IUT de Toulon
GEII2App

Devoir de mathématiques n°1 – S3- Entraînement

Durée : 1h30. Calculatrice : collège Documents : aucun

Exercice 1 : Série de Fourier à coefficients réels (9.5 points)

Soit la fonction numérique, de période 2π , définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x \text{ si } x \in [-\pi,0[\\ \pi - x \text{ si } x \in [0,\pi[\end{cases}$$

a. Tracer dans un repère orthonormé la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi,2\pi]$.

b. Calculer les coefficients de Fourier réels de f, puis écrire son développement en série de Fourier.

c. Montrer que f est développable en série de Fourier (théorème de Dirichlet), et en déduire la valeur de : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

d. A l'aide du logiciel Mathcad, tracer le spectre d'amplitude du signal f de 1 à 15. Faire valider par l'enseignante et recopier sur sa feuille en 2 lignes la démarche (les lignes écrites sur le logiciel).

Exercice 2 Transformation en Z (4.5 points)

a. Déterminer la transformée en Z des séquences numériques de période 1 définies par : $f(k)=k^2.U(k)$; $g(k)=(k^2-3k+1).U(k-2)$

b. Déterminer la transformée inverse de la fonction suivante :

$$F(z) = \frac{2.z^2 - z\sqrt{3}}{z^2 - z\sqrt{3} + 1}$$

c. en déduire la transformée en Z de $G(z) = \frac{2.z \ -\sqrt{3}}{z^2 - z\sqrt{3}+1}$

Exercice 3 Transformation en Z – Fonction de transfert (6 points)

Soit l'équation aux différences : $3.y(k) - 2.y(k-1) - y(k-2) = x(k)$

a. Déterminer H(z) la fonction de transfert

b. Déterminer la réponse impulsionnelle (lorsque x est l'impulsion de Dirac)

c. Déterminer la réponse au signal échelon-unité retardé de 1 (lorsque x(k)=U(k-1)).

Série de Fourier réel

- Coefficients

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x).dx \; ; \; a_n = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x).\cos(n\omega x).dx \; ; \; b_n = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x).\sin(n\omega x).dx \quad \text{pour } n \geq 1,$$

avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

- Série

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n.\cos(n\omega x) + b_n.\sin(n\omega x))$$

Théorème de Dirichlet

Soit f un signal de période T, intégrable sur tout intervalle $[\alpha, \alpha+T]$.
- Si f est continue sur $[\alpha, \alpha+T[$, sauf en un nombre fini de points où elle admet une limite finie à gauche et à droite.
- f est dérivable sur $[\alpha, \alpha+T[$, sauf en un nombre fini de points où sa dérivée admet une limite finie à gauche et à droite.
Alors la série de Fourier de f converge en tout point x et sa fonction somme est alors :

$$a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty}(a_p.\cos(p\omega x) + b_p.\sin(p\omega x)) = \begin{cases} f(x) \text{ pour x où f est continue} \\ \dfrac{f(x_+) + f(x_-)}{2} \text{ pour x où f est discontinue.} \end{cases}$$

On dit alors que <u>f est développable en série de Fourier.</u>

Transformées en Z de séquences numériques usuelles (T_e=1)

$f_e=\{f(k)\}=TZ^{-1}(F)$	$TZ(f_e) = F(z) = \sum_{k\geq 0} f(k).z^{-k}$
δ_n où n est un entier naturel	z^{-n} ; $z \neq 0$
$U(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$; $\lvert z\rvert > 1$
$k.U(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$; $\lvert z\rvert > 1$
$a^k.U(k)$	$\dfrac{z}{z-a}$; $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$\cos(\omega k).U(k)$	$\dfrac{z^2 - z\cos(\omega)}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1}$; $\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\omega k).U(k)$	$\dfrac{z\sin(\omega)}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1}$; $\lvert z\rvert > 1$
$a^k.\cos(\omega k).U(k)$	$\dfrac{z^2 - az\cos(\omega)}{z^2 - 2az\cos(\omega) + a^2}$; $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

$a^k . \sin(\omega k).U(k)$	$\frac{az\sin(\omega)}{z^2 - 2az\cos(\omega) + a^2}$; $\|z\| > \|a\|$

Propriétés de la transformation en Z

$f_e = \{f(k)\} = TZ^{-1}(F)$	$TZ(f_e) = F(z) = \sum_{k \geq 0} f(k).z^{-k}$
$\alpha f_e + \beta g_e$	$\alpha F(z) + \beta G(z)$; $\|z\| > \max(\frac{1}{R_1} ; \frac{1}{R_2})$
$k.f(k)$	$-z.F'(z)$; $\|z\| > \frac{1}{R}$
$a^k .f(k)$	$F(\frac{z}{a})$; $\|z\| > \frac{\|a\|}{R}$
Séquence retardée de p : $f(k-p)$	$z^{-p}.F(z)$; $\|z\| > \frac{1}{R}$
Séquence avancée de p : $f(k+p)$	$- f(0) - f().z^{-1} - ... - f((p-1)).z^{-(p-1)} \Big]$ $\|z\| > \frac{1}{R}$
$\sum_{n=0}^{k} f(n)$	$\frac{z}{z-1}.F(z)$
Produit de convolution : $(f_e * g_e)(k) = \sum_{n=0}^{k} f(n)g(k-n)$	$F(z).G(z)$; $\|z\| > \max(\frac{1}{R_1} ; \frac{1}{R_2})$