Corrigé Annales DS2 - 1FTP - Sem1

Ex1

a) $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ (FI)

Méthode de l'expression conjuguée :

$$\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} = \frac{(\sqrt{1+x+x^2}-1)(\sqrt{1+x+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)}$$

$$= \frac{1+x+x^2-1}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)} = \frac{x^2+x}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)}$$

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)}$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+1}{\sqrt{1+x+x^2}+1)} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-8x+16}{x^2-16} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ ← erreur énoncé pdf.

Méthode 1 : $x^2-8x+16 = (x-4)^2$

et $x^2-16 = (x-4)(x+4)$

Donc

$$f(x) = \frac{(x-4)^2}{(x-4)(x+4)} = \frac{x-4}{x+4}$$

et $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \dfrac{0}{8} = 0.$

Méthode 2 : A l'aide de la règle de l'Hospital

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{(x^2-8x+16)'}{(x^2-16)'} = \lim_{x \to 4} \frac{2x-8}{2x}$$

$$= \frac{8-8}{8} = 0.$$

Ex2 : $X(\omega) = \left(\omega - \frac{1}{9\omega}\right)^2$

① $X(\omega)$ existe si et seulement si $\omega \neq 0$
donc : $\mathcal{D}_X = \mathbb{R}^*$

② $X(-\omega) = \left(-\omega - \frac{1}{-9\omega}\right)^2 = \left(-\omega + \frac{1}{9\omega}\right)^2$

$= \left(-\left(\omega - \frac{1}{9\omega}\right)\right)^2 = \left(\omega - \frac{1}{9\omega}\right)^2$

$X(-\omega) = X(\omega) \quad \forall \omega \neq 0.$

X est donc paire. Sa courbe est donc symétrique par rapport à (Oy) et on l'étudie sur $]0;+\infty[$.

③ $X'(\omega) = 2U'U$ où $U = \omega - \frac{1}{9\omega}$

alors $U' = 1 - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{\omega}\right)' = 1 + \frac{1}{9\omega^2}$

Ainsi $X'(\omega) = 2\underbrace{\left(1 + \frac{1}{9\omega^2}\right)}_{>0}\left(\omega - \frac{1}{9\omega}\right) \quad \forall \omega \neq 0$

④

Signe de $X'(\omega)$ sur $]0;+\infty[$:

$X'(\omega)$ est du signe de $\omega - \frac{1}{9\omega}$

$\omega - \frac{1}{9\omega} \geq 0 \iff \frac{9\omega^2 - 1}{9\omega} \geq 0$ (*)

Comme $\omega > 0$, alors (*) $\iff 9\omega^2 - 1 \geq 0$

$\iff 9\omega^2 \geq 1$

$\iff \omega^2 \geq \frac{1}{9}$

$\iff \omega \geq \frac{1}{3}$ car $\boxed{\omega > 0}$

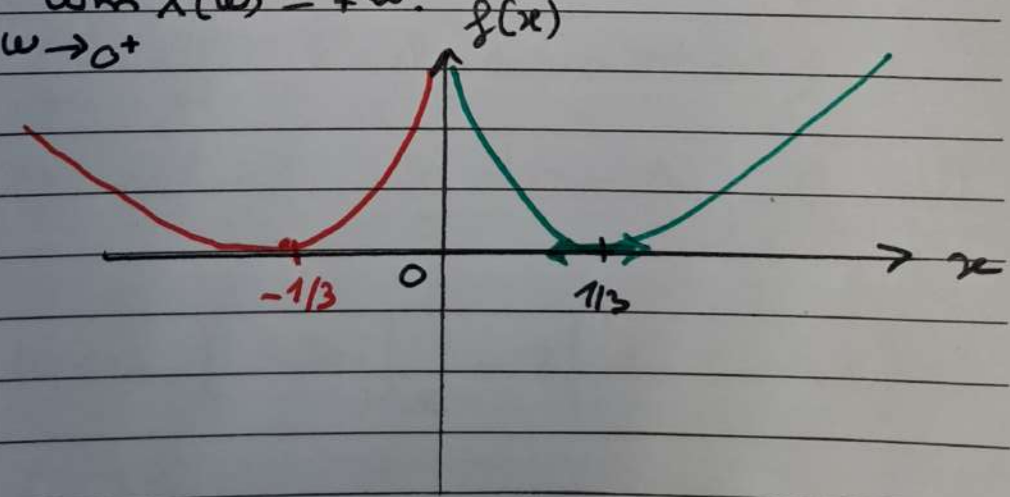
$$\begin{array}{c||ccccc}
\omega & 0 & & 1/3 & & +\infty \\
\hline
x'(\omega) & & - & 0 & + & \\
\hline
x & +\infty & \searrow & 0 & \nearrow & +\infty
\end{array}$$

$$\lim_{\omega \to 0^+} x(\omega) = \lim_{\omega \to 0^+} \left(\omega - \frac{1}{9\omega}\right)^2 = (-\infty)^2 = +\infty$$

$$x\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9 \cdot \frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\lim_{\omega \to +\infty} x(\omega) = \lim_{\omega \to +\infty} \left(\omega - \frac{1}{9\omega}\right)^2 = (+\infty)^2 = +\infty$$

<u>Remarque</u>: La courbe représentant x admet une tangente horizontale en $\frac{1}{3}$ car $x'(1/3) = 0$ et une asymptote verticale d'équation $x = 0$, car $\lim_{\omega \to 0^+} x(\omega) = +\infty$.



Ex3

① * $I(x) = \frac{8x^4}{4} - 5\frac{x^2}{2} + 2x + cte$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $I(x) = 2x^4 - \frac{5x^2}{2} + 2x + cte$

* $J(\theta) = \int 3.\cos(5\theta)\,d\theta = \frac{3}{5}.\int 5\cos(5\theta)\,d\theta$

$\int u'\cos u\,d\theta = \sin u + cte$

ici $u = 5\theta \Rightarrow u' = 5$

$J(\theta) = \frac{3}{5}.\sin(5\theta) + cte$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$

* $k(t) = \frac{2}{4}\int \frac{4t^3 + t}{2\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1}}\,dt$

$\int \frac{u'}{2\sqrt{u}}\,dt = \sqrt{u} + cte$

ici $u = t^4 + 2t^2 + 1 \Rightarrow u' = 4t^3 + 4t$

$u' = 4(t^3 + t)$

$k(t) = \frac{1}{2}.\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} + cte$

$\forall t \in \mathbb{R}$

(en effet $t^4 + 2t^2 + 1 > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$).

② * $L = \int_{-2}^{-1} \frac{3}{t}\,dt = 3.\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t}\,dt$

$L = 3.\left[\ln|t|\right]_{-2}^{-1} = 3(\ln 1 - \ln 2)$

$L = -3\ln 2.$

* $M = \int_{-\pi}^{\pi} x^3 . \cos(7x)\, dx$

$[-\pi ; \pi]$ est un intervalle centré en 0

$\left.\begin{array}{l} x \mapsto x^3 \text{ est impaire} \\ x \mapsto \cos(7x) \text{ est paire} \end{array}\right\}$ donc

$x \mapsto x^3 . \cos(7x)$ est impaire.

Alors $M = 0$.

* $N = \int_0^1 t . \sqrt{e^{-t^2}}\, dt$

$$N = \int_0^1 t . \left(e^{-t^2}\right)^{1/2} dt$$

$$N = -\int_0^1 -t . e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$\int u' e^u \, dt = e^u + cte$

Ici $u = -t^2/2 \Rightarrow u' = -\frac{1}{2} . 2t = -t$

$$N = -\left[e^{-t^2/2}\right]_0^1 = -\left(e^{-1/2} - e^0\right)$$

$$N = 1 - e^{-1/2}$$

Ex 5 Les solutions de $3y' - y = 5$ sont :

$$y(t) = K . e^{\frac{1}{3}t} - 5 \; ; \; K \in \mathbb{R}.$$

En effet, on applique la formule :

$ay' + y = b \iff y(t) = K . e^{-t/a} + b$

Ici $3y' - y = 5 \iff -3y' + y = -5$.
où $a = -3$; $b = -5$.
Donc $y(t) = k \cdot e^{\frac{1}{3}t} - 5$; $k \in \mathbb{R}$.

La solution vérifiant $y(0) = -1$:
$y(0) = ke^0 - 5 = -1 \Rightarrow k = -1 + 5 = 4$.

La solution est donc : $y(t) = 4e^{\frac{1}{3}t} - 5$.