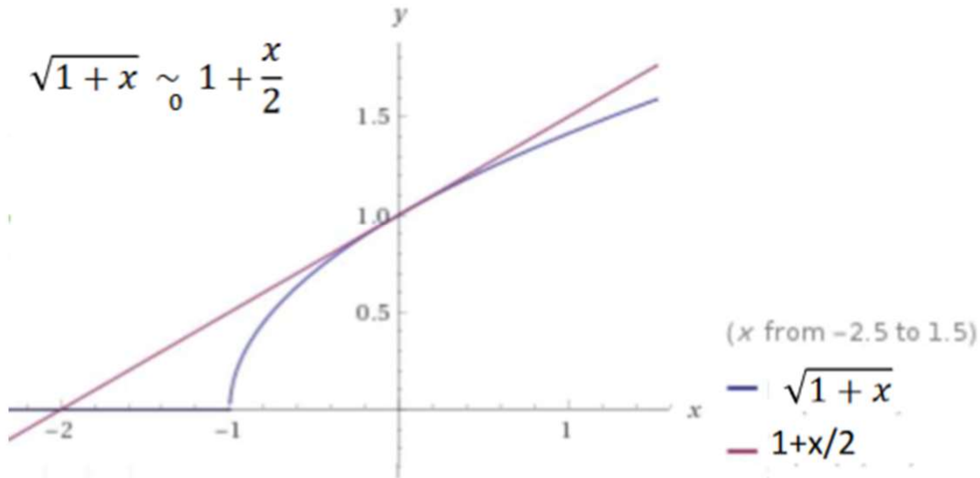
$\sqrt{1+x} \underset{0}{\sim} f(0)+x\,f'(0)$ donc $\boxed{\sqrt{1+x} \underset{0}{\sim} 1+\frac{x}{2}}$

$f(x)$. $\quad f(0) = \sqrt{1} = 1 \quad f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$


$\sin(x) \underset{0}{\sim} x$
y
x
(x from −3.8 to 3.8)
sin(x)
x


$\exp(x) \underset{0}{\sim} 1 + x$
y
x
(x from −2.5 to 2.5)
e^x
x + 1


$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
y
x
(x from −1 to 1)
ln(1+x)
x


$\sqrt{1+x} \underset{0}{\sim} 1 + \frac{x}{2}$
y
x
(x from −2.5 to 1.5)
$\sqrt{1+x}$
1+x/2

Applications en physique :

Le pendule pesant

- Equation en θ
- Mise en équation :

ED

$$\boxed{\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

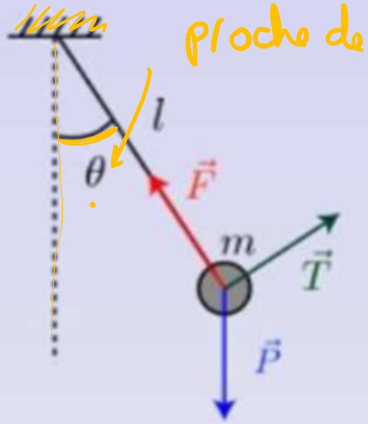
$\simeq \theta$.

- Equation différentielle :
  - Non linéaire !
  - Résolution analytique compliquée
- Solutions possibles :
  - Si θ petit alors $\sin\theta \simeq \theta$: oscillateur harmonique

$$\boxed{\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

  - Résolution numérique

proche de



$\underbrace{(1+x)^{\alpha}}_{=f(x)} \underset{0}{\sim} 1 + \alpha x$

Page 30 chapitre 3

$f(x) \underset{0}{\sim} f(0) + x.f'(0)$ $\quad$ $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}.\underbrace{(1+x)'}_{1} \Rightarrow f'(0) = \alpha$

$\tan(x) \underset{0}{\sim} \tan 0 + x.(1+\tan^2 0)$ $\quad$ donc $\tan x \underset{0}{\sim} x$.

$f'(x) = 1+\tan^2 x$

Ne pas écrire :

$\cos(x) \underset{0}{\sim} \underbrace{\cos 0}_{1} + x(-\underbrace{\sin 0}_{0}) \Rightarrow \cos x \underset{0}{\sim} 1$:

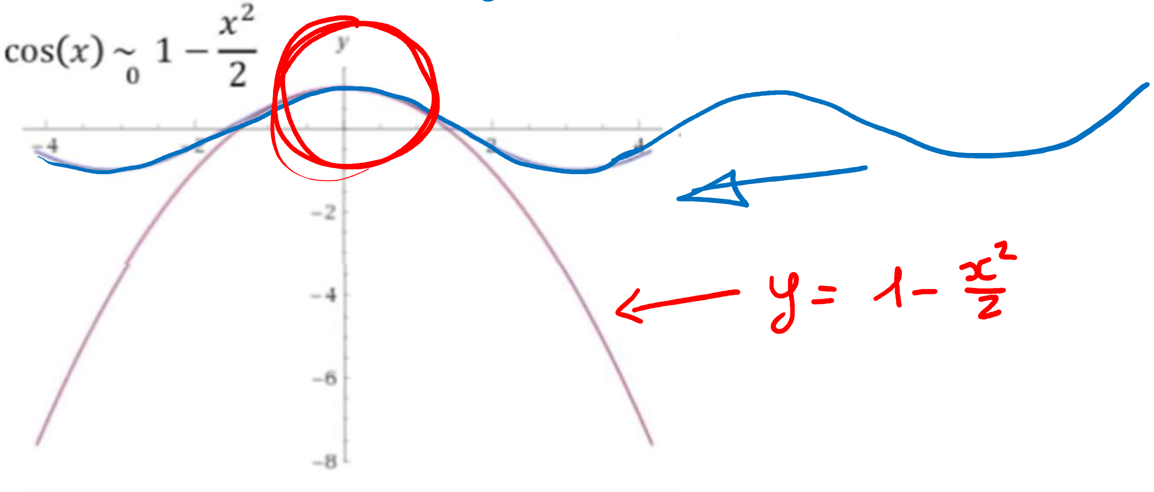
DL en 0.

Page 30 chapitre 3

Si f est 2 fois dérivable en x₀, alors : $f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x_0)+(x-x_0).f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}.f''(x_0) +$

$\cos(x) \underset{0}{\sim} 1 + 0 + \frac{x^2}{2}.f''(0)$ donc $\cos x \underset{0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2}$

$f'(x) = -\sin x$ $f''(x) = -\cos x$ $\Rightarrow f''(0) = -\cos 0 = -1$

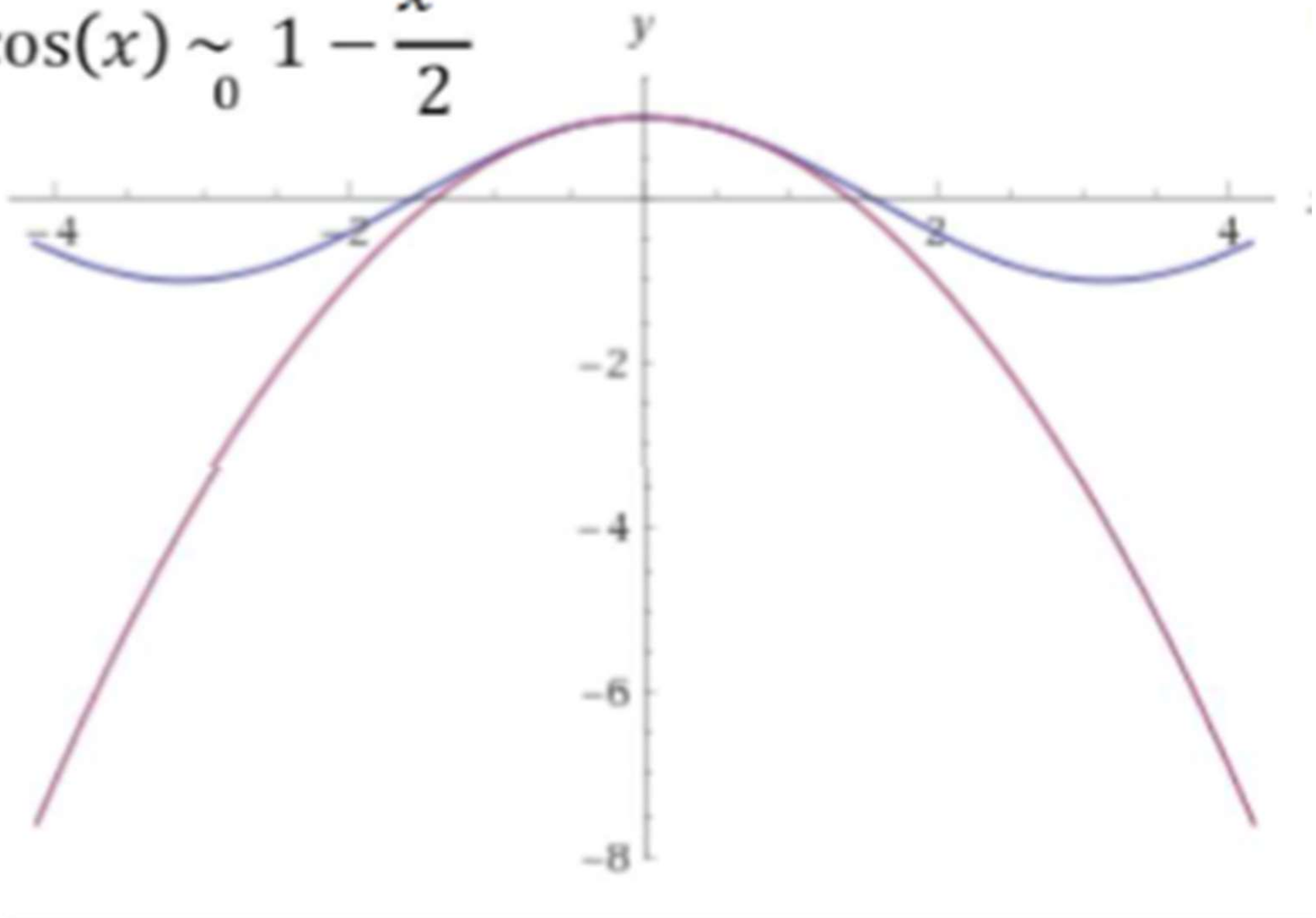


$y = \cos x$

$y = 1 - \frac{x^2}{2}$

Page 30 chapitre 3

$$\cos(x) \underset{0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2}$$



Page 30 chapitre 3

<u>Opérations</u>

- **Soient f_1, g_1, f_2, g_2 quatre fonctions et x_0 un réel ou $\pm\infty$.**

$$\text{Si } \begin{cases} f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1 \\ \text{et} \\ f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} f_1 . f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 . g_2 \\ \text{et} \\ \dfrac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2} \end{cases}$$

(pour le quotient, f_2 et g_2 ne s'annule pas pour x voisin de x_0 sauf peut-être en x_0)

- **f, g, h sont trois fonctions,**

$$\text{Si } f(X) \underset{X_0}{\sim} g(X) \text{ et } \lim_{x \to x_0} h(x) = X_0 \text{, alors } f(h(x)) \underset{x_0}{\sim} g(h(x))$$

Page 30 chapitre 3

Exemples :

Compléter : $f(x) = \dfrac{-x^7+3x^2}{x(x-1)^3} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{-x^7}{x \cdot x^3} = \dfrac{-x^7}{x^4} = -x^3$

(Remarque : donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3) = -\infty$)

Technique 4 : Equivalence

RAPPELS (p.41)

Définition Soit x_0 un réel ou $\pm\infty$. On dit que la fonction f est équivalente à la fonction g en x_0 lorsque : $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors : $\boxed{f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)}$

Tout polynôme est équivalent en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré.
Tout polynôme est équivalent en 0 à son terme de plus bas degré.

Si f est dérivable en x_0, alors : $\boxed{f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x_0) + (x - x_0).f'(x_0)}$ $-(x-x_0)^2 . \frac{f''(x_0)}{2}$

$7x^3 - 8x^2 + 5x^{15} \underset{+\infty}{\sim} 5x^{15}$

$7x^3 - 8x^2 + 5x^{15} \underset{0}{\sim} -8x^2$

$f(x) \underset{0}{\sim} f(0) + x . f'(0)$

$\sin x \underset{0}{\sim} x$

$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} \overset{0}{\ln 1} + x . \frac{1}{1+0} = x$

$\tan x \underset{0}{\sim} \overset{0}{\tan 0} + x . \frac{1}{\cos^2 0} = x$

$\cos x \underset{0}{\sim} \underbrace{\overset{f(0)}{\cos 0}}_{1} - x . \underbrace{\overset{f'(0)}{\sin 0}}_{0} - x^2 \frac{\overset{f''(0)}{\cos 0}}{2}$

$\cos x \underset{0}{\sim} 1 - x^2/2$

Opérations

- Soient f_1, g_1, f_2, g_2 quatre fonctions et x_0 un réel ou $\pm\infty$.

$$\text{Si } \begin{cases} f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1 \\ \text{et} \\ f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} f_1 . f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 . g_2 \\ \text{et} \\ \dfrac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2} \end{cases}$$

(pour le quotient, f_2 et g_2 ne s'annule pas pour x voisin de x_0 sauf peut-être en x_0)

- f, g, h sont trois fonctions,

$$\text{Si } f(X) \underset{X_0}{\sim} g(X) \text{ et } \lim_{x \to x_0} h(x) = X_0 \text{, alors } f(h(x)) \underset{x_0}{\sim} g(h(x))$$

p.41

$\dfrac{x^3 - 4x}{\sin x} \underset{0}{\sim} \dfrac{-4x}{x} = -4$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 4x}{\sin x} = -4$

$\dfrac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{3x}{4x} = \dfrac{3}{4}.$

$\sin X \underset{0}{\sim} X$ (On pose $X = 3x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ et $X = 4x$)

Page 31 chapitre 3

<u>Théorème</u> Soient f, g deux fonctions et x_0 un réel ou $\pm\infty$.

$$\textbf{Si } f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \textbf{ alors } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$$

<u>Exemples</u> : Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{(1-x)^7.(x+1)}{(x^3+2x^2-1).(3x^2-1)^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \text{"}\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}\text{"}$ FI

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-x)^7 \cdot x}{x^3 \cdot (3x^2)^2} = \frac{-x^8}{x^3 . 9x^4} = -\frac{x^8}{9x^7} = -\frac{x}{9}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x}{9} = -\infty$

De même : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{x}{9} = +\infty$.

Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\tan(x)}$ $\lim_{x\to 0} f(x) = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ FI

Page 31 chapitre 3

$f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$ donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Technique 5 : Théorème de l'Hospital

Page 32 chapitre 3

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur]a,x_0[, dont la limite en x_0 est nulle ou infinie, si g'(x) ne s'annule pas sur]a,x_0[, et si la limite : $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors :

FI $\boxed{"\frac{0}{0}" \text{ ou } "\frac{\infty}{\infty}"}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(0)}{g(0)} = "\frac{0}{0}" \text{ FI}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{0}{\sim} \frac{\cancel{f(0)} + x f'(0)}{\cancel{g(0)} + x g'(0)} = \frac{x f'(0)}{x g'(0)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

Page 32 chapitre 3

Technique 5 : Théorème de l'Hospital

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur $]a,x_0[$, dont la limite en x_0 est nulle ou infinie, si g'(x) ne s'annule pas sur $]a,x_0[$, et si la limite : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exemples : FI "$\frac{0}{0}$"

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x^2+3x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{2x+3} = \frac{1}{3}$

(autre méthode : $\frac{\sin x}{x^2+3x} \underset{0}{\sim} \frac{1.x}{3x} = \frac{1}{3}$)

Page 32 chapitre 3

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} \overset{FI\ "\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \overset{\sqrt{x}^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = +\infty$ ......

(autre méthode : $\ln x \underset{\infty}{<<} \sqrt{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = +\infty$ ......

......)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{x^3+5x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(2x)}{3x^2+10x} = \lim_{x\to 0}\frac{-4.\cos(2x)}{6x+10} = \frac{-4}{10} = -\frac{2}{5}.$$

Page 33 chapitre 3

FI "$\frac{0}{0}$"   FI "$\frac{0}{0}$"

$(\cos U)' = -U'.\sin U$

$(-\sin U)' = -U'.\cos U$ ici $U = 2x$

$-2(\sin(2x))' = -2\times 2\cos(2x)$

$2(-\sin(2x))' = -4\cos(2x)$.

(autre méthode : $\frac{\cos(2x)-1}{x^3+5x^2} \underset{0}{\sim}$

On sait : $\cos X \underset{0}{\sim} 1-\frac{X^2}{2} \Longrightarrow \cos(2x) \underset{0}{\sim} 1-\frac{(2x)^2}{2} = 1-\frac{4x^2}{2} = 1-2x^2$)

$X = 2x$

$\cos(2x)-1 \underset{0}{\sim} -2x^2$

$\frac{\cos(2x)-1}{x^3+5x^2} \underset{0}{\sim} \frac{-2x^2}{5x^2} = -\frac{2}{5}$

$\boxed{\text{p.39 - Ex 5 - 1}}$

Exercice 5 Calculer la limite des fonctions suivantes au « point » a donné.

1) $f(x) = \dfrac{(x^4 - 1)(x^2 + 3)}{2x(x^3 - 2)(x^2 + 2)}$ $\boxed{a = \infty}$

2) $g(x) = \dfrac{(x^7 - 2x)(x - 4)}{(x^6 - 2x)(x^3 - x)}$ $a = \infty$

3) $h(x) = \dfrac{x^6 - 3x^4 + 1}{(x + 1)(x^4 + 3)}$ $a = \infty$

4) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - 1}$ $a = 1$

5) $f(x) = \dfrac{x^3 + \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x} - 2}$ $a = \infty$

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}$ $a = 3$

"$\dfrac{\infty}{\infty}$" FI

Page 39 chapitre 3 Exercice 5

① $f(x) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{x^4 \cdot x^2}{2x \cdot x^3 \cdot x^2} = \dfrac{x^6}{2x^6} = \dfrac{1}{2}$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$

② $g(x) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{x^7 \cdot x}{x^6 \cdot x^3} = \dfrac{x^8}{x^9} = \dfrac{1}{x}$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$