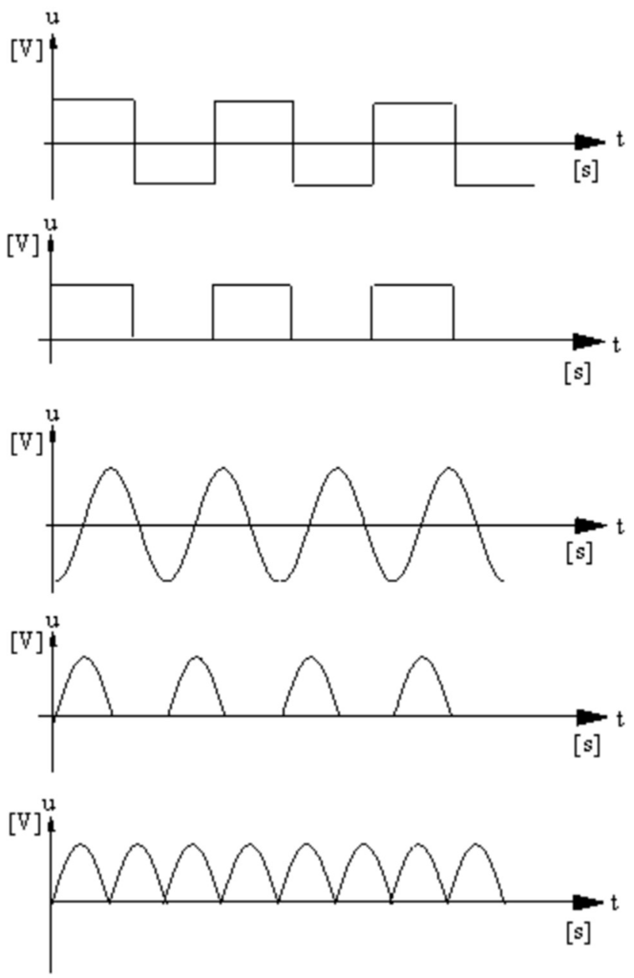
BACHELOR UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE

Ressource R1-04 : OUTILS MATHEMATIQUES ET LOGICIELS

Chapitre 4 : Les bases du calcul intégral pour le GEII



signal	U_m	U_{eff}
carré symétrique	0	U_{max}
carré positif	$\frac{U_{max}}{2}$	$\frac{U_{max}}{2}$
alternatif sinusoïdal	0	$\frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$
pulsé redressement simple alternance	$\frac{U_{max}}{p}$	$\frac{U_{max}}{2}$
pulsé redressement double alternance	$\frac{2 \times U_{max}}{p}$	$\frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$

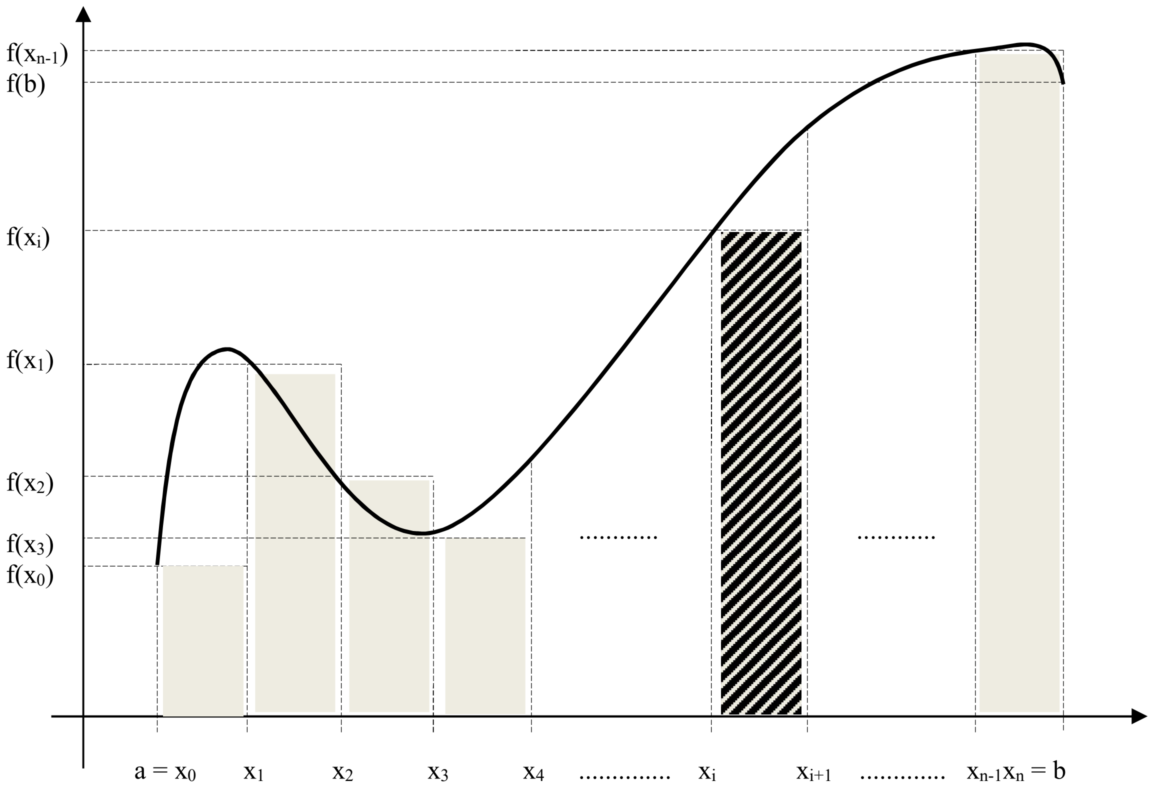
Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr

Table des matières

Partie A : Introduction

I. Généralités

1) Sommes de Riemann



Soit f, une fonction définie sur un intervalle [a,b]. On divise l'intervalle [a,b] en n sous intervalles de même longueur h, on a alors : h = $\frac{b-a}{n}$

On note $[x_0,x_1]$; $[x_1,x_2]$; $[x_2,x_3]$; $[x_3,x_4]$; … ;$[x_i,x_{i+1}]$;… ;$[x_{n-1},x_n]$, ces n intervalles, on a alors :

$x_0 = a$; $x_1 = a+h$; $x_2 = a+2h$; ... ; $x_i = a+ih$;…$x_{n-1} = a+(n-1)h$; $x_n = a+nh$

$h.f(x_i)$ est l'aire algébrique du rectangle hachuré.
Donc $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} h.f(x_i)$ est l'aire algébrique de tous les rectangles.
Si n, le nombre de sous-intervalle tend vers l'infini, alors h tend vers 0.
On dit que la fonction f est intégrable sur [a,b] lorsque $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe et est finie, on note alors : $\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} S_n$.

- **Conséquence : La valeur de $\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} S_n$ est donc l'aire algébrique du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équation x=a et x=b .**
- **Théorème : Toute fonction continue sur [a,b] est intégrable sur [a,b]**

2) Exemple

a) Pré-requis 1 : Somme des n+1 premiers termes d'une suite géométrique de raison q≠1.

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

b) Pré-requis 2 : Limite à connaître : $\lim_{X\to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$

c) A l'aide de la définition de l'intégrale ci-dessus, calculer $I = \int_0^1 e^x dx$

$a = 0$; $b = 1$; $h = 1/n$; $f(x) = e^x$; $x_0 = 0$; $x_1 = 1/n$; $x_2 = 2/n$; … ; $x_i = i/n$; …. ; $x_n = 1$.

Aire algébrique de tous les rectangles : $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} h.f(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}.e^{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n}.\sum_{i=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^i$

Il s'agit de la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison $q = e^{\frac{1}{n}}$, on applique donc la formule du a)

$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$, et on obtient : $S_n = \frac{1}{n}.\sum_{i=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^i = \frac{1}{n}.\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}.\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$

Calculons alors $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}.\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right)$, ce qui donne la forme indéterminée « 0× ∞ ».

Pour lever cette indéterminée, on pose le changement de variable $X = \frac{1}{n}$, et on utilise le b).

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}.\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right) = \lim_{X\to 0}\left(X.\frac{1-e}{1-e^X}\right) = (1-e).\lim_{X\to 0}\left(\frac{X}{1-e^X}\right)$$

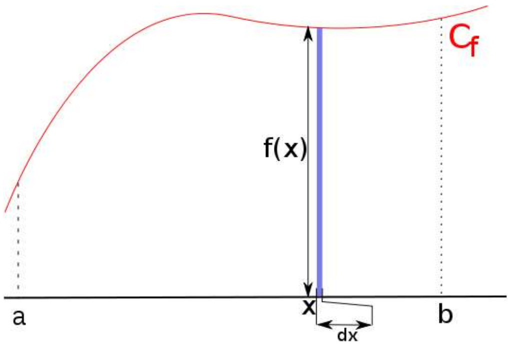
Comme $\lim_{X\to 0} \frac{e^X-1}{X} = 1$, alors $\lim_{X\to 0}\left(\frac{X}{1-e^X}\right) = -\frac{1}{\lim_{X\to 0}\left(\frac{1-e^X}{X}\right)} = -1$,

Ainsi, $\lim_{n\to\infty} S_n == (1-e).\lim_{X\to 0}\left(\frac{X}{1-e^X}\right) = e-1$, il s'agit donc d'une limite finie.

La fonction exponentielle est donc intégrable sur [0 ;1], et : $\int_0^1 e^t dt = \lim_{n\to\infty} S_n = e-1$ **.**

3) Remarques :

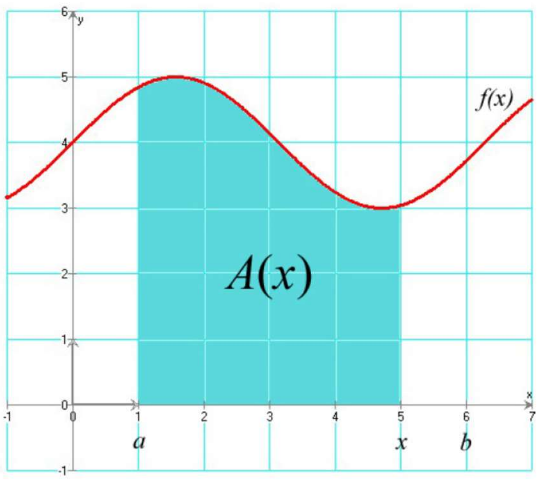
✓ Notation de l'intégrale : Il ne faut pas oublier dx !!!

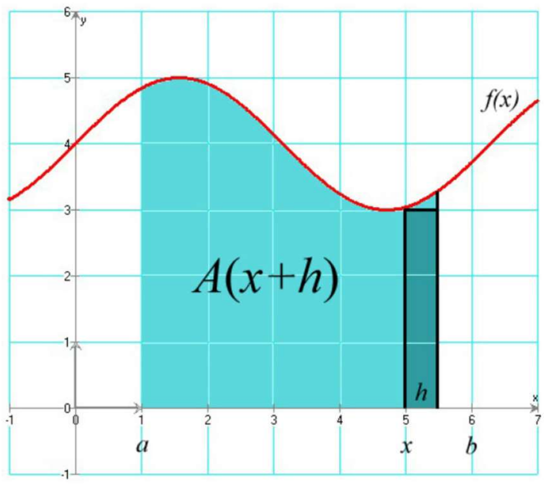


dx est une variation infinitésimale de x.
f(x)dx est donc l'aire algébrique infinitésimale du rectangle de côtés f(x) et dx.
$\int_a^b f(x)dx$ est la somme continue des aires algébriques de ces rectangles lorsque x parcourt l'intervalle [a,b]
$\int_a^b f(x)dx$ est donc l'aire algébrique du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équation x=a et x=b.

✓ Calcul d'une l'intégrale : Soit f, une fonction continue sur [a,b]. Calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ à l'aide de la définition page 3 est trop long et fastidieux, recherchons une autre méthode.
Notons A(x) l'aire algébrique du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites verticales passant par a et x. A(a) = 0 et $A(b) = \int_a^b f(x)dx$
Supposons que x augmente de h, l'aire du domaine devient alors A(x+h).
Lorsque h est suffisamment petit, alors l'aire A(x+h) - A(x) est approximativement égale à l'aire du rectangle de côtés h et f(x) : $A(x+h) - A(x) \approx h.f(x)$
En divisant par h, on obtient : $\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \approx f(x)$

Ainsi : $\lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)$.
On reconnaît la définition de la dérivée de A en x, d'où l'égalité : $A'(x) = f(x)$





4) Fonctions primitives

Théorème Soit f, une fonction intégrable sur [a,b]. On appelle fonction primitive de f sur [a,b] toute fonction notée F, définie par : F'(x) = f(x) $\forall x \in [a,b]$.

Remarque Si G(x)=F(x)+Cte, alors G'(x) = F'(x) = f(x) $\forall x \in [a,b]$. G est donc aussi une primitive de f sur [a,b].
Reprenons notre calcul d'intégrale : Puisque $A'(x) = f(x)$, alors A est une primitive de f et A(x) = F(x) + Cte.
Comme A(a) = F(a) + Cte = 0, alors Cte = A(a) - F(a).
D'où le résultat suivant : A(b) = F(b) - F(a). Nous venons de montrer que $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).}$

Partie B : Définitions et propriétés

I. Fonctions primitives

<u>Théorème/définition</u> Soit f, une fonction continue sur [a,b]. On appelle fonction primitive de f sur [a,b] toute fonction notée F, définie par : F'(x) = f(x) $\forall x \in [a,b]$.

<u>Remarque</u> Si G(x) = F(x) + Cte, alors G'(x) = F'(x) = f(x) $\forall x \in [a,b]$. G est donc aussi une primitive de f sur [a,b].

.

<u>Notation</u> On notera : $\int f(x)dx$ toutes les fonctions primitives de f, on a donc :

$$\int f(x)dx = F(x) + cte$$

<u>Exemples</u>

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

……………………………………………………………………………………………………...........................

……………………………………………………………………………………………………...........................

……………………………………………………………………………………………………...........................

……………………………………………………………………………………………………...........................

……………………………………………………………………………………………………...........................

<u>Remarque</u> Il ne faut pas oublier dx !!

$I(x) = \int x^2\, dx =$ …………………………………………………

$I(t) = \int x^2\, dt =$ ……………………………………………………………………………………………….

<u>Tableau des Primitives</u>

$\int x^\alpha .dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \ ;\ \alpha \neq -1$	$\int U'.U^\alpha dx = \frac{U^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \ ;\ \alpha \neq -1$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + cte$	$\int \frac{U'}{2\sqrt{U}} dx = \sqrt{U} + cte$
$\int e^x .dx = e^x + cte$	$\int U'.e^U .dx = e^U + cte$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln(\|x\|) + cte$	$\int \frac{U'}{U} dx = \ln(\|U\|) + cte$
$\int \frac{1}{x^2} dx = - \frac{1}{x} + cte$	$\int \frac{U'}{U^2} dx = - \frac{1}{U} + cte$
$\int \cos(x).dx = \sin(x) + cte$	$\int U'.\cos(U).dx = \sin(U) + cte$
$\int \sin(x).dx = -\cos(x) + cte$	$\int U'.\sin(U).dx = -\cos(U) + cte$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)} .dx = \tan(x) + cte$	$\int \frac{U'}{\cos^2(U)} .dx = \tan(U) + cte$
$\int (1 + \tan^2(x)).dx = \tan(x) + cte$	$\int U'.(1 + \tan^2(U)).dx = \tan(U) + cte$
$\int \frac{1}{1+x^2} .dx = \arctan(x) + cte$	$\int \frac{U'}{1+U^2} .dx = \arctan(U) + cte$

<u>Exemples</u> : Compléter en s'aidant du tableau des primitives :

$I(x) = \int x^3\sqrt{x}\,dx$ ……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

$J(x) = \int 3.\cos(3x-1)\,dx$ ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

$K(x) = \int 2.(2x+5)^{10}dx$ ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

$Q(x) = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ ……………………………………………………………………

$L(x) = \int \frac{3x^2-1}{x^3-x+10}\,dx$ ……………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

$M(x) = \int 5.e^{5x}dx$ ……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

$N(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ ………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

$P(x) = \int \frac{1}{(x+3)^2}\,dx$ ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

$P(x) = \int (1+tan^2(3x))dx$ ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

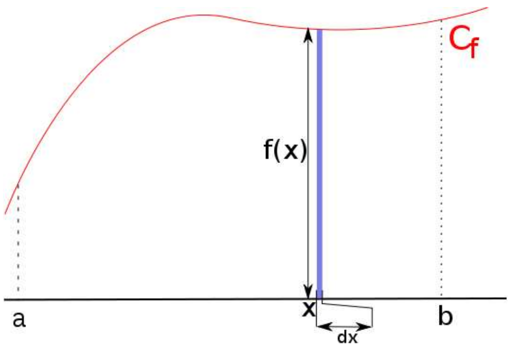
II. Calcul intégral

Théorème / définition : Soit f, une fonction continue sur [a,b], soit F, une fonction primitive de f. On appelle intégrale de la fonction f sur l'intervalle [a,b], le nombre noté $\int_a^b f(x)dx$ et tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Interprétation graphique : $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique du domaine compris entre la courbe représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = a et x = b.

Remarque Il ne faut pas oublier dx !!



dx est une variation infinitésimale de x.
f(x)dx est donc l'aire algébrique infinitésimale du rectangle de côtés f(x) et dx.
$\int_a^b f(x)dx$ est la somme continue des aires algébriques de ces rectangles lorsque x parcourt l'intervalle [a,b]
$\int_a^b f(x)dx$ est donc l'aire algébrique du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équation x=a et x=b.

Exemples et applications

- ✓ Compléter :

$I = \int_0^1 e^t dt =$ ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

$J = \int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} dx =$ ……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

III. Propriétés

1) Linéarité

Soit f, g deux fonctions continues sur [a,b]. Soit α et β deux nombres réels. On a alors :

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

Exemples et applications

- ✓ $I = \int_{-1}^{1} (3x^7 + 2x^6 - 1)dx =$……………………………………………………………………………

………

………

$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx =$……………………………………………………………………………………

………

………

$L(x) = \int (5.\cos(2x) - e^{5x} + 9)dx =$ ……………………………………………………………………

………

………

………

………

………

………

………

………

2) Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé I. Soit a, b, c trois réels de I. On a alors : $$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Exemple Signal défini par morceaux : $f(x) = \begin{cases} x \; si \; 0 \leq x < 1 \\ -x + 4 \;\; si \;\; 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$\int_0^2 f(x)dx =$ …………………………………………… …………………………………………………… …………………………………………………… …………………………………………………… …………………………………………………… …………………………………………………… …………………………………………………… …………………………………………………… …………………………………………………… …………………………………………………… …………………………………………………… ……………………………………………………	

Cas particulier $\int_a^b f(t)dt + \int_b^a f(t)dt =$ …………………………………………………… ……………………………

Donc : $\boxed{\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt}$

………

………

………

………

Partie C : Calcul de valeurs moyenne et efficace

I. Valeur moyenne d'un signal périodique

La valeur moyenne d'un signal f, T-périodique est égale à : $m = \frac{1}{T}.\int_0^T f(x)dx$

Exemple : Calculer la valeur moyenne d'un courant alternatif de la forme : $i(t) = \sin(\omega t)$

……………………………………………………………………………………………………

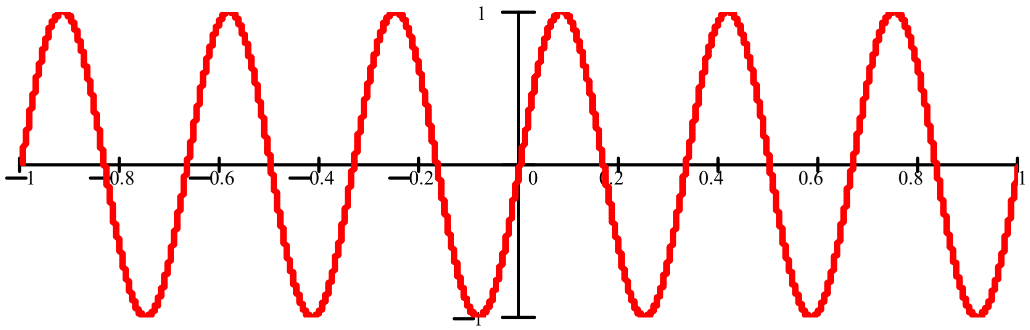
……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Etait-ce prévisible ?



II. Valeur efficace d'un signal périodique

La valeur efficace d'un signal f, T-périodique est égale à : $U_{eff}^2 = \frac{1}{T}.\int_0^T f^2(x)dx$

Exemple : Déterminer la valeur efficace d'une tension sinusoïdale u, définie par :
$u = U_m.\sin(\omega t + \varphi)$

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

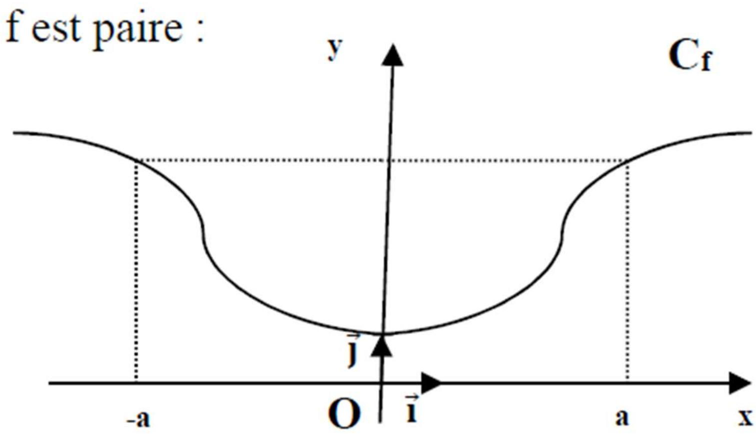
……

Partie D : Intégrale de fonctions paires/impaires et/ou périodiques.

I. Intégrale de fonctions paires / impaires

1) Intégrale d'une fonction paire sur un intervalle centré en 0

Rappel : Une fonction f, définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ centré en 0, est dite paire lorsque : $\forall x \in D\ \ f(-x) = f(x)$.
Sa représentation graphique est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



………………………………………………………………………………………………...

Soit f, une fonction paire et continue sur [-a,a]. On a alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2.\int_{0}^{a} f(x)dx$

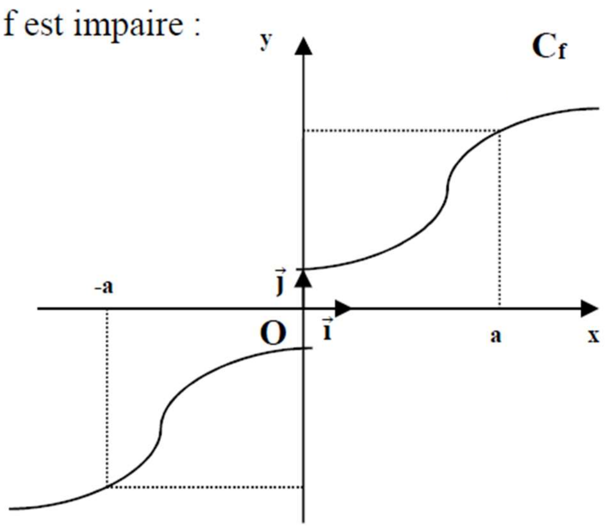
Exemple $\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} cos(3\,t).\,sin^4(3\,t)dt$ =……………………………………………………………..........

…………………………………………………………………………………………...............................

…………………………………………………………………………………………...............................

2) Intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0

Rappel : Une fonction f, définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ centré en 0, est dite impaire lorsque : $\forall x \in D\ \ f(-x) = -f(x)$.
Sa représentation graphique est alors symétrique par rapport à l'origine du repère.



…………………………………………………………………………………………………..

Soit f, une fonction impaire et continue sur [-a,a]. On a alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Exemple $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t.\cos(t).\sin^4(t)dt =$……………………………………………………………………………

……

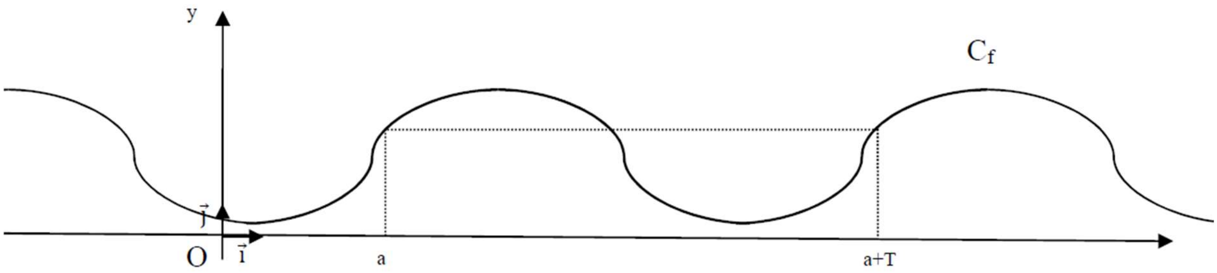
……

……

……

II Intégrale d'une fonction périodique sur un période

Rappel : Une fonction f, définie sur D, un sous-ensemble de ℝ est dite périodique lorsqu'il existe un réel T>0, le plus petit possible tel que : $\forall x \in D \;\; f(x+T) = f(x)$. Sa représentation graphique est obtenue par translation on étudie f sur un intervalle de longueur T.



……

……

Soit f, une fonction T-périodique, continue sur tout intervalle [a ; a+T]. On a alors :

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

Exemple $\int_0^{2\pi} \cos^2(t).\sin^3(t)dt =$……………………………………………………………………

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Partie E : Exercices

Exercice 1 Déterminer les primitives des fonctions suivantes (on précisera les ensembles de définition) :

$f(x) = 5x^2 - 5$; $g(x) = \sin(2x-3) + \frac{2}{x}$; $h(x) = 2e^{5x-3} + 3x - 2$;

$m(t) = 2\cos(t) - 8\sin(t)$; $n(t) = 3t^2 - 5t + 2$; $p(t) = \frac{-3}{2t+1}$;

$q(r) = e^{-5r+2} + 8r$; $r(y) = 2y^5 - 1$; $h(\theta) = 3\cos(-2\theta + 5)$

Exercice 2

I= $\int_{-5}^{5}(4x^2-3)dx$; $J = \int_0^7 \sin(2t)dt$; $K = \int_1^3 (2e^{2x} - 3x)dx$; $L = \int_{-1}^{3}(5t-4)dt$

$M = \int_1^3 \theta^2 dx$; $N = \int_{-1}^{3} 3\cos(5\theta)d\theta$; $P = \int_0^{0,01} 2\sin(314\theta)d\theta$; $Q = \int_1^2 \frac{2}{3r+2}dr$

Exercice 3

$I(x) = \int \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2}dx$; $J = \int_1^2 \frac{x+2}{x^2+4x+3}dx$; $K = \int_1^e \frac{\ln^4(t)}{t}dt$; $L(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$;

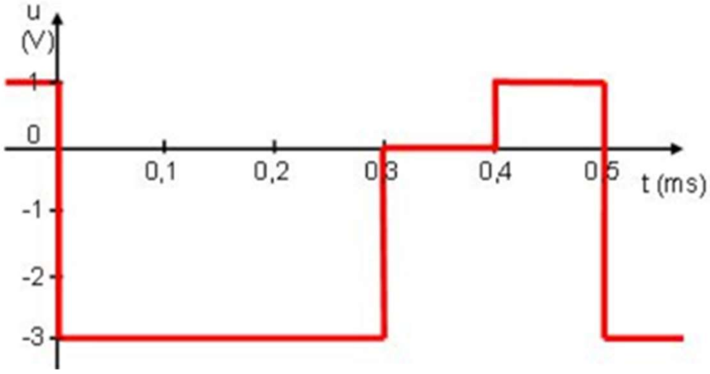
$P = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+5}$; $Q = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x . dx$; $Y = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{e^{3x}}}$;

$N = \int_{-7\pi}^{7\pi} \cos^2(x)\sin^3(5x).dx$; $R = \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x}}dx$; $S(x) = \int (1+\tan^2(x)).\tan^3(x).dx$;

$T(x) = \int \frac{1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}}.dx$; $U = \int_0^1 \frac{dt}{e^{-t}+1}$; $V = \int_1^3 \frac{x}{x^4+1}dx$; $W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x).\sin^5(x).dx$;

Exercice 4 Un circuit comprend un générateur de force contre électromotrice E (en Volt), une bobine de résistance R (en Ohm) et d'inductance L (en Henry). L'intensité du courant i(t) (en Ampères) à l'instant t (en secondes) est donnée par la relation : $i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$. Calculer la quantité d'électricité Q, en Coulombs, mise en jeu entre les temps 0 et 0,1 secondes. On rappelle que $Q = \int_0^{0,1} i(t)dt$

Exercice 5 Déterminer les valeurs moyenne et efficace du signal 0,5-périodique représenté ci-dessous :



Partie F : Exercices d'entraînement pour les poursuites d'études

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^1 x(x^2+1)^5\,dx \;;\quad J=\int_{-2}^{2}\sqrt{x+2}.dx \;;\quad K=\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+1}dx \;;\quad L=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x.dx \;;$$

$$M=\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \arg\mathrm{sh}(x^3)dx \;;\; N=\int_0^{2\pi}\cos(px)\cos(qx)dx$$ où p et q sont des entiers relatifs.

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une (ou plusieurs) intégration par

Parties :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur [a,b] telles que u' et v' sont continues sur [a,b].
On a alors : $\int_a^b u(t).v'(t)dt=[u(t).v(t)]_a^b-\int_a^b u'(t).v(t)dt$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} x.\sin(\alpha x).dx \text{ où } \alpha\neq 0 \;;\; J=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\arcsin x.dx \;;\; K=\int_1^e (\ln x)^2.dx \;;$$

$L(x)=\int x^n.\ln x.dx$ où n est un entier relatif ; $M(x)=\int \cos x.\ln(1+\cos x).dx$;

$$N(x)=\int x.\tan^2 x.dx \;;\quad P(x)=\int\frac{x.\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.dx \;;\quad Q(x)=\int(\arcsin x)^2.dx \;;$$

$R(x)=\int x.(\arctan x)^2.dx$; $S(x)=\int e^{ax}\cos(bx).dx$ où a et b sont des réels non nuls ;

$$T(x)=\int \sin(\ln x).dx \;;\quad U(x)=\int\sqrt{1-x^2}.dx \;;\quad V(x)=\int\sqrt{1+x^2}.dx \;;$$

$$W(x)=\int\frac{x^2}{(1+x^2)^{3/2}}.dx$$

Notes

Notes

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

Notes