Licence Sciences et Techniques
L1 PC & SI - Spécialité Renforcée

Gloria Faccanoni

http://faccanoni.univ-tln.fr/enseignements.html

R22 – Équations Différentielles

Recueil de 65 exercices corrigés et aide-mémoire.

Année 2023 – 2024

Dernière mise-à-jour : Dimanche 21 janvier 2024

Table des matières

UNIVERSITÉ DE TOULON

R22 – EDO		
CM-TP	21h	7 séances de 3h

Gloria FACCANONI

IMATH Bâtiment M-117
Université de Toulon
Avenue de l'université
83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 83 16 66 72

✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr
ℹ http://faccanoni.univ-tln.fr

Chapitre 1.

Équations Différentielles Ordinaires (EDO)

Les équations différentielles décrivent l'évolution de divers phénomènes dans de nombreux domaines. Elles expriment des relations impliquant une ou plusieurs dérivées d'une fonction inconnue. Lorsque ces dérivées sont toutes prises par rapport à une seule variable, on parle d'équation différentielle ordinaire (EDO), tandis que celles impliquant des dérivées partielles sont qualifiées d'équations aux dérivées partielles (EDP).

Dans ce chapitre

1.1. EDO d'ordre p

Une EDO se présente sous la forme générale :

$$F(y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(p)}(t)) = g(t).$$

- Les inconnues sont une **fonction** $y\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et son **intervalle de définition** I.
- Elle combine la fonction inconnue y et ses dérivées y', y'', ...,$y^{(p)}$ (où p est l'**ordre** de l'équation).

Si la fonction g, appelée «second membre» de l'équation, est nulle, l'équation est dite **homogène**.

Exemple (Modèles de croissance)

Nous présentons des modèles basés sur des équations différentielles qui décrivent l'évolution temporelle des populations, mettant en lumière les mécanismes régissant leur croissance et leur décroissance. Ces modèles représentent des exemples concrets illustrant l'application des équations différentielles dans des situations réelles. Les trois principales hypothèses – Malthusienne, de Verhulst et de Gompertz – offrent différentes perspectives sur la croissance et la régulation des populations.

Hypothèse Malthusienne. La croissance de la population est proportionnelle à son effectif à chaque instant :

$$q'(t) = \alpha q(t).$$

La désintégration atomique suit une décroissance régie par la même équation, mais avec $\alpha < 0$. C'est une EDO d'ordre 1.

Hypothèse de Verhulst. La croissance de la population à chaque instant est «proportionnelle» à son effectif, mais freinée par des ressources limitées :

$$q'(t) = \alpha q(t)(m - q(t)).$$

Le point d'équilibre m est atteint lorsque la dérivée de q est nulle, soit lorsque $q = m$. C'est une EDO d'ordre 1.

Hypothèse de Gompertz. La croissance de la population à chaque instant est «proportionnelle» à son effectif, mais restreinte par des ressources limitées :

$$q'(t) = \alpha q(t)(\ln(k) - \ln(q(t)).$$

Le point d'équilibre k est atteint lorsque la dérivée de q est nulle, soit lorsque $q = k$. C'est une EDO d'ordre 1.

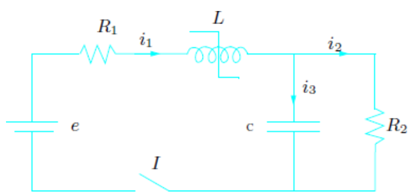


FIGURE 1.1. – Circuits électriques

EXEMPLE (ÉVOLUTION D'UNE POPULATION DE SAUMONS — 1)
Soit $N(t)$ le nombre d'individu d'une population à l'instant t. La population N a un taux de naissance saisonnier ; le taux de décès est proportionnel au nombre d'individu au carré (par surpopulation, dus par exemple au manque de nourriture). On considère enfin un terme indépendant de la taille et du temps (par exemple, si cette EDO modélise l'élevage de saumons, ce terme représente les saumons péchés). On a alors l'équation différentielle

$$N'(t) = (2 - \cos(t))N(t) - \frac{1}{2}N^2(t) - 1.$$

On aura donc deux types de questions :

1. trouver toutes les solutions de l'EDO ;
2. trouver la ou les solutions qui vérifient une condition supplémentaire comme par exemple le nombre d'individu à l'instant initial.

EXEMPLE (SYSTÈME DE LOTKA-VOLTERRA — 1)
Considérons une population de bactéries dans un environnement confiné dans lequel pas plus de B individus ne peuvent coexister. On suppose qu'au temps initial le nombre d'individus est égal à $y_0 \ll B$ et que le taux de croissance des bactéries est une constante positive C. Alors, la vitesse de croissance de la population est proportionnelle au nombre de bactéries, sous la contrainte que ce nombre ne peut dépasser B. Ceci se traduit par l'équation différentielle suivante

$$y'(t) = Cy(t)\left(1 - \frac{y(t)}{B}\right) \tag{1.1}$$

dont la solution $y = y(t)$ représente le nombre de bactéries au temps t. Supposons que deux populations y_1 et y_2 soient en compétition. L'équation précédente est alors remplacée par

$$\begin{cases} y_1'(t) = C_1 y_1(t)\left(1 - b_1 y_1(t) - d_2 y_2(t)\right), \\ y_2'(t) = -C_2 y_2(t)\left(1 - b_2 y_2(t) - d_1 y_1(t)\right), \end{cases}$$

où C_1 et C_2 représentent les taux de croissance des deux populations. Les coefficients d_1 et d_2 commandent le type d'interaction entre les deux populations, tandis que b_1 et b_2 sont reliés à la quantité de nutriments disponibles. Ce système de 2 EDO d'ordre 1 est appelé système de Lotka-Volterra et sert de base à divers modèles.

EXEMPLE (CIRCUITS ÉLECTRIQUES)
Considérons le circuit électrique de la Figure 1.1. On veut calculer la fonction $v(t)$ représentant la chute de potentiel aux bornes du condensateur C sachant que l'interrupteur I a été fermé à $t = 0$. On suppose que l'inductance L s'exprime comme une fonction explicite de l'intensité du courant i, c'est-à-dire $L = L(i)$. La loi d'Ohm donne

$$e - (i_1(t)L(i_1(t)))' = i_1(t)R_1 + v(t)$$

où R_1 est une résistance. En supposant que le courant est dirigé comme indiqué sur la Figure 1.1, on trouve, en dérivant par rapport à t la loi de Kirchhoff $i_1 = i_2 + i_3$ et en remarquant que $i_3 = Cv'(t)$ et $i_2 = v(t)/R_2$, l'équation supplémentaire

$$i_1'(t) = Cv''(t) + \frac{1}{R_2}v'(t).$$

On a donc trouvé un système de 2 EDO, la première d'ordre 1, la deuxième d'ordre 2, dont la résolution permet de décrire le comportement en temps des deux inconnues i_1 et v.

Résoudre une équation différentielle consiste à trouver toutes les fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ qui vérifient cette équation (on dit aussi *intégrer* l'équation différentielle). [1]

Définition 1.1.1 (Solution générale, solution particulière)
Par le terme *solution générale* d'une EDO on désigne un représentant qui englobe l'ensemble des solutions possibles. L'une des solutions de l'EDO sera appelée *solution particulière*. On appelle *courbes intégrales* d'une EDO les courbes représentatives des solutions de l'équation.

EXEMPLE
La résolution de l'équation différentielle $y'(t) = -y(t)$ consiste à trouver toutes les fonctions

$$\begin{aligned} y\colon I \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto y = f(t) \end{aligned}$$

telles que $f'(t) = -f(t)$ pour tout $t \in I$. On peut vérifier que $y(t) = ce^{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (où c est une constante réelle arbitraire) est une solution de l'EDO. En particulier, pour $c = 0$, on obtient la solution nulle.

1.2. EDO d'ordre supérieur à 1 $\rightsquigarrow$ système d'EDOs d'ordre 1

Une EDO d'ordre p est dite *normalisée* lorsqu'elle est exprimée sous la forme

$$y^{(p)}(t) = f(g(t), y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(p-1)}(t)). \tag{1.2}$$

Toute EDO normalisée d'ordre p peut être transformée en un système de p EDO d'ordre 1 de la manière suivante : en désignant z_1 comme la fonction y et z_i comme la i-ème dérivée $y^{(i)}$ pour $i = 2, \dots, p$, résoudre l'EDO normalisée d'ordre p (1.2) équivaut à résoudre le système de p EDO d'ordre 1 :

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t), \\ \dots \\ z_{p-1}'(t) = z_p(t), \\ z_p'(t) = f(g(t), z_1(t), z_2(t), \dots, z_{p-1}(t)). \end{cases}$$

EXEMPLE
Considérons l'équation différentielle d'ordre 2 suivante :

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) + c = 0$$

où $t \mapsto y(t)$ est l'inconnue.
Introduisons les deux fonctions $t \mapsto z_1(t) = y(t)$ et $t \mapsto z_2(t) = y'(t)$. Ainsi, $z_1'(t) = y'(t) = z_2(t)$ et $z_2'(t) = y''(t) = -ay'(t) - by(t) - c = -az_2(t) - bz_1(t) - c$. Cela donne le système de 2 équations différentielles d'ordre 1 :

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t), \\ z_2'(t) = -az_2(t) - bz_1(t) - c. \end{cases}$$

EXEMPLE (LOI DE HOOKE — OSCILLATIONS D'UN SYSTÈME MASSE-RESSORT — 1)
Quand on écarte de leur position d'équilibre certaines systèmes mécaniques, ils se mettent à vibrer. C'est le cas, par exemple, d'une corde de guitare quand elle est pincée, d'une corde de piano sous l'effet du marteau, … Un exemple simple d'un tel système est celui d'un bloc suspendu à un ressort.
Au repos, le ressort a une longueur ℓ_r. Celle-ci est augmentée de ℓ_0 quand on y accroche un bloc et qu'on laisse le système atteindre l'état d'équilibre. Si on tire sur le bloc d'une longueur y_0 et qu'on le lâche, il se met à osciller.
Selon la loi de HOOKE (confirmée par des expériences avec des masses suffisamment petites pour ne pas déformer le ressort), la force f requise pour allonger un ressort de ℓ mètres au-delà de sa longueur naturelle est proportionnelle à l'élongation : $f(\ell) = \kappa\ell$ où $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ est le coefficient d'élasticité du ressort. La force de rappel vaut alors $\kappa\ell$. Comme le système

1. Résoudre une équation revient à trouver toutes les valeurs de l'inconnue qui satisfont l'égalité. Jusqu'à présent, les inconnues étaient des nombres dans les équations rencontrées. Par exemple, résoudre l'équation $2x + 4 = 10$ signifie trouver toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ telles que $2x + 4 = 10$. Dans les équations différentielles, les inconnues sont des fonctions.

est en équilibre, cette force est égale au poids mg du bloc (m est la masse du bloc suspendu au ressort et g la constante de gravitation), d'où $mg = \kappa\ell$. Dans ce modèle on considère la masse du ressort comme négligeable.
Si la position du bloc suspendu au ressort est repéré sur un axe vertical orienté positivement vers le bas dont l'origine correspond à la position d'équilibre, le mouvement de celui-ci en fonction du temps t, après avoir été tiré vers le bas puis relâché, est donné par la fonction $t \mapsto y(t)$ solution de l'EDO

$$y''(t) + \frac{\kappa}{m}y(t) = 0. \tag{1.3}$$

Il s'agit d'une EDO d'ordre 2.
L'application

$$\varphi\colon t \in \mathbb{R} \mapsto \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) \in \mathbb{R}$$

est une solution particulière de l'EDO (1.3) car

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right),\\
\varphi'(t) &= -\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right),\\
\varphi''(t) &= -\frac{\kappa}{m}\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\varphi''(t) + \frac{\kappa}{m}\varphi(t) = -\frac{\kappa}{m}\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) + \frac{\kappa}{m}\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) = 0.$$

Cette EDO d'ordre 2 (1.3) peut être écrite sous forme normalisée

$$y''(t) = -\frac{\kappa}{m}y(t)$$

et est équivalente au système de deux EDO d'ordre 1 suivant :

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t),\\ z_2'(t) = -\frac{\kappa}{m}z_1(t), \end{cases}$$

avec $z_1(t) = y(t)$ et $z_2(t) = y'(t)$.
Les applications

$$\varphi_{A,B}\colon t \in \mathbb{R} \mapsto A\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) \in \mathbb{R}$$

sont aussi des solutions de l'EDO (1.3) car

$$\begin{aligned}
\varphi_{A,B}(t) &= A\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right),\\
\varphi_{A,B}'(t) &= -A\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) + B\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right),\\
\varphi_{A,B}''(t) &= -A\frac{\kappa}{m}\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) - B\frac{\kappa}{m}\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\varphi_{A,B}''(t) + \frac{\kappa}{m}\varphi_{A,B}(t) = -A\frac{\kappa}{m}\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) - B\frac{\kappa}{m}\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) + A\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) = 0.$$

1.3. Conditions initiales

Les EDO ont généralement une infinité de solutions. Pour déterminer la solution appropriée qui représente le problème physique, il est nécessaire de prendre en compte des données supplémentaires liées à la nature spécifique du problème. Ces données peuvent inclure les valeurs prises par la solution et/ou ses dérivées à un ou plusieurs points de l'intervalle sur lequel elle est définie.

EXEMPLE (DYNAMIQUE DES POPULATIONS — 2)
L'équation (1.1) admet la famille de solutions

$$y(t) = B\frac{e^{Ct+K}}{1+e^{Ct+K}}$$

K étant une constante arbitraire. Si on impose la condition $y(0) = 1$, on sélectionne l'unique solution correspondant à la valeur $K = -\ln(B-1)$.

Définition 1.3.1 (Condition initiale)
Soit une EDO d'ordre p. Une condition initiale (CI) est un ensemble de relations du type $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{(p-1)}(t_0) = y_0^{(p-1)}$ qui imposent en t_0 les valeurs y_0, y'_0, ..., $y_0^{(p-1)}$ respectivement de la fonction inconnue et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$.

EXEMPLE (LOI DE HOOKE — OSCILLATIONS D'UN SYSTÈME MASSE-RESSORT — 2)
Si l'on impose qu'à l'instant initial $t = 0$ le ressort est tiré de 20 cm vers le bas puis relâché avec une vitesse ascensionnelle de $2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, on a alors les conditions initiales $y(0) = 20$ et $y'(0) = -2$ et on peut vérifier qu'il n'existe qu'une seule solution de l'EDO (1.3) qui satisfait ces deux conditions. Il s'agit de la fonction

$$\varphi\colon t\in\mathbb{R}\mapsto \frac{1}{5}\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)-2\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)\in\mathbb{R}.$$

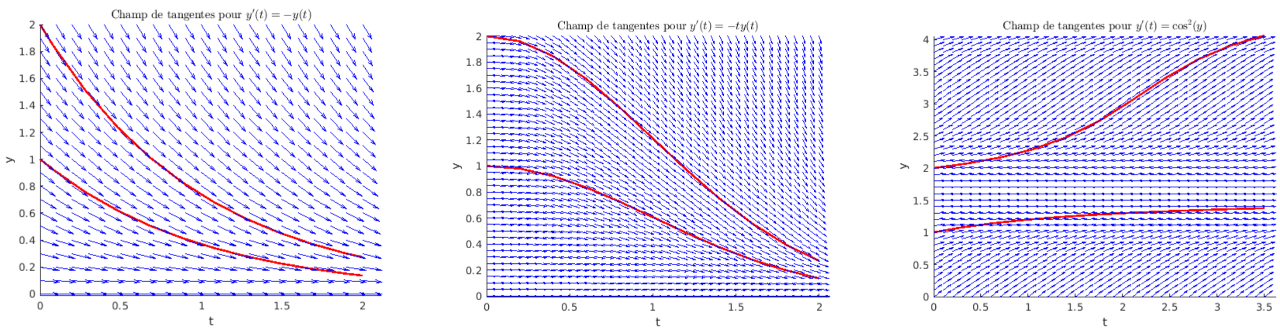
En pratique, se donner une CI revient à se donner le point (t_0, y_0) par lequel doit passer le graphe de la fonction solution et la valeur de ses dérivées en ce même point.

Remarque (Représentation graphique)
On va expliquer comment tracer l'allure des solutions d'une EDO normalisée d'ordre 1, *i.e.* une EDO du type

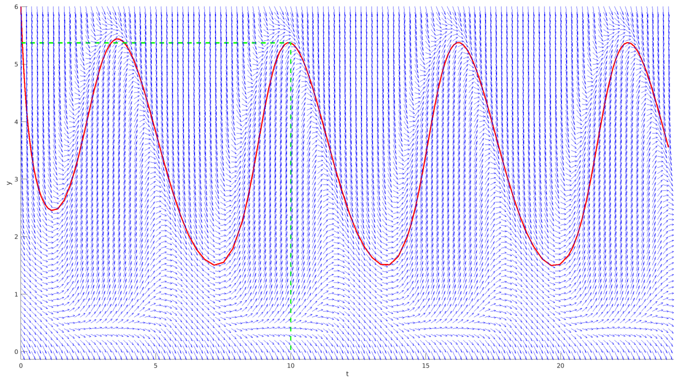
$$y' = \varphi(t, y(t)).$$

Soit $y = f(t)$ la fonction inconnue solution de cette EDO. Si (t, y) est un point du graphe de f, cette égalité dit que la tangente au graphe de f au point (t, y) a pour pente $\varphi(t, y)$.
On représente en général un champ de vecteurs en des points régulièrement espacés de $I\times\mathbb{R}$ et en normalisant les vecteurs. Dessinons alors, en (presque) chaque point (t, y) du plan un vecteur $\mathbf{V}_{t,y}$ de pente $\varphi(t, y)$: le graphe de f est tangent en chaque point (t, y) au vecteur $\mathbf{V}_{t,y}$. Remarquer qu'**on n'a pas besoin d'avoir résolu l'équation (analytiquement) pour pouvoir dessiner le champ de tangentes, et ceci permet parfois d'avoir une idée du comportement des solutions.**

EXEMPLE
En figure le champ de tangentes des EDO $y'(t) = -y(t)$, $y'(t) = -ty(t)$ et $y'(t) = \cos^2(y(t))$ et deux solutions particulières : l'une qui correspond à la CI $y(0) = 1$ et l'autre à CI $y(0) = 2$.



EXEMPLE (ÉVOLUTION D'UNE POPULATION DE SAUMONS — 2)
Considérons à nouveau l'exemple de l'évolution d'une population et traçons l'allure des solutions. Si on démarre l'élevage avec 6 saumons, on voit qu'une et une seule courbe passe par le point $(0, 6)$ et si on suit cette solution on peut prédire par exemple le nombre d'individu de la population dans dix ans : la courbe tracée en jaune donne $N(10) \approx 5.5$.



1.4. Problème de Cauchy : Existence, unicité, intervalle de validité et solution maximale

Le problème associé à une équation différentielle ordinaire (EDO) avec une condition initiale est connu sous le nom de *problème de* CAUCHY ou de *problème aux valeurs initiales* :

Définition 1.4.1 (Problème de CAUCHY)
Considérons un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, un point t_0 dans I, une fonction $\varphi\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par rapport aux deux variables et y' la dérivée de y par rapport à t. Le *problème de* CAUCHY est défini comme suit :

Trouver une fonction réelle $y \in \mathscr{C}^1(I)$ telle que

$$\begin{cases} y'(t) = \varphi(t, y(t)), & \forall t \in I, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

avec y_0 une valeur donnée appelée *condition initiale*.

Si φ ne dépend pas explicitement de t, *i.e.* si $\varphi(t, y(t)) = \varphi(y(t))$, l'EDO est dite *autonome*.
Nous concentrerons notre analyse principalement sur le cas où une seule EDO est présente, c'est-à-dire le cas scalaire.
Résoudre un problème de CAUCHY, c'est rechercher toutes les fonctions, définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, qui satisfont l'équation différentielletout en vérifiant la condition initiale. Cela soulève des questions naturelles telles que :
- trouver toutes les fonctions solutions de l'EDO,
- parmi ces fonctions, choisir celles qui respectent la CI (existence ? unicité ?),
- étudier le domaine de validité (pour chaque fonction trouvée, déterminer le plus grand intervalle contenant t_0).

EXEMPLE (EXISTENCE ET UNICITÉ SUR $\mathbb{R}$)
On se donne $\varphi(t, y(t)) = 3t - 3y(t)$ et $y_0 = \alpha$ (un nombre quelconque). On cherche une fonction $y\colon t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$ qui satisfait

$$\begin{cases} y'(t) = 3t - 3y(t), & \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Sa solution, définie sur $\mathbb{R}$, est donnée par $y(t) = (\alpha + 1/3)e^{-3t} + t - 1/3$. En effet on a bien

$$y(0) = (\alpha + 1/3)e^0 + 0 - 1/3 = \alpha, \qquad y'(t) = -3(\alpha + 1/3)e^{-3t} + 1 = -3(\alpha + 1/3)e^{-3t} + 1 - 3t + 3t = -3y(t) + 3t.$$

Dans cet exemple il existe une et une seule solution définie sur $\mathbb{R}$. Les choses ne se passent pas toujours si bien. Les exemples ci-dessous montrent que l'étude mathématique de l'existence et de l'unicité des solutions d'un problème de CAUCHY peut être une affaire délicate.

EXEMPLE (EXISTENCE ET UNICITÉ SUR $I \subset \mathbb{R}$ (MAIS NON EXISTENCE SUR $\mathbb{R}$))
On se donne $\varphi(t, y(t)) = (y(t))^3$ et $y_0 = 1$. On cherche une fonction $y\colon t \in \mathbb{R}^+ \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$ qui satisfait

$$\begin{cases} y'(t) = (y(t))^3, & \forall t > 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

On vérifie que la solution y est donnée par $y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}$ qui n'est définie que pour $t \in [0; 1/2[$. Cet exemple montre qu'*un problème de* CAUCHY *n'a pas toujours une solution pour tout* $t \in [0; +\infty[$ puisqu'ici la solution explose lorsque t tend vars la valeur 1/2 (en effet, nous avons $\lim_{t\to(1/2)^-} y(t) = +\infty$) : le graphe de la solution a une asymptote verticale en $t = 1/2$. On parle d'*explosion de la solution en temps fini* ou encore de *barrière*.

Cet exemple illustre un phénomène général : pour une solution d'une EDO, l'unique manière de ne pas être définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est de présenter une asymptote verticale.

EXEMPLE (NON UNICITÉ)
On se donne $\varphi(t, y(t)) = \sqrt[3]{y(t)}$ et $y_0 = 0$. On cherche une fonction $y\colon t \in \mathbb{R}^+ \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$ qui satisfait

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt[3]{y(t)}, & \forall t > 0,\\ y(0) = 0. \end{cases}$$

On vérifie que les trois fonctions $y_1(t) = 0$ et $y_{2,3}(t) = \pm\sqrt{8t^3/27}$, pour tout $t \ge 0$, sont solution du problème de CAUCHY donné.

Cet exemple montre qu'*un problème de* CAUCHY *n'a pas nécessairement de solution unique*, dans ce cas il y en a trois.

EXEMPLE (NON UNICITÉ)
On se donne $\varphi(t, y(t)) = |y(t)|^\alpha$ avec $\alpha \in]0;1[$ et $y_0 = 0$. On cherche une fonction $y\colon t \in \mathbb{R}^+ \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$ qui satisfait

$$\begin{cases} y'(t) = |y(t)|^\alpha, & \forall t > 0,\\ y(0) = 0. \end{cases}$$

On vérifie que, pour tout $c \in \mathbb{R}^+$, les fonctions

$$y_c(t) = \begin{cases} (1-\alpha)^{1/(1-\alpha)}(x-c)^{1/(1-\alpha)} & \text{si } x \ge c,\\ 0 & \text{si } 0 \le x \le c \end{cases}$$

sont solution du problème de CAUCHY donné.
Notons que pour $\alpha \ge 1$ le problème de CAUCHY donné admet une et une seule solution, la fonction $y(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Cet exemple montre qu'*un problème de* CAUCHY *peut même admettre une infinité de solutions.*

◇

En règle générale, lorsqu'une équation différentielle est munie d'une condition initiale $y(t_0) = y_0$, nous recherchons un intervalle I qui contient t_0, sur lequel une solution existe, et qui soit «le plus grand possible» : il n'existe aucun intervalle plus grand sur lequel l'équation différentielle aurait une solution. Ce domaine est appelé l'*intervalle de validité* de la solution. Une solution définie sur cet intervalle le plus large possible est appelée *solution maximale*.

Dans ce cours, nous étudierons uniquement des problèmes de CAUCHY ayant une unique solution sur l'intervalle indiqué.

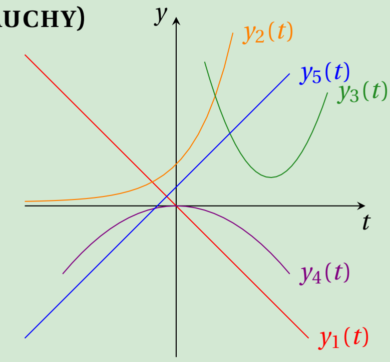
1.5. Exercices : étude qualitative d'un problème de Cauchy

Exercice 1.5.1 (Étude qualitative d'un problème de Cauchy)

On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = \frac{e^t}{t^2+1}y(t)$$

Sans résoudre l'équation différentielle, déterminer, parmi les courbes tracées ci-contre, celles qui ne représentent sûrement pas une fonction solution de cette EDO et celles qui sont susceptibles d'en représenter une.



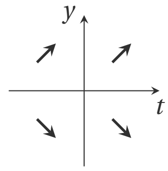
Correction

On remarque que $\frac{e^t}{t^2+1} > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Une solution y de l'EDO doit vérifier $y'(t) = 0$ si et seulement si $y(t) = 0$: si la courbe coupe l'axe des abscisses, alors elle a une tangente horizontale en ce point. Les courbes y_2 (orange) et y_3 (verte) ne coupent pas l'axe des abscisses. Les courbes y_1 (rouge), y_4 (violette) et y_5 (bleu) sont les seules courbes qui coupent l'axe des abscisses ; les courbes y_1 (rouge) et y_5 (bleu) n'ayant pas de tangente horizontale en ce point, elles ne conviennent pas.

L'équation impose aussi que $y(t)$ et $y'(t)$ sont de même signe :

Sens de variation



Parmi les courbes restantes, cette condition n'est pas satisfaite par les courbes y_3 (verte) et y_4 (violette).

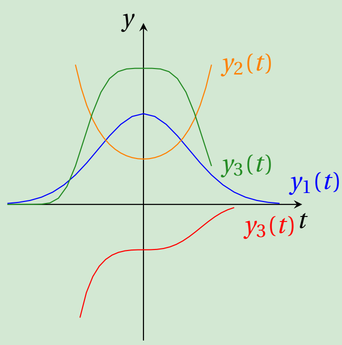
La courbe y_2 (orange) est la seule susceptible de représenter une solution à l'EDO.

Exercice 1.5.2

Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère les quatre équations différentielles

(a) $y'(t) = -t\,y(t)$
(b) $y'(t) = t\,y(t)$
(c) $y'(t) = -t^2y(t)$
(d) $y'(t) = -t^3y(t)$

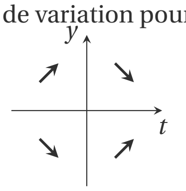
Les graphes de ces fonctions sont tracés sur le graphique à coté. Sans résoudre d'équations différentielles, déterminer pour chaque fonction laquelle des courbes suivantes la représente.



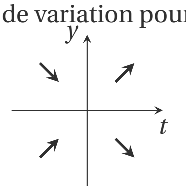
Correction

Pour chaque EDO on décompose le plan cartésien en quatre partie et on trace le sens de variation de sa solution :

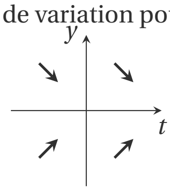
Sens de variation pour (a)



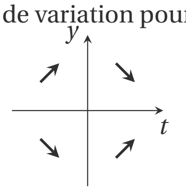
Sens de variation pour (b)



Sens de variation pour (c)



Sens de variation pour (d)



La courbe y_3 (rouge) est la seule où la fonction et sa dérivée sont de signes contraires ; elle ne peut correspondre qu'à la fonction (c). La courbe y_2 (orange) correspond à une fonction ayant même signe que sa dérivée pour $t > 0$; il s'agit donc du graphe de (b). Pour $t > 1$, on a $-t^3 < -t$, donc le graphe de l'équation (d) est en dessous du graphe de l'équation (a) pour tout $t > 1$; on en déduit que la courbe y_1 (bleue) représente la fonction (a) et que la courbe y_4 (verte) représente la fonction (d).

Chapitre 2.

Solution approchée d'une EDO

On ne peut expliciter les solutions analytiques que pour des équations différentielles ordinaires très particulières.
Dans certains cas, on ne peut exprimer la solution que sous forme implicite. C'est le cas par exemple de l'EDO $y'(t) = \frac{y(t)-t}{y(t)+t}$ dont les solutions vérifient la relation implicite

$$\frac{1}{2}\ln(t^2 + y^2(t)) + \arctan\left(\frac{y(t)}{t}\right) = C,$$

où C est une constante arbitraire.
Dans d'autres cas, on ne parvient même pas à représenter la solution sous forme implicite. C'est le cas par exemple de l'EDO $y'(t) = e^{-t^2}$ dont les solutions ne peuvent pas s'écrire comme composition de fonctions élémentaires.
Pour ces raisons, on cherche des méthodes numériques capables d'approcher la solution de toutes les équations différentielles qui admettent une unique solution sur un intervalle donné.

Dans ce chapitre

2.1. Solution approchée

Considérons le problème de Cauchy (1.4) :

trouver une fonction $y\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I telle que

$$\begin{cases} y'(t) = \varphi(t, y(t)), & \forall t \in I =]t_0, T[, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

avec y_0 une valeur donnée et supposons que l'on ait montré l'existence et l'unicité d'une solution y pour $t \in I$.
Toute approximation se base sur le principe suivant :

- on subdivise l'intervalle $I = [t_0; T]$, avec $T < +\infty$, en N intervalles $[t_n; t_{n+1}]$ de largeur $h = \frac{T-t_0}{N}$ avec $t_n = t_0 + nh$ pour $n = 0, \dots, N$. La longueur h est appelé le *pas de discrétisation*;
- pour chaque nœud t_n, on note $y_n = y(t_n)$ la valeur exacte et on cherche la valeur inconnue u_n qui approche la valeur exacte y_n ; l'ensemble des valeurs $\{ y_0, y_1, \dots, y_N \}$ représente la solution exacte discrète tandis que l'ensemble des valeurs $\{ u_0 = y_0, u_1, \dots, u_N \}$ représente la solution numérique. Cette solution approchée sera obtenue en construisant une suite définie par récurrence.

2.2. Solution approchée avec MATLAB/Octave

Matlab et Octave savent calculer cette approximation (ils choisissent automatiquement le schéma le plus adapté). La fonction de référence est `ode23`. La documentation officielle se trouve ici https://fr.mathworks.com/help/matlab/ref/ode23.html

On pourra aussi consulter cette page qui donne un aperçu des différentes fonctions qu'on peut utiliser pour approcher la solution d'une EDO : https://fr.mathworks.com/help/matlab/ordinary-differential-equations.html
Dans les cours d'analyse numérique vous découvrirez ce qui se cache derrière ces fonctions (il s'agit d'un domaine de recherche toujours très actifs). Ici nous nous contentons d'apprendre à utiliser la fonction ode23. Voici des exemples d'utilisation.

Cas scalaire On cherche à résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 1 - y(t), \quad t \in [0,3], \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

```
phi = @(t,y) 1-y ;
y_init = 2 ;
interval = [0 3] ;
[tt, uu] = ode23 (phi, interval, y_init );
exacte = @(t) 1+exp(-t) ;
yy = exacte(tt);
plot(tt, uu, '*', tt, yy, '-');
legend(['Approchee';'Exacte'])
```

- phi est la fonction mathématique $\varphi(t,y)$ dépendant des variables t et y (nota bene : c'est une fonction de deux variables, lorsqu'on écrit $\varphi(t,y(t))$ on obtient une fonction de la seule variable t en composant avec la fonction $t \mapsto y = y(t)$);
- l'instruction [t,y] = ode23(phi,[t0 tf],y0) intègre l'EDO de t0 à tf avec la condition initiale y0. Elle renvoie
  - les nœuds d'intégration $[t_1,\dots,t_N]$ dans le vecteur tt,
  - les valeurs approchées $[u_1,\dots,u_N]$ dans le vecteur uu.
- Pour apprécier la précision de l'approximation on définie la solution exacte (que nous savons calculer dans ce cas simple). Le vecteur yy contient les évaluations de la solution exacte sur les points de discrétisations issues de la fonction ode23.

Cas système Considérons deux espèces : une proie (des lièvres par exemple) et un prédateur (des lynx par exemple). Ces deux populations sont représentées par et des fonctions continues du temps . Si on suppose qu'il n'y a aucune autre intervention extérieur, une modélisation possible pour ce genre de système a été proposée indépendamment par Alfred James Lotka en 1925 et Vito Volterra en 1926 :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t)(a - by_2(t)) & [\stackrel{\text{déf}}{=} \varphi_1(t, y_1(t), y_2(t))] & \text{équation des proies} \\ y_2'(t) = -y_2(t)(c - dy_1(t)) & [\stackrel{\text{déf}}{=} \varphi_2(t, y_1(t), y_2(t))] & \text{équation des prédateurs} \end{cases}$$

On suppose qu'à ce jour il y a $y_1(0) = 2$ unités de proies (une unités = 1000 animaux) et $y_2(0) = 1$ unités de prédateurs et on se demande comment vont évoluer les populations de ces deux espèces. Pour les simulations on prendra $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$ et $d = 0.3$.

```
a = 2;
b = 1;
c = 1;
d = 0.3;
phi = @(t,yy) [ yy(1).*(a-b*yy(2)) , -yy(2).*(c-d*yy(1)) ] ;
yy_init = [2,1];
[tt, sol] = ode23 (phi, [0 20], yy_init );
subplot(1,3,1)
plot(tt, sol(:,1), '*-');
subplot(1,3,2)
plot(tt, sol(:,2), '*-');
subplot(1,3,3)
plot(sol(:,1), sol(:,2), '*-');
```

- phi est la fonction mathématique $\varphi(t,y)$ dépendant des variables t (scalaire) et y (un vecteur de deux composantes) et qui renvoie un vecteur de deux composantes;

- l'instruction [t,sol] = ode23(phi,[t0 tf],yy_init) intègre l'EDO de t0 à tf avec la condition initiale yy_init (un vecteur de deux composantes). Elle renvoie
  - les nœuds d'intégration $[t_1,\dots,t_N]$ dans le vecteur tt,
  - les valeurs approchées dans la matrice sol, la première colonne correspondant à la première fonction inconnue, la deuxième à la seconde fonction inconnue.

Cas ordre 2 Considérons l'EDO $y''(t) = -\sin(y(t))$ qui décrit le mouvement d'un pendule non amorti, équivalente au système différentiel

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t), \\ y_2'(t) = -\sin(y_1(t)). \end{cases}$$

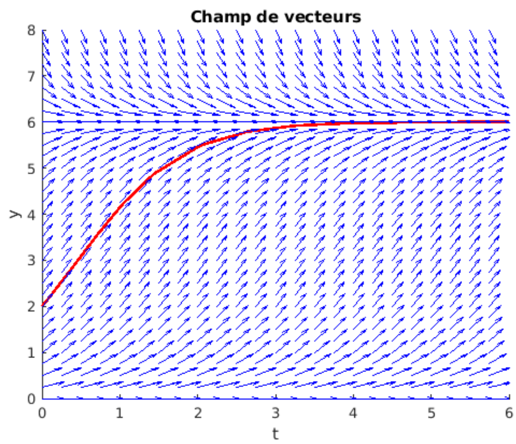
Considérons la CI $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

```
phi = @(t,yy) [yy(2); -sin(yy(1))] ;

yy_init = [0; 1];
t_span = [0,10];
[tt, sol] = ode23 (phi, t_span, yy_init);

subplot(1,3,1)
plot(tt, sol(:,1), '*-');
subplot(1,3,2)
plot(tt, sol(:,2), '*-');
subplot(1,3,3)
plot(sol(:,1), sol(:,2), '*-');
axis equal;
```

2.3. Champ de vecteurs et lignes de courant

Bien qu'il soit très rare que l'on puisse résoudre explicitement une équation différentielle donnée, comprendre l'allure des solutions peut être facilité en examinant le champ de vecteurs correspondant. Les graphes des solutions d'une équation différentielle $y'(t) = \varphi(t, y(t))$ sont, par définition, tangents à leur vecteur vitesse $(1, y'(t))$, donc au vecteur dérivé $(1, \varphi(t, y(t))$. Même sans connaître explicitement les solutions, connaître la fonction en chaque point permet de représenter ces vecteurs tangents. En traçant un grand nombre de ces vecteurs uniformément répartis dans le plan, on obtient le champ de vecteurs associé à l'équation différentielle. Cette représentation permet souvent de deviner les graphes des solutions, ces courbes étant tangentes en tous leurs points aux vecteurs du champ.
Il est instructif de superposer la solution numérique obtenue avec ode23 à cette représentation. La fonction quiver trace un champ de vecteurs. Utilisons ces outils pour visualiser les tracés associés à notre équation différentielle. La courbe rouge représente la solution déterminée par ode23.

```
hold on

% SOLUTION APPROCHEE
phi = @(t,y) 3/2*y.*(1-y/6) ;
y_init = 2 ;
interval = [0 6] ;
[tt, sol] = ode23 (phi, interval, y_init );
plot(tt, sol, 'r', 'LineWidth', 2);

% Champ de vecteurs
% GRILLE et evaluation de phi en chaque point
set(gca, 'XLim', [0 6], 'YLim', [0 8]);
[T, Y] = meshgrid( 0:0.25:6 , 0:0.25:8 );
RHS = phi(T,Y);
% NORMALISATION
dT = ones(size(RHS));
M = sqrt(dT.^2+RHS.^2) ;
q = quiver(T,Y,dT./M,RHS./M,'b');

xlabel('t');
ylabel('y');
title('Champ de vecteurs');
hold off
```



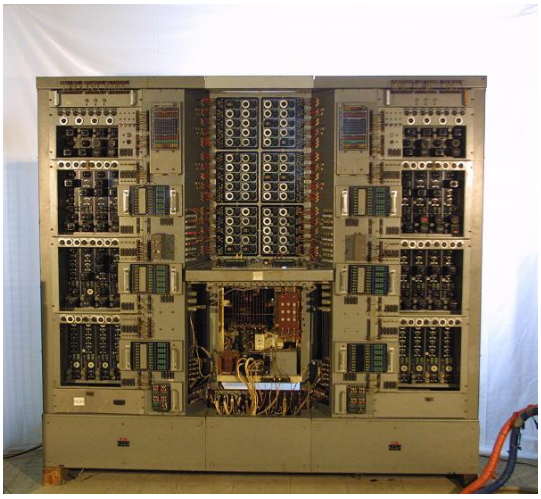
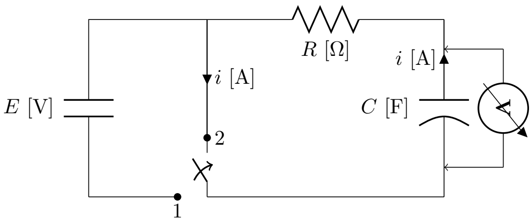


FIGURE 2.1. – Calculateur analogique SEA OME P2, construit en France par la Société d'Électronique et d'Automatisme (SEA). Le sigle OME signifie Opérateur Mathématique Électronique. Ce calculateur fut utilisé à l'École d'Ingénieurs Électriciens de Grenoble dans les années 1960.
© Musée virtuel de l'informatique, http://aconit.inria.fr/omeka/items/show/550

Calculateurs analogiques Un calculateur analogique est une machine permettant d'effectuer des calculs mathématiques en s'appuyant sur des phénomènes physiques — par exemple électriques, mécaniques ou hydrauliques — modélisés par le truchement de mesures continues (voir la figure 2.1).
Jusqu'aux années 70, des circuits électriques étaient employés pour résoudre toutes sortes d'équations différentielles. Le principe reposait sur le fait que la tension dans un circuit électrique satisfait à certaines relations mathématiques. Il est important de noter ces calculateurs ne produisaient pas d'expressions mathématiques des fonctions solutions ; ils présentaient uniquement les trajectoires des variables d'état pour des valeurs données des paramètres et des conditions initiales.



Lorsque le commutateur est en position 1, le condensateur se charge. En le déplaçant en position 2, le condensateur se décharge.

Par exemple, lorsqu'un condensateur chargé par une source de tension de E volts se décharge à travers une résistance en série, le phénomène peut être décrit par l'équation différentielle

$$CV'(t) + \frac{1}{R}V(t) = 0,$$

où t est le temps écoulé depuis le début de l'expérience, C la capacité du condensateur en farads, R la résistance en ohms et $V(t)$ est la tension aux bornes du condensateur à l'instant t.

La solution analytique de ce «circuit RC» est $V(t) = V_0 e^{-t/RC}$, où V_0 est la tension initiale. En appliquant une tension égale à V_0 dans un tel circuit, la variation du potentiel au fil du temps devrait correspondre à la solution de l'équation différentielle précédente, avec condition initiale V_0. Des circuits électriques plus sophistiqués et une plus grande variété d'opérateurs permettent la simulation d'équations différentielles bien plus complexes. La solution se trouve en mesurant la différence de potentiel du système. Ces machines étaient connues sous le nom de *calculateurs analogiques électroniques*, utilisant les connaissances en matière de réseaux électriques pour résoudre des problèmes purement mathématiques.
Les calculateurs analogiques étaient largement utilisés à une certaine époque, entre autres parce qu'ils étaient plus rapides que leurs homologues numériques basés sur une modélisation à l'aide de quantités numériques discrètes. Cependant, la construction d'un réseau électrique modélisant une équation différentielle pouvait être complexe et source d'erreurs. Avec les avancées informatiques récentes, ce type de méthode est désormais obsolète.

Source :
http://accromath.uqam.ca/2015/03/confidences-darchimede-ou-le-maitre-geometre-divulgue-un-joli-truc-du-metier-de-son-cru/
À propos du calcul analogique, on pourra consulter le site https://interstices.info/jcms/c_33558/les-calculateurs-analogiques#1b

2.4. Exercices

☆ Exercice 2.4.1

Équation de Matthieu amortie Simuler la solution de l'équation de Matthieu amortie pour $t \in [0, 10\pi]$

$$y''(t) + by'(t) + a(1 + \varepsilon\cos(t))y(t) = 0$$

avec $a = 1$, $b = 0.1$ et $\varepsilon = 1$. On prend comme conditions initiales $y(0) = 10^{-3}$ et $y'(0) = 0$.

Correction

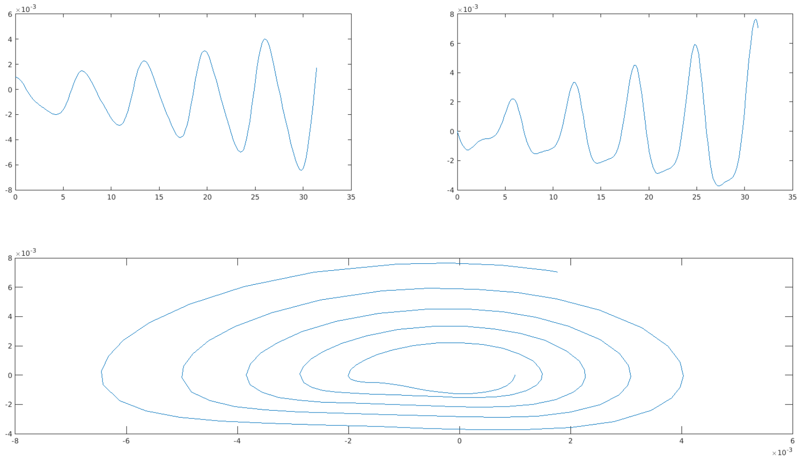
En posant $z_1(t) = y(t)$ et $z_2(t) = y'(t)$ on se ramène à la forme canonique :

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t) \\ z_2'(t) = -bz_2(t) - a(1 + \varepsilon\cos(t))z_1(t) \end{cases}$$

La séquence d'instructions qui appelle le solveur sera par exemple :

```
a = 1;
b = 0.1;
epsilon = 1;
phi = @(t,z) [z(2); -b*z(2)-a*(1+epsilon*cos(t))*z(1)];

t_span = [0 10*pi];
zz_init = [1e-3, 0];

[t,zz] = ode23( phi, t_span, zz_init);

y = zz(:,1);
dy = zz(:,2);

subplot(221)
plot(t,y) % t -> y(t)

subplot(222)
plot(t,dy) % t -> y'(t)

subplot(212)
plot(y,dy) % Plan de phase y(t) -> y'(t)
```

Ce programme trace la figure suivante qui représente les grandeurs $y(t)$ et $y'(t)$ de l'équation originale en fonction du temps, plus le plan de phase. Au passage, on retrouve bien l'instabilité des solutions de l'équation de Matthieu pour les valeurs des paramètres choisis.



Exercice 2.4.2 (Étude qualitative d'une EDO)

On considère le problème de Cauchy

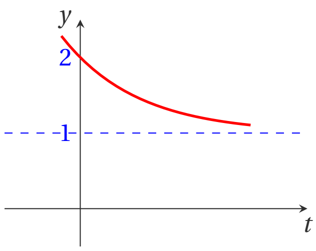
$$\begin{cases} y'(t) = 1 - y(t), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Supposons que le problème admet une et une seule solution $t \mapsto y(t)$ continue et définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la solution est minorée;
2. étudier la monotonie de la solution;
3. calculer la limite pour $t \to +\infty$ de la solution;
4. calculer y'' en fonction de y;
5. calculer les changements de concavité de la solution;
6. tracer le graphe de la solution.
7. Calculer et afficher la solution approchée.

Correction

1. $y(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ est la seule solution constante de l'EDO mais n'est pas solution du problème de Cauchy car $y(0) \neq 1$. On sait que la solution du problème de Cauchy est unique, continue, définie sur $\mathbb{R}$ et passe par le point $(0, 2)$, par conséquent
$$y(t) > 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$
2. Comme $y(t) > 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors $y'(t) = 1 - y(t) < 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ainsi y est monotone strictement décroissante.
3. La solution est décroissante et minorée donc les limites existent et $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \ell \geq 1$. Cela signifie que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale pour le graphe de la solution du problème de Cauchy.
Si $\ell > 1$ alors $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = \lim_{t\to+\infty} 1 - y(t) = \alpha > 0$, *i.e.* y a une asymptote oblique en $+\infty$, ce qui n'est pas possible. Par conséquent $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1$.
4. $y''(t) = (y'(t))' = (1 - y(t))' = -y'(t) = y(t) - 1$.
5. Comme $y(t) > 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors $y''(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$: la solution est convexe.
6. Graphe de la solution :



7.
```
phi = @(t,y) 1-y ;
[tt, yy] = ode23 (phi, [0 3], [2] );
sol = @(t) 1+exp(-t);
plot(tt, yy, '*', tt, sol(tt) , '-');
legend(['Approchee';'Exacte']);
```

Exercice 2.4.3 (Étude qualitative d'une EDO)

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 4 - y^2(t), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

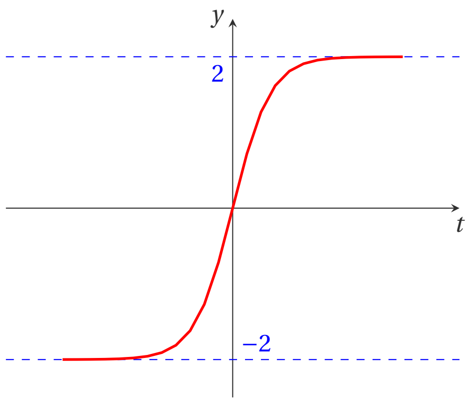
Supposons que le problème admet une et une seule solution $t \mapsto y(t)$ continue et définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la solution est bornée et calculer ces bornes;
2. étudier la monotonie de la solution;
3. calculer les limites pour $t \to \pm\infty$ de la solution;
4. calculer y'' en fonction de y;
5. calculer les changements de concavité de la solution;
6. tracer le graphe de la solution.

Correction

1. L'EDO se réécrit $y'(t) = (2 - y(t))(2 + y(t))$, donc $y_1(t) = 2$ et $y_2(t) = -2$ sont deux solutions constantes de l'EDO mais ne sont pas solution du problème de Cauchy car $y_{1,2}(0) \neq 0$. On sait que la solution du problème de Cauchy est unique, elle est continue, définie sur $\mathbb{R}$ et passe par le point $(0,0)$, par conséquent
$$y(t) \in]-2;2[\quad \forall t \in \mathbb{R}.$$
2. Comme $y(t) \in]-2;2[$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors $y'(t) = 4 - y^2(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ainsi y est monotone strictement croissante.
3. La solution est croissante et bornée donc les limites existent et $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \ell \le 2$. Si $\ell < 2$ alors $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = \lim_{t\to+\infty} 4 - y^2(t) = 4 - \ell^2 > 0$, *i.e.* y a une asymptote oblique en $+\infty$, ce qui n'est pas possible car y est bornée. Par conséquent $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 2$.

   Avec le même type de raisonnement on prouve que $\lim_{t\to-\infty} y(t) = -2$.
4. $y''(t) = (y'(t))' = (4 - y^2(t))' = -2y(t)y'(t) = -2y(t)(4 - y^2(t))$.
5. Comme $y(t) \in]-2;2[$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors $y''(t) = 0$ ssi $y(t) = 0$ et $y''(t) > 0$ ssi $y(t) < 0$, $y''(t) < 0$ ssi $y(t) > 0$. Comme $y(t) = 0$ ssi $t = 0$, la solution est convexe pour $t < 0$ et concave pour $t > 0$.
6. Graphe de la solution :




```
phi = @(t,y) 4-y^2 ;
[ttP, yyP] = ode23 (phi, [0 3], [0] );
[ttN, yyN] = ode23 (phi, [0 -3], [0] );
plot(ttP, yyP, '*-',ttN, yyN, '*-');
```

Chapitre 3.

Calcul analytique de la solution de quelques EDOs d'ordre 1

Dans ce chapitre nous allons montrer comment calculer la solution générale de trois types d'EDO d'ordre 1 : les EDO à variables séparables, les EDO linéaires et les EDO de Bernoulli.

Dans ce chapitre

3.1. EDO du premier ordre à variables séparables

Lorsque l'équation est de la forme

$$f(y(x))y'(x) = g(x)$$

où f et g sont des fonctions données dont on connaît des primitives F et G, on a

$$\underbrace{\int f(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x}_{=\int f(u)\,\mathrm{d}u=F(u)} = \underbrace{\int g(x)\,\mathrm{d}x}_{G(x)+C}$$

donc

$$F(y(x)) = G(x) + C \qquad \text{où } C \in \mathbb{R},$$

et, si F possède une fonction réciproque F^{-1}, on en déduit

$$y(x) = F^{-1}(G(x) + C),$$

relation qui donne toutes les solutions de l'équation. Cette solution générale dépend de la constante d'intégration C.

Astuce (Astuce mnémotechnique)
En pratique, étant donné que $y'(x) = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, on peut écrire l'équation $f(y(x))y'(x) = g(x)$ sous la forme

$$f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x,$$

puis intégrer formellement les deux membres

$$\int f(y)\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

pour obtenir $F(y) = G(x) + C$ et exprimer y en fonction de x.

EXEMPLE
On veut résoudre l'équation différentielle $y'(x) = xy(x)$ sur des intervalles à préciser. Il s'agit d'une EDO du premier ordre à variables séparables :

- *Recherche des solutions constantes.* Si $y(x) = A$ pour tout x alors $y'(x) = 0$ pour tout x et l'EDO devient $0 = xA$ pour tout x. Par conséquent $A = 0$: la fonction $y(x) = 0$ pour tout x est l'unique solution constante de l'EDO.
- *Recherche des solutions non constantes.* La fonction $y(x) = 0$ pour tout x étant solution, toute autre solution $x \mapsto y(x)$ sera donc non nulle. On peut alors diviser l'EDO par y et procéder formellement comme suit :

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = x \implies \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{y(x)} = x \implies \frac{\mathrm{d}y}{y} = x\,\mathrm{d}x \implies \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x \implies \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

  Ainsi, toute solution non nulle est de la forme

$$y(x) = De^{x^2/2} \qquad \text{avec } D \in \mathbb{R}^*.$$

3.2. EDO linéaires du premier ordre

Elles sont de la forme

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x)$$

où a, b et g sont des fonctions données, continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour la résolution, on se place sur un intervalle $J \subset I$ tel que la fonction a ne s'annule pas sur J.
Pour $x \in \mathscr{D}_b \cap \mathscr{D}_g \cap \{\, x \in \mathscr{D}_a \mid a(x) \neq 0 \,\}$, toute solution $y(x)$ de cette EDO peut être écrite soit comme somme de deux fonctions (y_H et y_P) soit comme produit de deux fonctions (u et v) :

$$y(x) = \underbrace{Ce^{-A(x)}}_{y_H(x)} + \underbrace{B(x)e^{-A(x)}}_{y_P(x)}$$

avec

- $A(x)$ une primitive de $\dfrac{b(x)}{a(x)}$,
- $B(x)$ une primitive de $\dfrac{g(x)}{a(x)}e^{A(x)}$.

PREUVE
Pour vérifier que c'est bien une solution il suffit de dériver :

$$\begin{aligned}
y'(x) &= CA'(x)e^{-A(x)} - B(x)A'(x)e^{-A(x)} + B'(x)e^{-A(x)} \\
&= -A'(x)\left(Ce^{-A(x)} + B(x)e^{-A(x)}\right) + B'(x)e^{-A(x)} \\
&= -A'(x)y(x) + B(x)e^{-A(x)} \\
&= -\frac{b(x)}{a(x)}y(x) + \frac{g(x)}{a(x)}e^{A(x)}e^{-A(x)} = -\frac{b(x)}{a(x)}y(x) + \frac{g(x)}{a(x)}
\end{aligned}$$

donc $a(x)y'(x) = -b(x)y(x) + g(x)$.

Remarque
On peut montrer que

- y_H est la solution générale de l'EDO homogène associée, c'est-à-dire de l'EDO $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ (qui est à variables séparables) ;
  En effet, la fonction $y(x) = 0$ pour tout x étant solution, toute autre solution $x \mapsto y(x)$ sera donc non nulle. On peut alors diviser l'EDO homogène associée par y et procéder formellement comme suit :

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{b(x)}{a(x)} \implies \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\int -\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x \implies \ln|y| = -\int \frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x.$$

  Ainsi, toute solution non nulle de l'équation homogène associée est de la forme

$$y_H(x) = Ce^{-A(x)} \qquad \text{où } A(x) = \int \frac{b(u)}{a(u)}\,\mathrm{d}u$$

avec C constante arbitraire.

- y_P est une solution particulière.
  Cette solution particulière peut être une solution «évidente», par exemple une solution constante. Dans la quête d'une solution évidente (non constante) le principe de superposition peut être utile : soient a et b deux réels et $g_1, g_2, \dots, g_n$ n des applications continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si y_k est une solution particulière de l'EDO $ay'(x) + by(x) = g_k(x)$ alors $\sum_{k=1}^n y_k$ est une solution particulière de l'EDO $ay'(x) + by(x) = \sum_{k=1}^n g_k(x)$.
  Si on ne trouve pas de solution particulière on peut en chercher une par la méthode de LAGRANGE ou de variation de la constante. Si $y_1(x)$ est une solution non nulle de l'EDO homogène, on introduit une fonction auxiliaire inconnue $B(x)$ telle que $y(x) = B(x)y_1(x)$ soit solution de notre EDO. On calcule alors $y'(x)$ et on reporte $y'(x)$ et $y(x)$ dans notre EDO. On observe que $K(x)$ disparaît, ce qui fournit une auto-vérification. Il ne reste que $B'(x)$, ce qui permet de calculer $B(x)$ et donc $y_P(x)$.

EXEMPLE

Considérons l'EDO
$$y'(x) - y(x) = x.$$
On a
$$a(x) = 1, \qquad b(x) = -1, \qquad g(x) = x.$$
Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

- $A(x) = \int -1 \, dx = -x$,
- $B(x) = \int xe^{-x} \, dx = -(1+x)e^{-x}$,

donc
$$y(x) = \left(C - (1+x)e^{-x}\right)e^x = Ce^x - (1+x).$$

EXEMPLE (LOI DE NEWTON ☕)

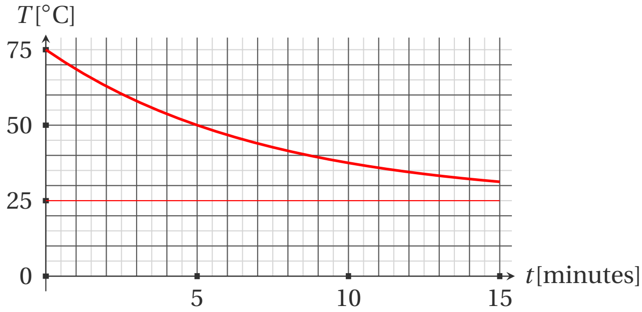
Considérons une tasse de café à la température de 75°C dans une salle à 25°C. Après 5 minutes le café est à 50°C. Si on suppose que la vitesse de refroidissement du café est proportionnelle à la différence des températures (*i.e.* que la température du café suit la loi de Newton), cela signifie qu'il existe une constante $\gamma < 0$ telle que la température vérifie l'EDO du premier ordre
$$T'(t) = \gamma(T(t) - 25)$$
avec la CI
$$T(5) = 50,$$
ayant convenu qu'une unité de temps correspond à une minute et la température est mesuré en degré Celsius.

1. On commence par calculer toutes les solutions de l'EDO. Étant une équation différentielle du premier ordre, la famille de solutions dépendra d'une constante qu'on fixera en utilisant la CI. Si on réécrit l'EDO sous la forme $T'(t) - \gamma T(t) = -25\gamma$, on a une EDO linéaire d'ordre 1 avec $a(t) = 1$, $b(t) = -\gamma$ et $g(t) = -25\gamma$. Donc
   - $A(t) = \int -\gamma \, dt = -\gamma t$,
   - $B(t) = \int -25\gamma e^{A(t)} \, dt = 25 \int -\gamma e^{-\gamma t} \, dt = 25e^{-\gamma t}$.

   Toutes les solutions de l'EDO sont les fonctions $T(t) = De^{\gamma t} + 25$ pour $D \in \mathbb{R}$.

   Notons que la seule solution constante est la fonction $T(t) = 25$ pour tout $t > 0$.
2. La valeur numérique de la constante d'intégration D est obtenue grâce à la CI :
$$75 = T(0) = 25 + De^{\gamma \cdot 0} \qquad \Longrightarrow \qquad D = 50 \qquad \Longrightarrow \qquad T(t) = 25 + 50e^{\gamma t}.$$
3. Il ne reste qu'à établir la valeur numérique de la constante de refroidissement γ grâce à l'«indice» :
$$50 = T(5) = 25 + 50e^{\gamma t} \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma = -\frac{\ln(2)}{5} \qquad \Longrightarrow \qquad T(t) = 25 + 50e^{-\frac{\ln(2)}{5}t}$$

On peut donc conclure que la température du café évolue selon la fonction
$$T(t) = 25 + 50e^{-\frac{\ln(2)}{5}t}.$$



3.3. EDO de Bernoulli

Elles sont du premier ordre et de la forme

$$u(x)y'(x)+v(x)y(x)=w(x)(y(x))^{\alpha},\qquad \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$$

où u, v et w sont des fonctions données, continues sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$. Pour la résolution, on se place sur un intervalle $J\subset I$ tel que la fonction u ne s'annule pas sur J et on définit une nouvelle fonction $x\mapsto z(x)=(y(x))^{1-\alpha}$. L'EDO initiale est alors équivalente à l'EDO linéaire du premier ordre suivante : [1]

$$\underbrace{u(x)}_{a(x)}z'(x)+\underbrace{(1-\alpha)v(x)}_{b(x)}z(x)=\underbrace{(1-\alpha)w(x)}_{g(x)}.$$

Par conséquent, pour $x\in\mathscr{D}_v\cap\mathscr{D}_w\cap\{x\in\mathscr{D}_u \mid u(x)\neq 0\}$, toute solution y s'écrit comme $y(x)=[z(x)]^{1/(1-\alpha)}$ avec

- $z(x)=\underbrace{Ce^{-A(x)}}_{y_H(x)}+\underbrace{B(x)e^{-A(x)}}_{y_P(x)}$,
- $A(x)$ une primitive de $(1-\alpha)\dfrac{v(x)}{u(x)}$,
- $B(x)$ une primitive de $(1-\alpha)\dfrac{w(x)}{u(x)}e^{A(x)}$.

EXEMPLE

On se propose de résoudre l'équation différentielle

$$y'(x)+\frac{1}{2}y(x)=\frac{1}{2}(x-1)y^3(x).$$

Il s'agit d'une équation différentielle de BERNOULLI. Comme $u(x)=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, on cherche sa solution générale sur $\mathbb{R}$.

- $A(x)=(1-\alpha)\displaystyle\int\frac{v(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=-2\int\frac{1/2}{1}\,\mathrm{d}x=-x$,
- $B(x)=(1-\alpha)\displaystyle\int\frac{w(x)}{u(x)}e^{A(x)}\,\mathrm{d}x=-2\int\frac{(x-1)/2}{1}e^{-x}\,\mathrm{d}x=\int(1-x)e^{-x}\,\mathrm{d}x=-(1-x)e^{-x}-\int e^{-x}\,\mathrm{d}x=xe^{-x}$,
- $z(x)=(C+B(x))\,e^{-A(x)}=(C+xe^{-x})e^{x}=Ce^{x}+x$,

et on conclut que la solution générale de l'EDO de BERNOULLI assignée est

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{x+Ce^{x}}}.$$

Notons que y n'est définie que si $x+Ce^{x}>0$.

1. Formellement $z=y^{1-\alpha}$ implique d'une part $y=zy^{\alpha}$ et d'autre part $z'=(1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ et donc $y'=(1-\alpha)z'y^{\alpha}$.

3.4. Exercices

3.4.1. EDO d'ordre 1 à variables séparables

Exercice 3.4.1
Résoudre le problème de CAUCHY

$$\begin{cases} y'(x)+2xy^2(x)=0,\\ y(0)=2. \end{cases}$$

Correction
Il s'agit d'une EDO à variables séparables. La fonction $y(x)=0$ pour tout x est solution de l'EDO mais elle ne vérifie pas la CI. Toute autre solution de l'EDO sera non nulle et se trouve formellement comme suit :

$$y'(x)+2xy^2(x)=0 \implies \frac{y'(x)}{y^2(x)}=-2x \implies \int y^{-2}\,\mathrm{d}y=-2\int x\,\mathrm{d}x \implies y(x)=\frac{1}{x^2+c},\ c\in\mathbb{R}.$$

En imposant la CI on obtient $2=1/C$ d'où l'unique solution du problème de Cauchy : $y(x)=\frac{2}{2x^2+1}$.

```
phi = @(t,y) -2*t*y^2 ;
[tt, yy] = ode23 (phi, [0 3], [2] );
sol = @(t) 2./(2*t.^2+1);
plot(tt, yy, '*', tt, sol(tt) , '-');
legend(['Approchee';'Exacte']);
```

Exercice 3.4.2
Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x)-4xy^2(x)=0,\\ y(0)=2. \end{cases}$$

Correction
Il s'agit d'une EDO à variables séparables. La fonction $y(x)=0$ pour tout x est solution de l'EDO mais elle ne vérifie pas la CI. Toute autre solution de l'EDO est non nulle et se trouve formellement comme suit :

$$y'(x)-4xy^2(x)=0 \implies \frac{y'(x)}{y^2(x)}=4x \implies \int y^{-2}\,\mathrm{d}y=4\int x\,\mathrm{d}x \implies y(x)=\frac{1}{-2x^2+c},\ c\in\mathbb{R}.$$

En imposant la CI on obtient $2=1/C$ d'où l'unique solution du problème de Cauchy $y(x)=\frac{2}{1-4x^2}$. Bien noter que la solution n'est définie que pour $t\in]-0.5;0.5[$.

```
phi = @(t,y) 4*t*y^2 ;
[tt, yy] = ode23 (phi, [0 0.45], [2] );
sol = @(t) 2./(1-4*t.^2);
plot(tt, yy, '*', tt, sol(tt) , '-');
legend(['Approchee';'Exacte']);
```

Exercice 3.4.3
Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t)=ty^2(t),\\ y(0)=y_0, \end{cases}$$

en fonction de la donnée initiale y_0.

Correction
Il s'agit d'un problème de Cauchy avec une CI $y(0)=y_0$ et une EDO du premier ordre à variables séparable.
On cherche d'abord les solutions constantes, *i.e.* les fonctions $y(x)\equiv A\in\mathbb{R}$ qui vérifient l'EDO, c'est-à-dire qui vérifient $0=tA^2$ pour tout $y\in\mathbb{R}$; l'unique solution constante est donc la fonction $y(x)\equiv 0$.

Comme deux trajectoires ne s'intersectent pas, toutes les autres solution ne s'annulent jamais. Soit donc $y(x) \neq 0$; on peut alors écrire

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} = t \implies \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = t\,\mathrm{d}t \implies \int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int t\,\mathrm{d}t \implies -\frac{1}{y} = \frac{t^2}{2} + C \implies y(x) = -\frac{1}{\frac{t^2}{2}+C}, \text{ pour } C \in \mathbb{R}.$$

Cette fonction n'est définie que si $t^2 \neq -2C$, donc

- si $C > 0$ alors $y(t)$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$,
- si $C < 0$ alors $y(t)$ est définie pour tout $t \in]-\infty; -\sqrt{-2C}[$ ou $t \in]-\sqrt{-2C}; \sqrt{-2C}[$ ou $t \in]\sqrt{-2C}; \infty[$,
- si $C = 0$ alors $y(t)$ est définie pour tout $t \in]-\infty; 0[$ ou $t \in]0; +\infty[$.

Comme $y_0 = y(0) = -\frac{1}{C}$, la solution du problème de Cauchy est :

- la fonction $y(t) \equiv 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ si $y_0 = 0$;
- la fonction $y(t) = -\frac{1}{\frac{t^2}{2} - \frac{1}{y_0}}$ pour $t \in \mathbb{R}$ si $y_0 < 0$;
- la fonction $y(t) = -\frac{1}{\frac{t^2}{2} - \frac{1}{y_0}}$ pour $t \in \left]-\sqrt{\frac{2}{y_0}}; \sqrt{\frac{2}{y_0}}\right[$ si $y_0 > 0$ (c'est-à-dire l'intervalle plus large possible qui contient $t = 0$).

Exercice 3.4.4

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le problème de CAUCHY

$$\begin{cases} y'(t) = y^{2m/(2m+1)}(t), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

admet une infinité de solutions de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Pourquoi ne peut-on appliquer le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ?

Correction

La solution $y(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ est une solution du problème donnée.
Pour trouver une autre solution commençons par chercher toutes les autres solutions de l'EDO et on imposera ensuite la CI. Il s'agit d'une EDO à variables séparables ainsi, si $y(t) \neq 0$, on peut écrire formellement

$$\int y^{-2m/(2m+1)}(t)\,\mathrm{d}y = \int 1\,\mathrm{d}t$$

d'où la fonction

$$y(t) = \left(\frac{t+c}{2m+1}\right)^{(2m+1)}$$

qui est solution de l'EDO $y'(t) = y^{2m/(2m+1)}(t)$ pour tout $c \in \mathbb{R}$. On vérifie alors aisément que, pour tout $b \in \mathbb{R}^+$, les fonctions

$$y_b(t) = \begin{cases} \left(\frac{t+b}{2m+1}\right)^{(2m+1)}, & \text{si } t \leq -b, \\ 0, & \text{si } -b \leq t \leq b, \\ \left(\frac{t-b}{2m+1}\right)^{(2m+1)}, & \text{si } t \geq b, \end{cases}$$

sont de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et sont solution du problème de CAUCHY donné.
En effet, on ne peut pas appliquer le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ car la fonction $\varphi(t,y) = y^{2m/(2m+1)}$ n'est pas uniformément lipschitzienne par rapport à y au voisinage de 0 car, pour tout $y \neq 0$ et pour tout $L > 0$ on a

$$|\varphi(t,y) - \varphi(t,0)| = |y^{2m/(2m+1)}| = |y|^{2m/(2m+1)} > L \times |y|.$$

Exercice 3.4.5 (Datation au carbone 14)

Le carbone 14 est un isotope présent dans tout organisme vivant. Le nombre d'atomes de carbone 14 est constant tant que l'organisme est en vie. À la mort de l'organisme, le nombre d'atomes décroît avec une vitesse proportionnelle au nombre d'atomes. On note $n(t) > 0$ le nombre d'atomes au temps t, exprimé en années, après la mort de l'organisme. Ce mécanisme se traduit par l'équation

$$n'(t) = -kn(t)$$

où k est une constante positive.

1. Trouver toutes les solutions de l'EDO.
2. Sachant qu'il faut 5700 ans pour que la quantité de carbone 14 diminue de moitié dans un organisme mort, calculer k.
3. Des ossements anciens récemment exhumés contiennent 9 fois moins de carbone 14 que des ossements similaires d'aujourd'hui. Déterminer l'âge des ossements exhumés.

Correction

1. Il s'agit d'une «EDO du premier ordre à variables séparables». Si $n(t) \equiv c$ est solution alors $0 = -kc$ d'où $c = 0$: l'unique solution constante est la solution $n(t) = 0$ quelque soit $t \in \mathbb{R}^+$.
   Si $n(t) \neq 0$, on peut écrire
   $$\frac{n'(t)}{n(t)} = -k$$
   d'où la famille de solutions
   $$n(t) = De^{-kt}, \qquad D \in \mathbb{R}^+.$$
   On conclut que, quelque soit la condition initiale $n(0) = n_0 \geq 0$, l'unique solution est $n(t) = n_0 e^{-kt}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.
2. Puisque $n_0/2 = n(5700) = n_0 e^{-5700t}k$, on obtient $k = \ln 2^{-5700} \approx 1.216\ 10^{-4}$.
3. Puisque $n_0/9 = n(\hat{t}) = n_0 e^{-k\hat{t}}$, on obtient $\hat{t} = 5700\frac{\ln 9}{\ln 2} \approx 18000$ ans.

Exercice 3.4.6

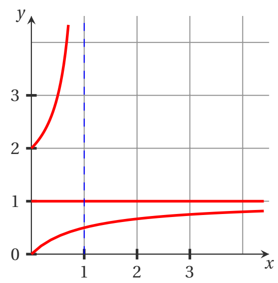
Deux produits chimiques présents dans une cuve avec une concentration de 1g/l à l'instant $t = 0$ interagissent et produisent une substance dont la concentration est notée $y(t)$ à l'instant $t \geq 0$. On suppose que $y(t)$ est régie par l'équation différentielle
$$y'(t) = (1 - y(t))^2 \qquad \text{pour tout } t \geq 0.$$

1. Montrer que toute solution de l'EDO est une fonction croissante.
2. Chercher les solutions constantes de l'EDO.
3. Considérons la solution y telle que $y(0) = 0$. Montrer que l'on a $0 < y(t) < 1$ pour tout $t > 0$. (On admettra que les graphes de deux solutions distinctes ne se coupent pas et on pourra s'aider d'un dessin.)
4. Considérons la solution y telle que $y(0) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \ell$ existe. Puis, en admettant que $\lim\limits_{t\to+\infty} y'(t) = 0$, déterminer ℓ.
5. Calculer la solution lorsque $y(0) = 0$, lorsque $y(0) = 1$ et lorsque $y(0) = 2$. Dans chacun de ces cas établir l'intervalle maximale d'existence.

Correction

1. Pour montrer qu'une fonction est croissante il suffit de montrer que sa dérivée est de signe positif. Si y est solution de l'EDO on a
   $$y'(t) = (1 - y(t))^2 \geq 0 \qquad \text{pour tout } t \geq 0$$
   car un carré est toujours positif. y est donc une fonction croissante.
2. On cherche les fonctions constantes solution de l'EDO. Si $f(t) = c$ est solution de l'EDO alors puisque $f'(t) = 0$ on obtient
   $$0 = (1 - c)^2$$
   soit $c = 1$. La seule fonction constante solution de l'EDO est la fonction constante égale à 1.
3. Considérons la solution y telle que $y(0) = 0$. Tout d'abord on a montré que la fonction y était croissante donc $y(0) \leq y(t)$ pour tout $t \geq 0$, par conséquent, puisque $0 \leq y(0)$, $y(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. Supposons qu'il existe un t_0 tel que $y(t_0) \geq 1$, alors le graphe de y qui relie continument les points $(0, y(0))$ et $(t_0, y(t_0))$ coupe nécessairement le graphe de f, *i.e.* la droite d'équation $y = 1$. Ceci est impossible, car les graphes de deux solutions distinctes ne se coupent jamais. Il n'existe donc pas de t_0 tel que $y(t_0) \geq 1$, c'est-à-dire pour tout $t \geq 0$, $y(t) < 1$.
4. Considérons la solution y telle que $y(0) = 0$.
   La fonction y est croissante et majorée par 1, elle admet donc une limite pour $t \to +\infty$. On note $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \ell$. On suppose que $\lim\limits_{t\to+\infty} y'(t) = \ell$. En passant à la limite dans l'EDO on obtient :
   $$0 = (1 - \ell)^2$$
   soit $\ell = 1$.

5.
- Si $y(0) = 1$ on sait que $y(t) = 1$ pour tout $t > 0$.
- Si $y(0) = 0$ on sait que la fonction y est croissante et $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = 1$. En effet, il s'agit d'une EDO à variables séparables et on peut écrire
$$\int (1-y)^{-2}\,\mathrm{d}y = t, \quad i.e. \quad y(t) = \frac{t+c-1}{t+c}$$
qui existe sur $]-\infty;-c[\cup]-c;+\infty[$, d'où, en imposant $y(0) = 0$, la solution
$$y(t) = \frac{t}{1+t}, \qquad \forall t \geq 0.$$
- Si $y(0) = 2$ on sait que la fonction y est croissante mais elle n'existe que pour $0 < t < 1$ et on a
$$y(t) = \frac{t-2}{t-1}.$$




```
phi = @(t,y) (1-y)^2 ;
hold on;

y0 = 1;
sol = @(t) t./t;
[tt, yy] = ode23 (phi, [0 4], [y0] );
plot(tt, yy, '*',tt,sol(tt),'-');

y0 = 0;
sol = @(t) t./(1+t);
[tt, yy] = ode23 (phi, [0 4], [y0] );
plot(tt, yy, '*',tt,sol(tt),'-');

y0 = 2;
sol = @(t) (t-2)./(t-1);
[tt, yy] = ode23 (phi, [0 0.75], [y0] );
plot(tt, yy, '*',tt,sol(tt),'-');

hold off;
```

Exercice 3.4.7 (Logistique)

Soit k et h deux constantes positives. Calculer $p(t)$ pour $t > 0$ solution du problème de Cauchy
$$\begin{cases} p'(t) = kp(t) - hp^2(t), \\ p(0) = p_0. \end{cases}$$
Ce modèle, qui décrit l'évolution d'une population de p individus à l'instant t, suppose que le taux de croissance du nombre d'individus n'est pas constant mais diminue si la population augment (les ressources se réduisent).

Correction

On doit résoudre l'EDO à variables séparables
$$p'(t) = p(t)(k - hp(t)).$$
On cherche d'abord les solutions constantes, *i.e.* des fonctions $p(t) = A$:
$$0 = A(k - hA) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = 0 \text{ ou } A = \frac{k}{h}.$$

On trouve ainsi deux solutions constantes :

$$p(t) \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad p(t) \equiv \frac{k}{h}.$$

Si on suppose que $p(t) \neq 0$ et $p(t) \neq \frac{k}{h}$, l'EDO se réécrit comme

$$\frac{p'(t)}{p(t)(k - hp(t))} = 1;$$

on doit alors calculer

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{p(k-hp)} = \int 1\,\mathrm{d}t$$

i.e.

$$\frac{1}{k}\int \frac{\mathrm{d}p}{p} + \int \frac{h}{k-hp}\,\mathrm{d}p = \int 1\,\mathrm{d}t.$$

On obtient

$$\frac{1}{k}\ln\frac{|p|}{|k-hp|} = (t+C)$$

et en on déduit

$$p(t) = \frac{kDe^{kt}}{1+hDe^{kt}}.$$

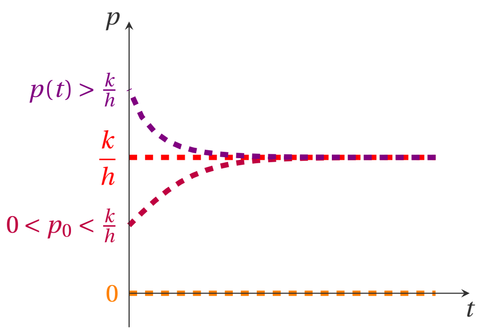
En imposant la condition initiale $p(0) = p_0$ on trouve la constante d'intégration D :

$$D = \frac{p_0}{k-hp_0} = \frac{1}{\frac{k}{p_0} - h}.$$

On conclut que toutes les solutions du problème de Cauchy pour $t \geq 0$ sont

$$p(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } p_0 = 0,\\ \frac{k}{h} & \text{si } p_0 = \frac{k}{h},\\ \frac{1}{\left(\frac{1}{p_0} - \frac{h}{k}\right)e^{-kt} + \frac{h}{k}} & \text{sinon.}\end{cases}$$

Remarquons que $\lim_{t\to+\infty} p(t) = \frac{k}{h}$: une population qui évolue à partir de p_0 individus à l'instant initiale selon la loi logistique tend à se stabiliser vers un nombre d'individus d'environ k/h, ce qui représente la capacité de l'environnement. D'autre part, déjà en analysant l'EDO on aurait pu déduire que les solutions sont des fonctions strictement croissantes si $p(t) \in]0, k/h[$, décroissantes si $p(t) > k/h$.



Exercice 3.4.8 («Urgence»)

On étudie la progression d'une maladie contagieuse dans une population donnée. On note $x(t)$ la proportion des personnes malades à l'instant t et $y(t)$ celle des personnes non atteintes. On a donc $x(t) + y(t) = 1$ pour tout $t \geq 0$. On suppose que la vitesse de propagation de la maladie $x(t)$ est proportionnelle au produit $x(t)y(t)$ (ce qui signifie que la maladie de propage par contact). Si on note $I(t)$ le nombre d'individus infectés à l'instant t et I_T le nombre d'individus total, il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $I'(t) = kI(t)(I_T - I(t))$. Si la ville est isolée et compte 5 000 individus dont 160 sont malades et 1 200 le sont 7 jours après, à partir de quel jour l'infection touchera 80% de la population ? Et 100% ?

Correction
On a le problème de CAUCHY

$$\begin{cases} I'(t) = kI(t)(5000 - I(t)), & \text{(EDO)} \\ I(0) = 160. & \text{(CI)} \end{cases}$$

Vu la nature de la question on ne s'intéresse qu'aux solutions positive et que pour $t > 0$.

1. Tout d'abord on observe qu'il y a deux solutions constantes de l'EDO : la fonction $I(t) \equiv 0$ et la fonction $I(t) \equiv 5000$.
2. Pour chercher toutes les solutions non constantes on remarque qu'il s'agit d'une EDO à variables séparables donc formellement on a

$$\begin{aligned}
&I'(t) = kI(t)(5000 - I(t)) && \implies && \frac{I'(t)}{I(t)(5000 - I(t))} = k && \implies \\
&\frac{\mathrm{d}I}{I(5000 - I)} = k\,\mathrm{d}t && \implies && \int \frac{1}{I(5000 - I)}\mathrm{d}I = k\int \mathrm{d}t && \implies \\
&\int \frac{1}{I}\mathrm{d}I - \int \frac{1}{5000 - I}\mathrm{d}I = 5000k\int \mathrm{d}t && \implies && \ln(I) + \ln(5000 - I) = 5000kt + c && \implies \\
&\ln\frac{I}{5000 - I} = 5000kt + c && \implies && \frac{I}{5000 - I} = De^{5000kt} && \implies \\
&I(t) = \frac{5000De^{5000kt}}{1 + De^{5000kt}} && \implies && I(t) = \frac{5000}{De^{-5000kt} + 1}
\end{aligned}$$

3. La valeur numérique de la constante d'intégration D est obtenue grâce à la CI :

$$160 = I(0) = \frac{5000}{De^0 + 1} \implies 160 = \frac{5000}{1 + D} \implies D = \frac{4}{121} \implies I(t) = \frac{20000}{4 + 121e^{-5000kt}}.$$

4. Il ne reste qu'à établir la valeur numérique de la constante k grâce à l'information sur le nombre d'individus infectés après 7 jours :

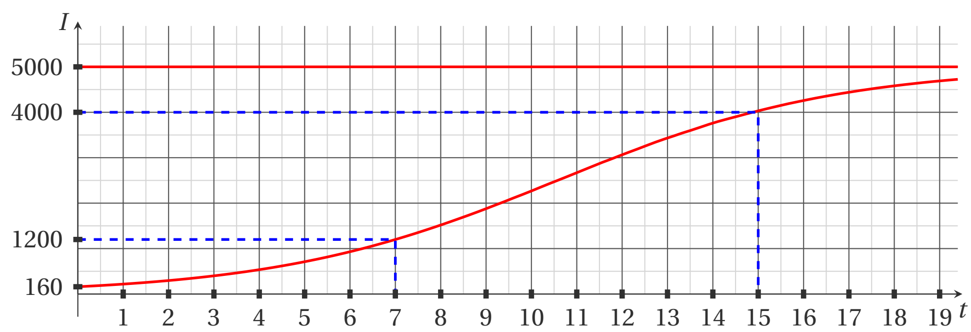
$$1200 = I(7) = \frac{20000}{4 + 121e^{-35000k}} \implies k = \frac{1}{35000}\ln\frac{363}{38} \implies I(t) = \frac{20000}{4 + 121e^{-\frac{t}{7}\ln\left(\frac{363}{38}\right)}}.$$

5. On cherche $\bar{t}$ tel que $I(\bar{t}) = 80\% I_T = \frac{80\times 5000}{100} = 4000$:

$$4000 = \frac{20000}{4 + 121e^{-\frac{\bar{t}}{7}\ln\left(\frac{363}{38}\right)}}$$

d'où $\bar{t} = \frac{1}{5000}\ln(121) \approx 15$ jours.

6. Avec ce modèle $\lim_{t\to+\infty} I(t) = 5000$ mais I ne peut jamais atteindre exactement 100% de la population en un temps fini (deux solution ne s'intersectent jamais).



Exercice 3.4.9

On note $y(t)$ le nombre de ménages vivant en France équipés d'un ordinateur (t est exprimé en années et $y(t)$ en millions de ménages). Le modèle de VARHULST estime que sur la période 1980 – 2020, $y(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$y'(t) = 0,022y(t)(20 - y(t)).$$

1. Calculer toutes les solutions de l'équation différentielle.

2. On pose $t = 0$ en 1980 et on sait que $y(0) = 0,01$. Combien de ménages vivant en France seront équipés d'un ordinateur en 2020 ?

Correction

1. On doit résoudre l'EDO à variables séparables
$$y'(t) = 0,022\,y(t)(20 - y(t)).$$
On cherche d'abord les solutions constantes, *i.e.* des fonctions $y(t) = A$ pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$0 = 0,022A(20 - A) \qquad \iff \qquad A = 0 \text{ ou } A = 20.$$
On trouve ainsi deux solutions constantes :
$$y(t) \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad y(t) \equiv 20.$$
Si on suppose que $y(t) \neq 0$ et $y(t) \neq A$, l'EDO se réécrit comme
$$\frac{y'(t)}{y(t)(20 - y(t))} = 0,022;$$
on doit alors calculer
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(20-y)} = \int 0,022\,\mathrm{d}t,$$
i.e.
$$\frac{1}{20}\left(\int \frac{\mathrm{d}y}{y} - \int \frac{1}{y-20}\,\mathrm{d}y\right) = \int 0,022\,\mathrm{d}t.$$
On obtient
$$\ln\frac{|y|}{|y-20|} = 0,44t + C \qquad \text{pour tout } C \in \mathbb{R}$$
et on en déduit
$$y(t) = \frac{20}{1+20De^{-0,44t}} \qquad \text{pour tout } D \in \mathbb{R}_+.$$
2. Si $t = 0$ correspond à l'année 1980 et si $y(0) = 0,01$ alors
$$0,01 = \frac{20}{1+20De^{-0,44\times 0}} \qquad \Longrightarrow \qquad D = 1999$$
et la fonction qui estime le nombre de ménages en France équipés d'un ordinateur t années après 1980 est
$$y(t) = \frac{20}{1+1999e^{-0,44t}}.$$
Pour prévoir combien de ménages vivant en France seront équipés d'un ordinateur en 2020 il suffit de calculer $y(40)$
$$y(40) = \frac{20}{1+1999e^{-0,44\times 40}} \approx 19.99.$$

```
phi = @(t,y) 0.022*y*(20-y) ;

y0 = 0.01;
sol = @(t) 20./(1+1999*exp(-0.44*t));
[tt, yy] = ode23 (phi, [0 40], [y0] );
plot(tt, yy, '*',tt,sol(tt),'-');

sol(40) % exacte en t=40
yy(end) % approchee en t=40
```

Exercice 3.4.10 (Modèle de Gompertz)

Lorsqu'une nouvelle espèce s'introduit dans un écosystème, elle évolue d'abord lentement ; son rythme de croissance s'accélère ensuite à mesure qu'elle s'adapte, puis ralentit quand la population devient trop importante compte tenu des ressources disponibles. Pour ce type d'évolution, on utilise le modèle de GOMPERTZ suivant :

$$y'(t) = -y(t)\ln(y(t)).$$

Calculer toute les solutions de cette équation différentielle pour $t > 0$ (ne pas oublier les solutions constantes). La population va-t-elle survivre ?

Correction

1. On doit résoudre l'EDO à variables séparables

$$y'(t) = -y(t)\ln(y(t)).$$

On cherche d'abord les solutions constantes, *i.e.* des fonctions $y(t) = A$ pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$0 = A\ln(A) \qquad \iff \qquad A = 1.$$

On trouve ainsi une solution constante :

$$y(t) \equiv 1.$$

Si on suppose que $y(t) \neq 1$, l'EDO se réécrit comme

$$\frac{y'(t)}{y(t)\ln(y(t))} = -1;$$

on doit alors calculer

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\ln(y)} = \int -1\,\mathrm{d}t.$$

On obtient [2]

$$\ln|\ln(y(t))| = -t + C \qquad \text{pour tout } C \in \mathbb{R}$$

et on en déduit

$$y(t) = e^{De^{-t}} \qquad \text{pour tout } D \in \mathbb{R}.$$

2. Si $y(0) > 1$ alors $y'(t) < 0$ (la population décroît) ; si $0 < y(0) < 1$ alors $y'(t) > 0$ (la population croît) ; comme $y(t) = 1$ est solution et comme deux solutions ne peuvent pas se croiser, sans faire de calcul on voit que lorsque t tend vers l'infini, la population tend vers la valeur d'équilibre $y(t) = 1$ quelque soit le nombre d'individus à l'instant initial.

3.4.2. EDO d'ordre 1 linéaire

Exercice 3.4.11
Résoudre l'équation différentielle

$$(x+1)y'(x) + y(x) = (x+1)\sin(x)$$

sur des intervalles à préciser.

Correction
L'équation différentielle est linéaire du premier ordre. On la résout sur un intervalle où le coefficient de $y'(x)$ n'est pas nul, soit sur $I_1 =]-\infty; -1[$ ou sur $I_2 =]-1; +\infty[$. Sur chaque intervalle I_1 ou I_2, l'équation s'écrit

$$\left[(x+1)y(x)\right]' = (x+1)\sin(x).$$

En intégrant par parties, on obtient (attention, la constante dépend de l'intervalle)

$$(x+1)y(x) = \int (x+1)\sin(x)\,\mathrm{d}x = -(x+1)\cos(x) + \sin(x) + C.$$

La solution générale sur I_1, ou sur I_2, est donc

$$y(x) = -\cos(x) + \frac{\sin(x) + C}{(x+1)} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

2. $\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \ln|z| + c = \ln|\ln(x)| + C$

Exercice 3.4.12
Résoudre le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'(x)+(3x^2+1)y(x)=x^2e^{-x}, \\ y(0)=1. \end{cases}$$

Correction
On a $a(x)=1$, $b(x)=3x^2+1$ et $g(x)=x^2e^{-x}$, donc pour $x\in\mathbb{R}$ on a

- $A(x)=\int\frac{3x^2+1}{1}\,\mathrm{d}x=x^3+x$,
- $B(x)=\int\frac{x^2e^{-x}}{1}e^{A(x)}\,\mathrm{d}x=\int x^2e^{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int 3x^2e^{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int e^{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}e^{u(x)}=\frac{e^{x^3}}{3}$.

Toutes les solutions de l'EDO sont donc les fonctions $y(x)=\left(C+\frac{e^{x^3}}{3}\right)e^{-x^3-x}$ pour $C\in\mathbb{R}$.

On cherche parmi ces solutions celle qui vérifie $y(0)=1$; comme $y(0)=C+\frac{1}{3}$, l'unique solution du problème de Cauchy donné est la fonction $y(x)=\left(\frac{2}{3}+\frac{e^{x^3}}{3}\right)e^{-x^3-x}$.

Exercice 3.4.13
Résoudre le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'(x)+(3x^2-1)y(x)=x^2e^{x}, \\ y(0)=-1. \end{cases}$$

Correction
On a $a(x)=1$, $b(x)=3x^2-1$ et $g(x)=x^2e^{x}$, donc pour $x\in\mathbb{R}$ on a

- $A(x)=\int\frac{3x^2-1}{1}\,\mathrm{d}x=x^3-x$,
- $B(x)=\int\frac{x^2e^{x}}{1}e^{A(x)}\,\mathrm{d}x=\int x^2e^{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{e^{x^3}}{3}$.

Toutes les solutions de l'EDO sont donc les fonctions $y(x)=\left(C+\frac{e^{x^3}}{3}\right)e^{-x^3+x}$ pour $C\in\mathbb{R}$.

On cherche parmi ces solutions celle qui vérifie $y(0)=-1$; comme $y(0)=C+\frac{1}{3}$, l'unique solution du problème de Cauchy donné est la fonction $y(x)=\left(-\frac{4}{3}+\frac{e^{x^3}}{3}\right)e^{-x^3+x}$.

Exercice 3.4.14
Résoudre le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'(x)+\frac{1}{x-1}y(x)=\frac{(x-2)^2}{x-1}, \\ y(0)=1. \end{cases}$$

Correction
On a $a(x)=1$, $b(x)=\frac{1}{x-1}$ et $g(x)=\frac{(x-2)^2}{x-1}$. b est défini pour $x\neq 1$ et comme on cherche un solution qui passe par le point $(0,1)$, nous allons chercher une solution que pour $x<1$. On a

- $A(x)=\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\ln(1-x)$,
- $B(x)=\int\frac{(x-2)^2}{x-1}e^{A(x)}\,\mathrm{d}x=-\int(x-2)^2\,\mathrm{d}x=\frac{(x-2)^3}{3}$.

Toutes les solutions de l'EDO pour $x<1$ s'écrivent $y(x)=\left(C+\frac{(x-2)^3}{3}\right)\frac{1}{x-1}$ pour $C\in\mathbb{R}$. On cherche parmi ces solutions celle qui vérifie $y(0)=1$; comme $y(0)=-C+\frac{8}{3}$, l'unique solution du problème de Cauchy donné est la fonction $y(x)=\left(\frac{5}{3}+\frac{(x-2)^3}{3}\right)\frac{1}{x-1}$.

Exercice 3.4.15
Résoudre le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'(x)+(4x^3+5)y(x)=x^3e^{-5x}, \\ y(0)=1. \end{cases}$$

Correction

On a $a(x) = 1$, $b(x) = 4x^3 + 5$ et $g(x) = x^3 e^{-5x}$. On a

- $A(x) = \int 4x^3 + 5 \,\mathrm{d}x = x^4 + 5x$,
- $B(x) = \int x^3 e^{-5x} e^{A(x)} \,\mathrm{d}x = -\int x^3 e^{x^4} \,\mathrm{d}x = \frac{e^{x^4}}{4}$.

Toutes les solutions de l'EDO sont donc les fonctions $y(x) = \left(C - \frac{e^{-x^4}}{4}\right) e^{-x^4-5x}$ pour $C \in \mathbb{R}$.

On cherche parmi ces solutions celle qui vérifie $y(0) = 1$; comme $y(0) = C + \frac{1}{4}$, l'unique solution du problème de CAUCHY donné est la fonction $y(x) = \left(\frac{3}{4} + \frac{e^{x^4}}{4}\right) e^{-x^4-5x}$.

Exercice 3.4.16

Déterminer la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - 2xy(x) = 2x, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Correction

L'EDO est linéaire mais aussi à variables séparables :

Linéaire : $a(x) = 1$, $b(x) = -2x$, $g(x) = 2x$,

- $A(x) = \int \frac{b(x)}{a(x)} \,\mathrm{d}x = \int -2x \,\mathrm{d}x = -x^2$,
- $B(x) = \int \frac{g(x)}{a(x)} e^{A(x)} \,\mathrm{d}x = \int 2xe^{-x^2} \,\mathrm{d}x = -e^{-x^2}$,

$y(x) = ce^{x^2} - e^{-x^2} e^{x^2} = ce^{x^2} - 1$;

VS : $y'(x) = 2x\big(1 + y(x)\big)$ donc soit $y(x) = -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ soit $y(x) \neq -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on peut calculer $\int \frac{1}{1+y} \,\mathrm{d}y = \int 2x \,\mathrm{d}x$ ce qui donne $y(x) = ce^{x^2} - 1$.

Prise en compte de la condition initiale : $0 = y(1) = ce - 1$ ainsi $c = 1/e$ et $y(x) = e^{x^2-1} - 1$.

Exercice 3.4.17

Établir s'il existe des solutions de $y'(x) = -2y(x) + e^{-2x}$ qui ont dérivée nulle en $x = 0$.

Correction

On a $a(x) = 1$, $b(x) = 2$ et $g(x) = e^{-2x}$. On a

- $A(x) = \int 2 \,\mathrm{d}x = 2x$,
- $B(x) = \int e^{-2x} e^{A(x)} \,\mathrm{d}x = \int 1 \,\mathrm{d}x = x$.

Toutes les solutions de l'EDO sont donc les fonctions $y(x) = (C + x)e^{-2x}$ pour $C \in \mathbb{R}$.
On cherche si parmi ces solutions il en existe qui vérifient $y'(0) = 0$; comme $y'(x) = (1 - 2C - 2x)e^{-2x}$ et $y'(0) = 1 - 2C$, l'unique solution de l'EDO qui a dérivée nulle en $x = 0$ est la fonction $y(x) = (\frac{1}{2} + x)e^{-2x}$.

Exercice 3.4.18

Établir s'il existe des solutions de $y'(x) = -2xy(x) + x$.

Correction

On a $a(x) = 1$, $b(x) = 2x$ et $g(x) = x$. La solution de cette EDO est du type $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ où $y_H(x)$ est la famille de solutions de l'EDO homogène $y'(x) = -2xy(x)$ et $y_P(x)$ est une solution particulière de l'EDO complète $y'(x) = -2xy(x) + x$.
On a $y_H(x) = Ce^{-A(x)}$ et, par exemple, on cherche y_P sous la forme $y_P(x) = K(x)e^{-A(x)}$ avec

- $A(x) = \int \frac{b(x)}{a(x)} \,\mathrm{d}x = \int 2x \,\mathrm{d}x = x^2$,
- $B(x) = \int \frac{g(x)}{a(x)} e^{A(x)} \,\mathrm{d}x = \int xe^{A(x)} \,\mathrm{d}x = \int xe^{x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{x^2}$,

donc toutes les solutions de l'EDO sont les fonctions $y(x) = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$ pour $C \in \mathbb{R}$.
Notons qu'il n'est même pas nécessaire de calculer $B(x)$; en effet, il suffit de trouver une solution particulière évidente, par exemple une solution constante. Si $y(x) = \alpha$ pour tout x est une solution de l'EDO complète, alors $0 = -2x\alpha + x$, *i.e.* $\alpha = 1/2$.
On pose alors $y_P(x) = 1/2$ et on a $y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$.
Toutes les solutions de l'EDO sont donc les fonctions $y(x) = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$ pour $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.4.19

Dans un circuit électrique de type résistance-inductance, le courant I évolue avec le temps selon

$$I'(t)+\frac{R}{L}I(t)=\frac{V}{L}$$

où R, L et V sont des constantes associées aux composantes électriques. Résolvez l'équation différentielle. La solution I tend-elle vers une limite finie ?

Correction

On a une EDO linéaire d'ordre 1 avec $a(t)=1$, $b(t)=\frac{R}{L}$ et $g(t)=\frac{V}{L}$. Donc

- $A(t)=\int \frac{R}{L}\,\mathrm{d}t=\frac{R}{L}t$,
- $B(t)=\int \frac{V}{L}e^{A(t)}\,\mathrm{d}t=\frac{V}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\,\mathrm{d}t=\frac{V}{L}\frac{L}{R}\int \frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\,\mathrm{d}t=\frac{V}{R}e^{\frac{R}{L}t}$,

donc toutes les solutions de l'EDO sont les fonctions $I(t)=\alpha e^{-A(t)}+B(t)e^{-A(t)}=\alpha e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{V}{R}$ pour $\alpha\in\mathbb{R}$ et $I(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}\frac{V}{R}$.

Exercice 3.4.20 («Les experts - Toulon»)

Le corps de la victime a été trouvé sur le lieu du crime à 2H20 de nuit. Après une demi-heure la température du corps est de 15°C. Quand a eu lieu l'homicide si à l'heure de la découverte la température du corps est de 20°C et si la température externe est de −5°C ?

Correction

La loi de Newton affirme qu'il existe une constante $\gamma<0$ telle que la température du corps suit l'EDO

$$T'(t)=\gamma(T(t)-T_{\text{ext}}).$$

On commence par calculer toutes les solutions de l'EDO. Étant une équation différentielle du premier ordre, la famille de solutions dépendra d'une constante D qu'on fixera en utilisant la CI.
Si on réécrit l'EDO sous la forme $T'(t)-\gamma T(t)=-\gamma T_{\text{ext}}$, on a une EDO linéaire d'ordre 1 avec $a(t)=1$, $b(t)=-\gamma$ et $g(t)=-\gamma T_{\text{ext}}$. Donc

- $A(t)=\int -\gamma\,\mathrm{d}t=-\gamma t$,
- $B(t)=\int -\gamma T_{\text{ext}}e^{A(t)}\,\mathrm{d}t=T_{\text{ext}}\int -\gamma e^{-\gamma t}\,\mathrm{d}t=T_{\text{ext}}e^{-\gamma t}$,

donc toutes les solutions de l'EDO sont les fonctions $T(t)=De^{\gamma t}+T_{\text{ext}}$ pour $D\in\mathbb{R}$.
La valeur numérique de la constante d'intégration D est obtenue grâce à la CI : $T_0=T(0)=T_{\text{ext}}+De^{\gamma\cdot 0}$ donc $D=T_0-T_{\text{ext}}$.
Ici $T_{\text{ext}}=-5$°C et $T_0=20$°C donc la température du cadavre suit la loi

$$T(t)=-5+25e^{\gamma t}.$$

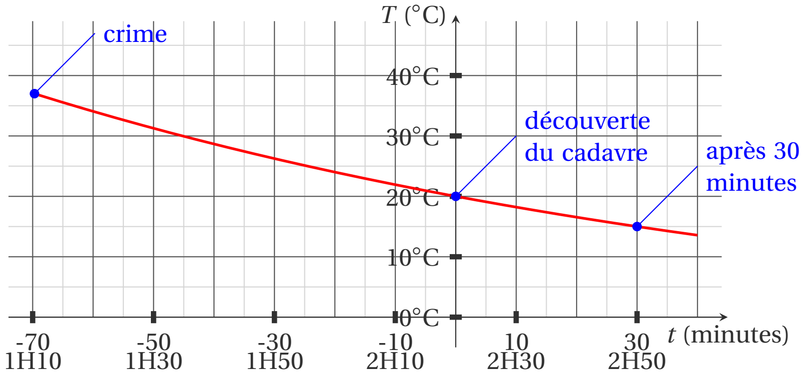
On sait que $15=T(30)=-5+25e^{30\gamma}$ d'où $\gamma=\frac{\ln(4/5)}{30}$. La température du corps suit donc la loi

$$T(t)=-5+25e^{\frac{\ln(4/5)}{30}t}.$$

Pour déterminer l'heure du meurtre il faut donc résoudre l'équation

$$37=-5+25e^{\frac{\ln(4/5)}{30}t}$$

d'où $t=30\frac{\ln(42/25)}{\ln(4/5)}\sim-69{,}7$ minutes, c'est-à-dire à 1H10 de la nuit.



Exercice 3.4.21 («Un gâteau presque parfait»)
Un gâteau est sorti du four à 17H00 quand il est brûlant (100°C). Après 10 minutes sa température est de 80°C et de 65°C à 17H20. Déterminer la température de la cuisine.

Correction
La loi de Newton affirme qu'il existe une constante $\gamma < 0$ telle que la température du gâteau suit l'EDO

$$T'(t) = \gamma(T(t) - T_{\text{ext}}).$$

On commence par calculer toutes les solutions de l'EDO. Étant une équation différentielle du premier ordre, la famille de solutions dépendra d'une constante D qu'on fixera en utilisant la CI.
Si on réécrit l'EDO sous la forme $T'(t) - \gamma T(t) = -\gamma T_{\text{ext}}$, on a une EDO linéaire d'ordre 1 avec $a(t) = 1$, $b(t) = -\gamma$ et $g(t) = -\gamma T_{\text{ext}}$. On pose

- $A(t) = \int -\gamma \, dt = -\gamma t$,
- $B(t) = \int -\gamma T_{\text{ext}} e^{A(t)} \, dt = T_{\text{ext}} \int -\gamma e^{-\gamma t} \, dt = T_{\text{ext}} e^{-\gamma t}$,

donc toutes les solutions de l'EDO sont les fonctions $T(t) = De^{\gamma t} + T_{\text{ext}}$ pour $D \in \mathbb{R}$.
La valeur numérique de la constante d'intégration D est obtenue grâce à la CI :

$$T_0 = T(0) = T_{\text{ext}} + De^{\gamma \cdot 0} \qquad \Longrightarrow \qquad D = T_0 - T_{\text{ext}} \qquad \Longrightarrow \qquad T(t) = T_{\text{ext}} + (T_0 - T_{\text{ext}})e^{\gamma t}.$$

Ici l'inconnue est T_{ext}. On sait que $T(t=0) = 100$°C et $T(t=10) = 80$°C et $T(t=20) = 65$°C. Il s'agit donc de résoudre le système de trois équations en les trois inconnues $\gamma, D, T_{\text{ext}}$:

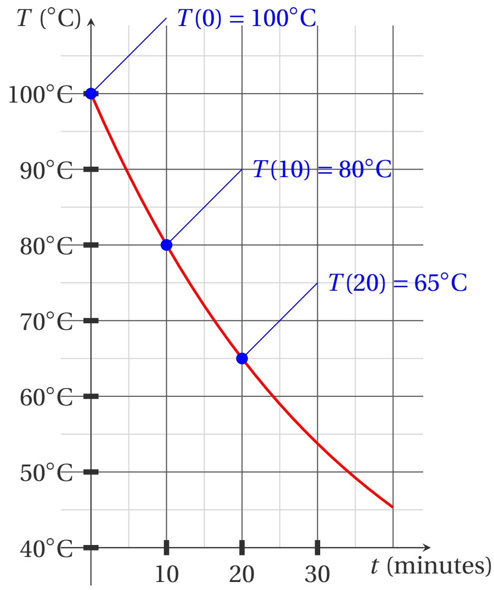
$$\begin{cases} 100 &= T_{\text{ext}} + D, \\ 80 &= T_{\text{ext}} + De^{10\gamma}, \\ 65 &= T_{\text{ext}} + De^{20\gamma}. \end{cases}$$

La première équation se réécrit $D = 100 - T_{\text{ext}}$, la seconde équation se réécrit $e^{10K} = \frac{80-T_{\text{ext}}}{D} = \frac{80-T_{\text{ext}}}{100-T_{\text{ext}}}$, la troisième $e^{20K} = \frac{65-T_{\text{ext}}}{D} = \frac{65-T_{\text{ext}}}{100-T_{\text{ext}}}$ donc

$$\frac{80 - T_{\text{ext}}}{100 - T_{\text{ext}}} = e^{10K} = \frac{e^{20K}}{e^{10K}} = \frac{65 - T_{\text{ext}}}{80 - T_{\text{ext}}}$$

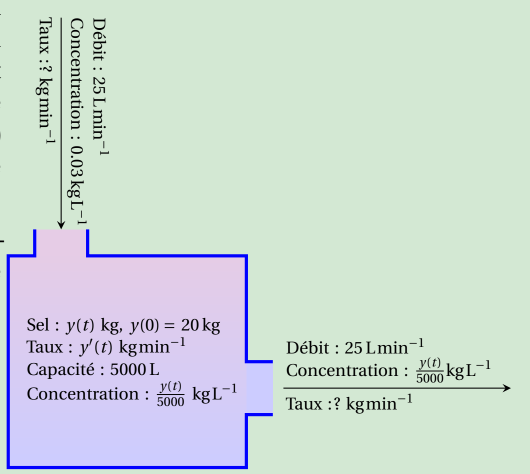
d'où $(80 - T_{\text{ext}})^2 = (65 - T_{\text{ext}})(100 - T_{\text{ext}})$, ainsi $T_{\text{ext}} = \frac{65\times100-80^2}{5} = 20$. La cuisine est donc à 20°C et, plus généralement, la température du gâteau évolue selon la loi

$$T(t) = 20 + 80e^{\frac{\ln(3/4)}{10}t}.$$



Exercice 3.4.22

On considère un réservoir de capacité 5000 L rempli d'une solution sel/eau parfaitement mélangée contenant 20 kg de sel. Un mélange qui contient 0.03 kg de sel par litre d'eau entre dans le réservoir à un débit de $25\,\mathrm{L\,min^{-1}}$. La solution est maintenue bien mélangés. Si $y(t)$ désigne la quantité (en kilos) de sel dissoute dans le réservoir à l'instant t, $y'(t)$ représente le taux de variation de la quantité de sel, *i.e.* la différence entre le taux auquel le sel entre et le taux auquel il en sort.



1. Après avoir calculé les taux auxquels le sel entre et sort du réservoir, montrer que cette situation est décrite par le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'(t) = 0.75 - \frac{y(t)}{200}, \\ y(0) = 20. \end{cases}$$
2. Calculer l'unique solutions de ce problème.
3. Combien de sel reste dans le réservoir après une demi-heure?

Correction

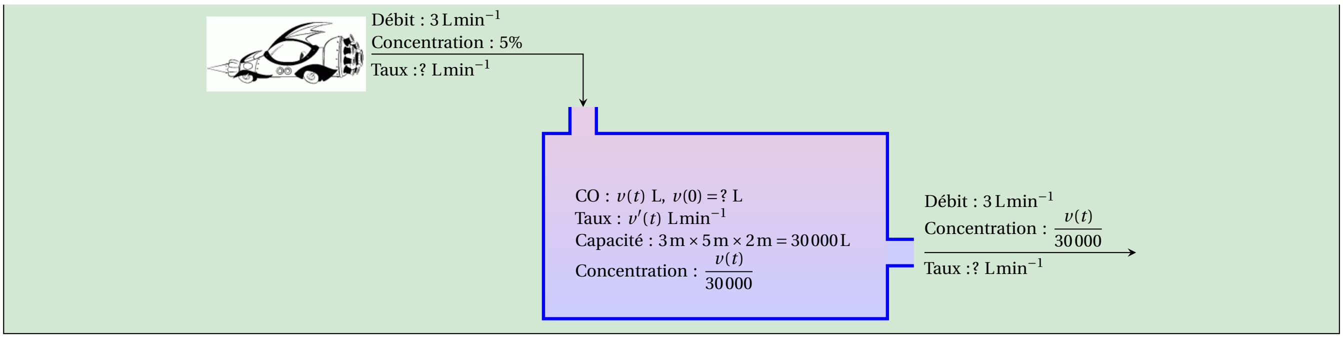
1. Le taux auquel le sel entre est $(0.03\,\mathrm{kg})(25\,\mathrm{L\,min^{-1}})$=$0.75\,\mathrm{kg\,min^{-1}}$. Comme le réservoir contient constamment 5000 L de liquide, la concentration est égale à $y(t)/5000$ (exprimée en $\mathrm{kg\,L^{-1}}$). Le débit du mélange qui sort est alors de $25\,\mathrm{L\,min^{-1}}$, donc le taux auquel le sel sort est $(\frac{y(t)}{5000}\mathrm{kg\,L^{-1}})(25\,\mathrm{L\,min^{-1}})$=$\frac{y(t)}{200}\mathrm{kg\,min^{-1}}$. L'équation différentielle qui décrit cette variation s'écrit alors
$$y'(t) = 0.75 - \frac{y(t)}{200}$$
2. On a une EDO linéaire d'ordre 1 avec $a(t) = 1$, $b(t) = 1/200$, $g(t) = 0.75$. On pose
   - $A(t) = \int \frac{b(t)}{a(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{200}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{200}t$,
   - $B(t) = \int \frac{g(t)}{a(t)} e^{A(t)}\,\mathrm{d}t = 0.75 \int e^{t/200}\,\mathrm{d}t = 150e^{t/200}$,

   donc toutes les solutions de l'EDO sont les fonctions $y(t) = Ee^{-t/200} + 150$ pour $E \in \mathbb{R}$.
   La valeur numérique de la constante d'intégration E est obtenue grâce à la CI : $20 = y(0) = E + 150$ donc $E = -130$ et l'unique solution du problème de Cauchy est
$$y(t) = 150 - 130e^{-t/200}.$$
3. Reste à calculer la quantité de sel après 30 minutes : $y(30) = 150 - 130e^{-3/20} \simeq 38.1$ kg.

Exercice 3.4.23

L'air d'un garage de $3\,\mathrm{m} \times 5\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$ est initialement chargée de 0.001% de monoxyde de carbone (CO). À l'instant $t = 0$, on fait tourner un moteur et des fumées toxiques contenant 5% de CO se dégagent de la pièce à raison de 3 litres par minute. Heureusement, l'air de la pièce est éliminée à la même vitesse de $3\,\mathrm{L\,min^{-1}}$. On note $v(t)$ le volume de CO présent dans la pièce au temps t.

1. En supposant que le mélange se fait instantanément, montrer que cette situation est décrite par le problème de Cauchy
$$\begin{cases} v'(t) = 0.15 - \frac{v(t)}{10000}, \\ v(0) = 0.3. \end{cases}$$
2. Déterminer le volume $v(t)$ de CO présent dans la pièce au temps t. Calculer vers quelle valeur limite $v(t)$ tend lorsque t tend vers l'infini.
3. Le seuil critique pour la santé est de 0.015% de CO. Après combien de temps ce taux est-il atteint?



Correction

1. Le taux de CO produit par minute est $0.05 \times 3\,\mathrm{L\,min}^{-1} = 0.15\,\mathrm{L\,min}^{-1}$. Le débit de l'air qui sort est de $3\,\mathrm{L\,min}^{-1}$, donc le taux auquel le CO sort est $\frac{v(t)}{30000} \times 3\,\mathrm{L\,min}^{-1} = \frac{v(t)}{10000}\mathrm{L\,min}^{-1}$. L'équation différentielle qui décrit cette variation s'écrit alors
$$v'(t) = 0.15 - \frac{v(t)}{10000}.$$
À l'instant $t = 0$ le volume de CO présent dans le garage est $0.001\% \times 30000\,\mathrm{L} = 0.3\,\mathrm{L}$.
2. On a une EDO linéaire d'ordre 1 avec $a(t) = 1$, $b(t) = 1/10000$, $g(t) = 0.15$. On pose
   - $A(t) = \int \frac{b(t)}{a(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{10000}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{10000}t$,
   - $B(t) = \int \frac{g(t)}{a(t)} e^{A(t)}\,\mathrm{d}t = 0.15 \int e^{t/10000}\,\mathrm{d}t = 1500 e^{t/10000}$,

   donc toutes les solutions de l'EDO sont les fonctions $v(t) = Ee^{-t/10000} + 1500$ pour $E \in \mathbb{R}$.
   La valeur numérique de la constante d'intégration E est obtenue grâce à la CI : $0.3 = v(0) = E + 1500$ donc $E = -(1500 - 0.3)$. L'unique solution du problème de Cauchy est donc
$$v(t) = 1500 - (1500 - 0.3)e^{-t/10000} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1500.$$
3. Reste à calculer après combien de minutes le taux de CO atteint 0.015% : $0.00015 = 1500 - (1500 - 0.3)e^{-t/10000}$ ssi $t = 10000 \ln\left(\frac{1500-0.3}{1500-4.5}\right) \simeq 28.04\,\mathrm{min}$.

Exercice 3.4.24 (Un escargot sur un élastique)

Un escargot avance d'un mètre par jour sur un élastique d'un kilomètre de long. Mais l'élastique s'étire d'un kilomètre par jour. L'escargot arrivera-t-elle au bout de l'élastique ?
Source : `http://allken-bernard.org/pierre/weblog/?p=209`

Correction

On note $L(t)$ la longueur de l'élastique à l'instant t et $\ell(t)$ la distance parcourue par l'escargot à l'instant t. Pour les unités de mesure, on convient qu'une unité de temps correspond à un jour et les longueurs sont mesurées en mètres. On a $L(0) = 1000$, $\ell(0) = 0$ et il s'agit de voir si $\ell(t) = L(t)$ pour un certain t.
Pour tout $t \ge 0$,
$$L(t) = 1000t + 1000$$
et on peut définir $y(t)$ la fraction de l'élastique parcourue par l'escargot à l'instant t :
$$y(t) = \frac{\ell(t)}{L(t)} \quad \forall t \ge 0.$$
La vitesse ℓ' de l'escargot par rapport à l'extrémité fixe de l'élastique est la somme de deux vitesses : la vitesse de l'escargot sur l'élastique, soit 1 mètre par jour, et la vitesse du point de l'élastique où se trouve l'escargot (on peut faire l'hypothèse que cette vitesse est proportionnelle à l'abscisse de l'escargot) :
$$\ell'(t) = 1 + y(t)L'(t) \quad \forall t \ge 0,$$
donc
$$y'(t) = \frac{\ell'(t)}{L(t)} - y(t)\frac{L'(t)}{L(t)} = \frac{1 + y(t)L'(t)}{L(t)} - y(t)\frac{L'(t)}{L(t)} = \frac{1}{L(t)} \quad \forall t \ge 0.$$

Puisque $y(0)=0$, on en conclut que

$$y(t)=\int_0^t \frac{1}{L(\tau)}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{1000}\int_0^t \frac{1}{1+\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{1000}\left[\ln(1+\tau)\right]_0^t=\frac{1}{1000}\ln(1+t)$$

et donc

$$\ell(t)=y(t)L(t)=\frac{1000t+1000}{1000}\ln(1+t)=(1+t)\ln(1+t)\qquad\forall t\ge 0.$$

L'escargot touchera l'extrémité mobile de l'élastique lorsque $\ell(t)=L(t)$, c'est-à-dire à l'instant $t_f=e^{1000}-1\simeq 1.97\times 10^{434}$ jours $\simeq 5.397\times 10^{431}$ années (ce qui correspond à $\simeq 3.9\times 10^{421}$ fois l'age de l'univers).
En étudiant la fonction $t\mapsto d(t)=L(t)-\ell(t)$, on trouve que cette distance est maximale[3] à l'instant $t_0=e^{999}-1$; après cet instant l'escargot commence à se rapprocher de l'extrémité de l'élastique pour en arriver au but à l'instant $t_f=e^{1000}-1$. À l'instant t_0 l'escargot se déplace à une vitesse de 1000 kilomètre par jour et a parcouru $y(t_0)=99.9\%$ de l'élastique, elle a parcouru 99.9% de l'élastique mais elle n'a jamais été aussi loin de son but!

Exercice 3.4.25

Trouver la solution des problèmes de CAUCHY suivants :

(1) $\begin{cases} y'(t)+\frac{y(t)}{\tan(t)}=0, & t\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\\ y(1)=\frac{\pi}{4}\end{cases}$ (2) $\begin{cases} y'(t)+\frac{y(t)}{\tan(t)}=2\cos(t), & t\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\\ y(1)=\frac{\pi}{4}\end{cases}$

Correction

(1) 1.1. *Calcul de la solution générale de l'EDO.*
Considérons sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle $y'(t)+\frac{y(t)}{\tan(t)}=0$. Il s'agit d'une EDO linéaire homogène avec $a(t)=1$ et $b(t)=\frac{1}{\tan(t)}$. L'application

$$\begin{aligned} b\colon \left]0;\frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \frac{1}{\tan(t)}\end{aligned}$$

est continue et strictement positive sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. On calcule donc $A(t)=\int\frac{b(t)}{a(t)}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t=\int\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t=\ln(\sin(t))$.
La solution générale de l'EDO est donc l'application

$$\begin{aligned} y\colon \left]0;\frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto y_H(t)=\kappa e^{-\ln(\sin(t))}=\frac{\kappa}{\sin(t)}\qquad\text{avec } \kappa\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

1.2. *Calcul de la solution du problème de* CAUCHY.
Il y a une unique solution qui prend la valeur $\pi/4$ en 1. Il s'agit de l'application

$$\begin{aligned} y\colon \left]0;\frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \frac{\pi\sin(1)}{4\sin(t)}.\end{aligned}$$

(2) 2.1. *Calcul de la solution générale de l'EDO.*
Nous avons déjà calculé la solution générale de l'équation homogène associée. Par ailleurs, on vérifie aisément que

$$\begin{aligned} y_P\colon \left]0;\frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \sin(t)\end{aligned}$$

est une solution particulière de l'EDO complète puisque

$$y_P'(t)+\frac{y_P(t)}{\tan(t)}=\cos(t)+\frac{\sin(t)}{\tan(t)}=2\cos(t),\qquad\forall t\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[.$$

3. $d'(t)=999-\ln(1+t)$

Si on n'a pas trouvé directement une solution particulière, on peut utiliser la méthode classique : on a $g(t) = 2\cos(t)$ et on calcule $B(t) = \int \frac{g(t)}{a(t)} e^{A(t)}\,\mathrm{d}t = 2\int \cos(t) e^{\ln(\sin(t))}\,\mathrm{d}t = 2\int \cos(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \sin^2(t)$ donc une solution particulière de l'EDO est

$$
\begin{aligned}
y_P\colon \left]0;\frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R}\\
t &\mapsto B(t)e^{-A(t)} = \sin(t)
\end{aligned}
$$

On en déduit que la solution générale de l'EDO complète est l'application

$$
\begin{aligned}
y\colon \left]0;\frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R}\\
t &\mapsto y_H(t) + y_P(t) = \frac{\kappa}{\sin(t)} + \sin(t) \qquad \text{avec } \kappa \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

2.2. *Calcul de la solution du problème de* CAUCHY.
Il y a une unique solution qui prend la valeur $\pi/4$ en 1. Il s'agit de l'application

$$
\begin{aligned}
y\colon \left]0;\frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R}\\
t &\mapsto \left(\frac{\pi}{4} - \sin(1)\right)\frac{\sin(1)}{\sin(t)} + \sin(t).
\end{aligned}
$$

Exercice 3.4.26
Déterminer la solution générale de l'EDO $3y'(t) + 12y(t) = 4$ après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie.

Correction
L'équation $3y'(t) + 12y(t) = 4$ admet pour solution générale l'application

$$
\begin{aligned}
y\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\
t &\mapsto \frac{1}{3} + \kappa e^{-4t} \qquad \text{avec } \kappa \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

En effet, il s'agit d'une EDO linéaire d'ordre 1 avec $a(t) = 3$, $b(t) = 12$, $g(t) = 4$. On pose

- $A(t) = \int \frac{b(t)}{a(t)}\,\mathrm{d}t = \int 4\,\mathrm{d}t = 4t$,
- $B(t) = \int \frac{g(t)}{a(t)} e^{A(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{4}{3} e^{4t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}e^{4t}$,

donc toutes les solutions de l'EDO sont les fonctions $y(t) = \kappa e^{-A(t)} + B(t)e^{-A(t)} = \kappa e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{4t}e^{-4t}$ pour $\kappa \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.4.27
Déterminer la solution générale de l'EDO $y'(t) + y(t) = e^{3t}$ après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie.

Correction
L'équation $y'(t) + y(t) = e^{3t}$ admet pour solution générale l'application

$$
\begin{aligned}
y\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\
t &\mapsto \frac{1}{4}e^{3t} + \kappa e^{-t} \qquad \text{avec } \kappa \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

En effet, il s'agit d'une EDO linéaire d'ordre 1 avec $a(t) = 1$, $b(t) = 1$, $g(t) = e^{3t}$. On pose

- $A(t) = \int \frac{b(t)}{a(t)}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t$,
- $B(t) = \int \frac{g(t)}{a(t)} e^{A(t)}\,\mathrm{d}t = \int e^{3t}e^{t}\,\mathrm{d}t = \int e^{4t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}e^{4t}$,

donc toutes les solutions de l'EDO sont les fonctions $y(t) = \kappa e^{-A(t)} + B(t)e^{-A(t)} = \kappa e^{-t} + \frac{1}{4}e^{4t}e^{-t}$ pour $\kappa \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.4.28
Déterminer la solution générale de l'EDO $y'(t)+\tan(t)y(t)=\frac{1}{\cos(t)}$ après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie.

Correction
L'équation $y'(t)+\tan(t)y(t)=\frac{1}{\cos(t)}$ admet pour solution générale l'application

$$\begin{aligned} y\colon \left]-\frac{\pi}{2}+\kappa\pi;-\frac{\pi}{2}+\kappa\pi\right[&\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \sin(t)+C_\kappa\cos(t) \qquad \text{avec } C_\kappa\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

C_κ désignant une constante réelle différente sur chacun des intervalles. En effet :

1. L'EDO est déjà écrite sous forme normalisée, *i.e.* $a(t)=1$. Considérons les applications suivantes :
$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R} & g\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto\tan(t) & t&\mapsto \tfrac{1}{\cos(t)} \end{aligned}$$
Elles ne sont définies que pour $t\neq\frac{\pi}{2}+\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ et sont continues sur chacun des intervalles $\left]-\frac{\pi}{2}+\kappa\pi;\frac{\pi}{2}+\kappa\pi\right[$.
2. *Calcul de la solution générale sur* $\left]-\frac{\pi}{2}+\kappa\pi;\frac{\pi}{2}+\kappa\pi\right[$.
On pose
   - $A(t)=\int\frac{b(t)}{a(t)}\,\mathrm{d}t=\int\tan(t)\,\mathrm{d}t=\int\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t=-\ln|\cos(t)|$,
   - $B(t)=\int\frac{g(t)}{a(t)}e^{A(t)}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t=\tan(t)$,

   donc toutes les solutions de l'EDO sont les fonctions
$$\begin{aligned} y\colon \left]-\frac{\pi}{2}+\kappa\pi;\frac{\pi}{2}+\kappa\pi\right[&\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto C_\kappa e^{-A(t)}+B(t)e^{-A(t)}=C_\kappa\cos(t)+\sin(t) \qquad \text{avec } C_\kappa\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 3.4.29
Déterminer la solution générale de l'EDO $y'(t)+\dfrac{t+2}{t}y(t)=\dfrac{e^t}{t^2}$ après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie.

Correction
L'équation $y'(t)+\frac{t+2}{t}y(t)=\frac{e^t}{t^2}$ admet pour solution générale l'application

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R}^*&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto\begin{cases} \dfrac{e^t}{2t^2}+\kappa_1\dfrac{e^{-t}}{t^2} & \text{si } t<0 \qquad \text{avec } \kappa_1\in\mathbb{R},\\ \dfrac{e^t}{2t^2}+\kappa_2\dfrac{e^{-t}}{t^2} & \text{si } t>0 \qquad \text{avec } \kappa_2\in\mathbb{R}. \end{cases} \end{aligned}$$

$\kappa_{1,2}$ désignant une constante réelle différente sur chacun des deux intervalles. En effet :

1. L'EDO est déjà écrite sous forme normalisée. Considérons les applications suivantes :
$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R} & g\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto\frac{t+2}{t} & t&\mapsto \frac{e^t}{t^2} \end{aligned}$$
Elles ne sont définies que pour $t\neq0$ et sont continues sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.
2. *Calcul de la solution générale de l'équation homogène* $y'(t)+\frac{t+2}{t}y(t)=0$.
Formellement on peut écrire
$$\frac{y'(t)}{y(t)}=-1-\frac{2}{t} \quad\Longrightarrow\quad \int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=\int-1-\frac{2}{t}\,\mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\quad \ln|y|=-t-2\ln|t|+C \text{ avec } C\in\mathbb{R}.$$

Ainsi, la solution générale de l'équation homogène est l'application

$$\begin{aligned} y_H\colon \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} \kappa_1 \dfrac{e^{-t}}{t^2} & \text{si } t<0 \qquad \text{avec } \kappa_1\in\mathbb{R}, \\ \kappa_2 \dfrac{e^{-t}}{t^2} & \text{si } t>0 \qquad \text{avec } \kappa_2\in\mathbb{R}. \end{cases} \end{aligned}$$

3. Calcul d'une solution particulière de l'EDO $y'(t)+\frac{t+2}{t}y(t)=\frac{e^t}{t^2}$.
   On vérifie aisément que la fonction
   $$\begin{aligned} y_P\colon \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{e^{-t}}{2t^2} \end{aligned}$$
   est une solution particulière de l'EDO. Si cette solution ne vous parait pas évidente, il est bien entendu possible de déterminer une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante.

Exercice 3.4.30
Déterminer la solution générale de l'EDO $y'(t)+y(t)=\dfrac{1-e^{-2t}}{e^t+e^{-t}}$ après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie.

Correction
L'équation $y'(t)+y(t)=\frac{1-e^{-2t}}{e^t+e^{-t}}$ admet pour solution générale l'application

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto e^{-t}\ln(e^t+e^{-t})+\kappa e^{-t} \qquad \text{avec } \kappa\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

En effet :

1. *Calcul de la solution générale de l'équation homogène* $y'(t)+y(t)=0$.
   Toute solution non nulle est de la forme
   $$\begin{aligned} y_H\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \kappa e^{-t} \qquad \text{avec } \kappa\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$
2. Calcul d'une solution particulière de l'EDO $y'(t)+y(t)=\frac{1-e^{-2t}}{e^t+e^{-t}}$.
   L'application
   $$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1-e^{-2t}}{e^t+e^{-t}} = e^{-t}\tanh(t) \end{aligned}$$
   est continue sur $\mathbb{R}$. En utilisant la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière sous la forme $y_P(t)=K(t)\; y_H(t)\big|_{\kappa=1}$ où $K\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une application inconnue dérivable sur $\mathbb{R}$. On a, pour tout $t\in\mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned} y_P(t) &= K(t)e^{-t} \\ y_P'(t) &= K'(t)e^{-t}-K(t)e^{-t} \end{aligned}$$
   Puisque y_P est supposée être une solution particulière de l'EDO, on doit avoir pour tout $t\in\mathbb{R}$,
   $$y_P'(t)+y_P(t)=\frac{1-e^{-2t}}{e^t+e^{-t}}$$
   autrement dit la fonction K doit vérifier
   $$K'(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=\tanh(t)=\frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}$$
   ce qui impose $K(t)=\ln(\cosh(t))+C=\ln(e^t+e^{-t})-\ln(2)+C$, $C\in\mathbb{R}$. Puisqu'on est intéressé par une seule solution particulière, on peut choisir $C=\ln(2)$. On a alors
   $$\begin{aligned} y_P\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto e^{-t}\ln(e^t+e^{-t}) \end{aligned}$$

Exercice 3.4.31

Déterminer la solution générale de l'EDO $ty'(t)+(3t+1)y(t)=e^{-3t}$ après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie.

Correction

Étudions d'abord l'EDO normalisée $y'(t)+\frac{3t+1}{t}y(t)=\frac{e^{-3t}}{t}$ qui doit être considérée sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

1. Étude sur $]-\infty;0[$.
   - Calcul de la solution générale de l'équation homogène $y'(t)+\frac{3t+1}{t}y(t)=0$ pour $t\in]-\infty;0[$.
     L'application
     $$\begin{aligned}A_1\colon]-\infty;0[&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto\frac{3t+1}{t}=3+\frac{1}{t}\end{aligned}$$
     est continue et strictement positive sur $]-\infty;0[$. Formellement on peut alors écrire
     $$\frac{y'(t)}{y(t)}=-3+\frac{1}{t}\quad\Longrightarrow\quad\int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=\int-3+\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\quad\Longrightarrow\quad\ln|y|=-3t+\ln(-t)+C\text{ avec }C\in\mathbb{R}.$$
     La solution générale de l'équation homogène est donc l'application
     $$\begin{aligned}y_H\colon]-\infty;0[&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto\frac{\kappa_1}{t}e^{-3t}\qquad\text{avec }\kappa_1\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$
   - Calcul d'une solution particulière de l'EDO $y'(t)+\frac{3t+1}{t}y(t)=\frac{e^{-3t}}{t}$ pour $t\in]-\infty;0[$.
     On vérifie aisément que
     $$\begin{aligned}y_P\colon]-\infty;0[&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto e^{-3t}\end{aligned}$$
     est une solution particulière de l'EDO puisque
     $$y_P'(t)+\frac{3t+1}{t}y_P(t)=-3e^{-3t}+\left(3+\frac{1}{t}\right)e^{-3t}=\frac{1}{t}e^{-3t},\forall t\in]-\infty;0[.$$
     Si cette solution ne vous parait pas évidente, il est bien entendu possible de déterminer une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante.
   - Conclusion sur $]-\infty;0[$.
     On en déduit que la solution générale de l'EDO sur $]-\infty;0[$ est l'application
     $$\begin{aligned}y\colon]-\infty;0[&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto y_H(t)+y_P(t)=\left(\frac{\kappa_1}{t}+1\right)e^{-3t}\qquad\text{avec }\kappa_1\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$
2. Étude sur $]0;+\infty[$.
   - Calcul de la solution générale de l'équation homogène $y'(t)+\frac{3t+1}{t}y(t)=0$ pour $t\in]0;+\infty[$.
     L'application
     $$\begin{aligned}A_2\colon]0;+\infty[&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto\frac{3t+1}{t}=3+\frac{1}{t}\end{aligned}$$
     est continue et strictement positive sur $]0;+\infty[$. Formellement on peut alors écrire
     $$\frac{y'(t)}{y(t)}=-3+\frac{1}{t}\quad\Longrightarrow\quad\int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=\int-3+\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\quad\Longrightarrow\quad\ln|y|=-3t+\ln(t)+C\text{ avec }C\in\mathbb{R}.$$
     La solution générale de l'équation homogène est donc l'application
     $$\begin{aligned}y_H\colon]0;+\infty[&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto\frac{\kappa_2}{t}e^{-3t}\qquad\text{avec }\kappa_2\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

- Calcul d'une solution particulière de l'EDO $y'(t)+\frac{3t+1}{t}y(t)=\frac{e^{-3t}}{t}$ pour $t\in]0;+\infty[$.
  On vérifie aisément que
  $$\begin{aligned} y_P\colon]0;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto e^{-3t} \end{aligned}$$
  est une solution particulière de l'EDO puisque
  $$y_P'(t)+\frac{3t+1}{t}y_P(t)=-3e^{-3t}+\left(3+\frac{1}{t}\right)e^{-3t}=\frac{1}{t}e^{-3t}, \forall t\in]0;+\infty[.$$
  Si cette solution ne vous parait pas évidente, il est bien entendu possible de déterminer une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante.
- Conclusion sur $]0;+\infty[$.
  On en déduit que la solution générale de l'EDO sur $]0;+\infty[$ est l'application
  $$\begin{aligned} y\colon]0;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto y_H(t)+y_P(t)=\left(\frac{\kappa_2}{t}+1\right)e^{-3t} \qquad \text{avec } \kappa_2\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. Étude sur $\mathbb{R}$.
   La limite de la solution générale pour $t\to 0^-$ n'est bornée que si $\kappa_1=0$. De même, la limite de la solution générale pour $t\to 0^+$ n'est bornée que si $\kappa_2=0$. Par conséquente, si une solution générale de l'EDO existe pour tout $t\in\mathbb{R}$, ce ne peut être que l'application
   $$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto e^{-3t}. \end{aligned}$$
   Cette application est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $$\lim_{t\to 0^\pm}(t\varphi'(t)+(3t+1)\varphi(t))=\lim_{t\to 0}e^{-3t}=1$$
   donc φ est bien solution de l'EDO sur $\mathbb{R}$. C'est donc l'unique solution de l'EDO sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.4.32
Déterminer la solution générale de l'EDO $2t(t+1)y'(t)+(t+1)y(t)=1$ après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie.

Correction
Étudions d'abord l'EDO normalisée $y'(t)+\frac{1}{2t}y(t)=\frac{1}{2t(t+1)}$ qui doit être considérée sur $]-\infty;-1[$, sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

1. Étude sur $]-\infty;-1[$.
   - Calcul de la solution générale de l'équation homogène $y'(t)+\frac{1}{2t}y(t)=0$ pour $t\in]-\infty;-1[$.
     L'application
     $$\begin{aligned} b_1\colon]-\infty;-1[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{2t} \end{aligned}$$
     est continue et strictement négative sur $]-\infty;-1[$. Formellement on peut alors écrire
     $$\frac{y'(t)}{y(t)}=-\frac{1}{2t} \quad\Longrightarrow\quad \int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=\int-\frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\quad \ln|y|=-\ln(\sqrt{-t})+C \text{ avec } C\in\mathbb{R}.$$
     La solution générale de l'équation homogène est donc l'application
     $$\begin{aligned} y_H\colon]-\infty;-1[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{\kappa_1}{\sqrt{-t}} \qquad \text{avec } \kappa_1\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$
   - Calcul d'une solution particulière de l'EDO $y'(t)+\frac{1}{2t}y(t)=\frac{1}{2t(t+1)}$ pour $t\in]-\infty;-1[$.
     L'EDO ne semble pas posséder de solution évidente. On a donc recours à la méthode de la variation de la

constante pour en déterminer une. On cherche une solution particulière sous la forme $y_P(t) = K(t)\ y_H(t)\big|_{\kappa_1=1}$ où $K\colon\ ]-\infty;-1[\to \mathbb{R}$ est une application inconnue dérivable sur $]-\infty;-1[$. On a, pour tout $t \in]-\infty;-1[$,

$$\begin{aligned} y_P(t) &= \frac{K(t)}{\sqrt{-t}} = (-t)^{-1/2}K(t) \\ y_P'(t) &= \frac{K'(t)}{\sqrt{-t}} - \frac{K(t)}{2\sqrt{(-t)^3}} \end{aligned}$$

Puisque y_P est supposée être une solution particulière de l'EDO, on doit avoir pour tout $t \in]-\infty;-1[$,

$$y_P'(t) + \frac{y_P(t)}{2t} = \frac{1}{2t(t+1)}$$

autrement dit la fonction K doit vérifier

$$\frac{K'(t)}{\sqrt{-t}} - \frac{K(t)}{2\sqrt{(-t)^3}} + \frac{K(t)}{2t\sqrt{-t}} = \frac{1}{2t(t+1)}.$$

On doit donc avoir, pour tout $t \in]-\infty;-1[$,

$$K'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{-t}(t+1)}$$

ce qui impose $K(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right) + C$, $C \in \mathbb{R}$. Puisqu'on est intéressé par une seule solution particulière, on choisit généralement $C = O$. On a alors

$$\begin{aligned} y_P\colon\ ]-\infty;-1[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right) \end{aligned}$$

- Conclusion sur $]-\infty;-1[$.
  On en déduit que la solution générale de l'EDO sur $]-\infty;-1[$ est l'application

$$\begin{aligned} y\colon\ ]-\infty;-1[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto y_H(t) + y_P(t) = \frac{\kappa_1}{\sqrt{-t}} + \frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right) \qquad \text{avec } \kappa_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Étude sur $]-1;0[$.
   - Calcul de la solution générale de l'équation homogène $y'(t) + \frac{1}{2t}y(t) = 0$ pour $t \in]-1;0[$.
     L'application

$$\begin{aligned} b_2\colon\ ]-1;0[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{2t} \end{aligned}$$

est continue et strictement négative sur $]-1;0[$. Formellement on peut alors écrire

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{1}{2t} \quad\Longrightarrow\quad \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int -\frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\quad \ln|y| = -\ln(\sqrt{-t}) + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de l'équation homogène est donc l'application

$$\begin{aligned} y_H\colon\ ]-1;0[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{\kappa_2}{\sqrt{-t}} \qquad \text{avec } \kappa_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   - Calcul d'une solution particulière de l'EDO $y'(t) + \frac{1}{2t}y(t) = \frac{1}{2t(t+1)}$ pour $t \in]-1;0[$.
     On cherche une solution particulière sous la forme $y_P(t) = K(t)\ y_H(t)\big|_{\kappa_2=1}$ où $K\colon\ ]-1;0[\to \mathbb{R}$ est une application inconnue dérivable sur $]-1;0[$. On a, pour tout $t \in]-1;0[$,

$$y_P(t) = \frac{K(t)}{\sqrt{-t}} = (-t)^{-1/2}K(t)$$

$$y_P'(t) = \frac{K'(t)}{\sqrt{-t}} - \frac{K(t)}{2\sqrt{(-t)^3}}$$

Puisque y_P est supposée être une solution particulière de l'EDO, on doit avoir pour tout $t \in]-1;0[$,

$$y_P'(t) + \frac{y_P(t)}{2t} = \frac{1}{2t(t+1)}$$

autrement dit la fonction K doit vérifier

$$\frac{K'(t)}{\sqrt{-t}} - \frac{K(t)}{2\sqrt{(-t)^3}} + \frac{K(t)}{2t\sqrt{-t}} = \frac{1}{2t(t+1)}.$$

On doit donc avoir, pour tout $t \in]-1;0[$,

$$K'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{-t}(t+1)}$$

ce qui impose $K(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right) + C$, $C \in \mathbb{R}$. Puisqu'on est intéressé par une seule solution particulière, on choisit généralement $C = O$. On a alors

$$\begin{aligned} y_P\colon]-1;0[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right) \end{aligned}$$

- Conclusion sur $]-1;0[$.
  On en déduit que la solution générale de l'EDO sur $]-1;0[$ est l'application

$$\begin{aligned} y\colon]-1;0[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto y_H(t) + y_P(t) = \frac{\kappa_2}{\sqrt{-t}} + \frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right) \qquad \text{avec } \kappa_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. Étude sur $]0;+\infty[$.

- Calcul de la solution générale de l'équation homogène $y'(t) + \frac{1}{2t}y(t) = 0$ pour $t \in]0;+\infty[$.
  L'application

$$\begin{aligned} b_3\colon]0;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{2t} \end{aligned}$$

  est continue et strictement positive sur $]0;+\infty[$. Formellement on peut alors écrire

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{1}{2t} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int -\frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = -\ln(\sqrt{t}) + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

  La solution générale de l'équation homogène est donc l'application

$$\begin{aligned} y_H\colon]0;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{\kappa_3}{\sqrt{t}} \qquad \text{avec } \kappa_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Calcul d'une solution particulière de l'EDO $y'(t) + \frac{1}{2t}y(t) = \frac{1}{2t(t+1)}$ pour $t \in]0;+\infty[$.
  On cherche une solution particulière sous la forme $y_P(t) = K(t)\ y_H(t)\big|_{\kappa_3=1}$ où $K\colon]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ est une application inconnue dérivable sur $]0;+\infty[$. On a, pour tout $t \in]0;+\infty[$,

$$\begin{aligned} y_P(t) &= \frac{K(t)}{\sqrt{t}} = (t)^{-1/2}K(t) \\ y_P'(t) &= \frac{K'(t)}{\sqrt{t}} - \frac{K(t)}{2\sqrt{(t)^3}} \end{aligned}$$

Puisque y_P est supposée être une solution particulière de l'EDO, on doit avoir pour tout $t \in]0;+\infty[$,

$$y_P'(t) + \frac{y_P(t)}{2t} = \frac{1}{2t(t+1)}$$

autrement dit la fonction K doit vérifier

$$\frac{K'(t)}{\sqrt{t}} - \frac{K(t)}{2\sqrt{t^3}} + \frac{K(t)}{2t\sqrt{t}} = \frac{1}{2t(t+1)}.$$

On doit donc avoir, pour tout $t \in]0;+\infty[$,

$$K'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t}(t+1)}$$

ce qui impose $K(t) = \arctan(\sqrt{t}) + C$, $C \in \mathbb{R}$. Puisqu'on est intéressé par une seule solution particulière, on choisit généralement $C = O$. On a alors

$$\begin{aligned} y_P\colon\ ]0;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \end{aligned}$$

- Conclusion sur $]0;+\infty[$.
  On en déduit que la solution générale de l'EDO sur $]0;+\infty[$ est l'application

$$\begin{aligned} y\colon\ ]0;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto y_H(t) + y_P(t) = \frac{\kappa_3}{\sqrt{t}} + \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \qquad \text{avec } \kappa_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4. Étude sur $\mathbb{R}$.
   L'EDO donnée et l'EDO normalisée ne sont pas équivalentes puisqu'elles n'ont pas le même domaine de validité. Une solution de l'EDO donnée, si elle existe, sera solution de l'EDO normalisée sur les trois intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$. On a déterminé les solutions de l'EDO normalisée sur ces trois intervalles. Se pose maintenant la question de savoir si à partir des solutions de l'EDO normalisée sur les trois intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$ on peut trouver (construire) une solution de l'EDO donnée sur $\mathbb{R}$. Autrement dit : peut-on trouver une application φ définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que sa restriction sur chacun des trois intervalles est solution de l'EDO normalisée ? Si une telle solution existe, elle est nécessairement de la forme

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\kappa_1}{\sqrt{-t}} + \frac{1}{2\sqrt{-t}} \ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right) & \text{si } t < -1, \\ \frac{\kappa_2}{\sqrt{-t}} + \frac{1}{2\sqrt{-t}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right) & \text{si } -1 < t < 0, \\ \frac{\kappa_3}{\sqrt{t}} + \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

   où $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ désignent trois constantes réelles. Pour que cette fonction soit solution, il faut qu'elle soit dérivable sur $\mathbb{R}$: il nous faut donc regarder si elle est prolongeable par continuité en -1 et en 0 et si le prolongement ainsi défini est dérivable en -1 et en 0.

   4.1. Étude du raccord en -1.
   La fonction φ ne peut pas être prolongée par continuité en -1 car elle n'est pas bornée en -1 puisque

$$\lim_{t\to-1^-} \varphi(t) = \lim_{t\to-1^-} \frac{\kappa_1}{\sqrt{-t}} + \frac{1}{2\sqrt{-t}} \ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right) = +\infty.$$

   4.2. Étude du raccord en 0.
   La fonction φ peut être prolongée par continuité en 0 si, et seulement si, $\kappa_2 = \kappa_3 = 0$. En effet,

$$\lim_{t\to0^-} \varphi(t) = \lim_{t\to0^-} \frac{\kappa_2}{\sqrt{-t}} + \frac{1}{2\sqrt{-t}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right) = \lim_{t\to0^-} \frac{\kappa_2}{\sqrt{-t}} + 1$$

   et

$$\lim_{t\to0^+} \varphi(t) = \lim_{t\to0^+} \frac{\kappa_3}{\sqrt{t}} + \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = \lim_{t\to0^+} \frac{\kappa_3}{\sqrt{-t}} + 1.$$

Pour $\kappa_2=\kappa_3=0$, on pose $\varphi(0)=1$. Regardons à présent la dérivabilité en 0 :

$$\lim_{t\to 0^\pm}\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h}=\lim_{t\to 0^\pm}\frac{\varphi(h)-1}{h}=-\frac{1}{3}$$

4.3. Conclusion sur $\mathbb{R}$.
L'EDO donnée admet des solutions sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$ qui sont respectivement les applications

$$\begin{aligned}
y\colon\ ]-\infty;-1[&\to\mathbb{R}\\
t&\mapsto\frac{\kappa_1}{\sqrt{-t}}+\frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right)\\
y\colon\ ]-1;0[&\to\mathbb{R}\\
t&\mapsto\frac{\kappa_2}{\sqrt{-t}}+\frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right)\\
y\colon\ ]0;+\infty[&\to\mathbb{R}\\
t&\mapsto\frac{\kappa_3}{\sqrt{t}}+\frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}
\end{aligned}$$

avec $\kappa_1,\kappa_2,\kappa_2\in\mathbb{R}$.
Elle admet une unique solution sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ qui est l'application

$$\begin{aligned}
y\colon\ ]-1;+\infty[&\to\mathbb{R}\\
t&\mapsto\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right) & \text{si } -1<t<0,\\ 1 & \text{si } t=0,\\ \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} & \text{si } t>0.\end{cases}
\end{aligned}$$

Elle n'admet pas de solution définie sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 3.4.33

1. Déterminer la solution générale de l'EDO $x^2y'(x)-y(x)=x^2-x+1$ après avoir indiqué sur quels intervalles elle est définie.
2. Vérifier que les solutions ne sont pas prolongeables par continuité à gauche en 0.
3. Vérifier que les solutions sont prolongeables par continuité à droite en 0 et en étudier la dérivabilité à droite en ce point.
4. Montrer que, quelque soit la constante d'intégration, le graphe de la solution admet une asymptote verticale ainsi qu'une asymptote parallèle à la droite d'équation $y=x$.

Correction
Il s'agit d'une équation différentielle linéaire avec $a(x)=x^2$, $b(x)=-1$ et $g(x)=x^2-x+1$.

1. Comme $a(x)=x^2$, on cherche sa solution générale sur $I_L=]-\infty;0[$ ou sur $I_R=]0,+\infty[$. Sur chacun de ces intervalles séparément on a

$$\begin{aligned}
A(x)&=\int\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{x},\\
B(x)&=\int\frac{g(x)}{a(x)}e^{A(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x^2-x+1}{x^2}e^{1/x}\,\mathrm{d}x=\int e^{1/x}\,\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x}e^{1/x}\,\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^2}e^{1/x}\,\mathrm{d}x\\
&&\text{(on pose } t=\tfrac{1}{x}\text{ donc } \mathrm{d}x=-\tfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t)\\
&=-\int\frac{1}{t^2}e^t\,\mathrm{d}t+\int\frac{1}{t}e^t\,\mathrm{d}t-\int e^t\,\mathrm{d}t\\
&&\text{(IPP de la première intégrale avec } u'(t)=t^{-2}\text{ et } v(t)=e^t\text{ d'où } u(t)=-t^{-1}\text{ et } v'(t)=e^t)\\
&=-\left(-\frac{1}{t}e^t-\int-\frac{1}{t}e^t\,\mathrm{d}t\right)+\int\frac{1}{t}e^t\,\mathrm{d}t-e^t=\frac{1}{t}e^t-e^t=(x-1)e^{1/x},
\end{aligned}$$

donc

$$y\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} y_L(x) = C_L e^{-1/x} + (x-1)e^{1/x}e^{-1/x} = C_L e^{-1/x} + x - 1 & \text{si } x<0,\\ y_R(x) = C_R e^{-1/x} + (x-1)e^{1/x}e^{-1/x} = C_R e^{-1/x} + x - 1 & \text{si } x>0.\end{cases}$$

2. $\lim_{x\to 0^-} y_L(x) = \text{signe}(C_L)\times\infty$: la solution sur I_L n'est pas prolongeable par continuité en $x=0$.
3. $\lim_{x\to 0^+} y_R(x) = -1$: la solution sur I_R est prolongeable par continuité en $x=0$ et on posera $y_R(0)=-1$.
   Étudions maintenant la dérivabilité en ce point : $y_R'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{y_R(x)-y_R(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{C_R e^{-1/x}+x-1-(-1)}{x} = \lim_{x\to 0^+} C_R \frac{e^{-1/x}}{x} + 1 = 1$: la solution sur I_R est dérivable à droite en $x=0$ avec $y_R'(0)=1$.
   Vérifions si la dérivée est continue en ce point : $\lim_{x\to 0^+} y_R'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-x+1+y_R(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+C_R e^{-1/x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} 1 + C_R \frac{e^{-1/x}}{x^2} = 1 = y_R'(0)$.
   Conclusion : la solution y_R est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+)$.
4. $x=0$ est une asymptote verticale pour y_L.
   Pour y_R on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{y_R(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{C_R e^{-1/x}}{x} + 1 - \frac{1}{x} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} y_R(x) - x = \lim_{x\to+\infty} C_R e^{-1/x} - 1 = C_R - 1$: la droite d'équation $y = x + C_R - 1$ est une asymptote oblique pour y_R.

EDO d'ordre 1 de BERNOULLI

Exercice 3.4.34
Déterminer la solution générale des EDO suivantes après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie :

1. $y'(t) - \frac{1}{t} y(t) = (y(t))^3 \sin(t)$
2. $y'(t) + t y(t) = t^3 (y(t))^2$

Correction

(a) L'EDO $y'(t) - \frac{1}{t} y(t) = (y(t))^3 \sin(t)$ est une équation différentielle de BERNOULLI. Comme $u(t)=1$ pour tout $t\in\mathbb{R}^*$, on cherche sa solution générale sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
- $A(t) = (1-\alpha)\displaystyle\int \frac{v(t)}{u(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 2\ln|t|$,
- $B(t) = (1-\alpha)\displaystyle\int \frac{w(t)}{u(t)} e^{A(t)}\,\mathrm{d}t = -\int t^2 \sin(t)\,\mathrm{d}t = 2t^2\cos(t) - 4t\sin(t) - 4\cos(t)$,
- $z(t) = \big(C_{1,2} + B(t)\big)e^{-A(t)} = \big(C_{1,2} + 2t^2\cos(t) - 4t\sin(t) - 4\cos(t)\big)e^{-2\ln|t|} = \frac{C_{1,2}+2t^2\cos(t)-4t\sin(t)-4\cos(t)}{t^2}$,
- $y(t) = (z(t))^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{z(t)}}$

et on conclut que la solution générale de l'EDO de BERNOULLI assignée est

$$y\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{C_1+2t^2\cos(t)-4t\sin(t)-4\cos(t)}} & \text{si } t<0 \quad \text{avec } C_1\in\mathbb{R}^+,\\ \frac{-t}{\sqrt{C_2+2t^2\cos(t)-4t\sin(t)-4\cos(t)}} & \text{si } t>0 \quad \text{avec } C_2\in\mathbb{R}^+,\end{cases}$$

(b) L'EDO $y'(t) + t y(t) = t^3(y(t))^2$ est une équation différentielle de BERNOULLI. Comme $u(t)=1$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, on cherche sa solution générale sur $\mathbb{R}$.
- *Solution nulle :* la fonction $y(t)=0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ est solution de l'EDO donnée. Toute autre solution ne s'annule jamais. Supposons dans la suite que $y(t)\neq 0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.
- *Réduction à une EDO linéaire du premier ordre :* si on pose $z = 1/y$, *i.e.* $y = 1/z$, elle se réécrit

$$z'(t) - t z(t) = -t^3.$$

  Notons que $z = 1/y$ impose $z(t)\neq 0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.
  On a $a(t)=1$, $b(t)=-t$ et $g(t)=-t^3$, tous définis sur $\mathbb{R}$. On pose
  - $A(t) = \int \frac{b(t)}{a(t)}\,\mathrm{d}t = \int -t\,\mathrm{d}t = -t^2/2$,

◦ $B(t) = \int \frac{g(t)}{a(t)} e^{A(t)} \, \mathrm{d}t = \int -t^3 e^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t = -2 \int x e^x \, \mathrm{d}x = -2(x-1)e^x = (2+t^2)e^{-t^2/2}$.

La solution générale est donc

$$\begin{aligned} z\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto Ce^{-A(t)} + B(t)e^{-A(t)} = Ce^{t^2/2} + t^2 + 2 \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On conclut alors que la solution de l'EDO de Bernoulli donnée s'écrit

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{Ce^{t^2/2} + t^2 + 2} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice 3.4.35

Calculer la solution générale de chaque EDO en utilisant le changement de variable indiqué (on se contentera de calculs formels sans se préoccuper des ensembles de définition) :

1. $y'(x) = \big(x - y(x)\big)^2 + \big(x - y(x)\big) + 1$ et $u(x) = x - y(x)$;
2. $y'(x) = \big(x + y(x) + 2\big)^2$ et $u(x) = x + y(x) + 2$;
3. $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x} + \cos^2\left(\dfrac{y(x)}{x}\right)$ et $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$.

Correction

1. $y(x) = x - u(x)$ donc $y'(x) = 1 - u'(x)$. En remplaçant cela dans l'EDO donnée on trouve $u'(x) = -u^2(x) - u(x)$ qui est à variables séparables : $\int \frac{1}{u(u+1)} \, du = \int -1 \, \mathrm{d}x$ qu'on réécrit $\int \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \, du = \int -1 \, \mathrm{d}x$ ainsi $\ln \frac{u(x)}{u(x)+1} = -x + c_1$ d'où $u(x) = \frac{c_2 e^{-x}}{1 - c_2 e^{-x}} = \frac{1}{c_3 e^x - 1}$ et on conclut $y(x) = x - \frac{1}{c_3 e^x - 1}$.
2. $y(x) = u(x) - x - 2$ donc $y'(x) = u'(x) - 1$. En remplaçant cela dans l'EDO donnée on trouve $u'(x) = 1 + u^2(x)$ qui est à variables séparables : $\int \frac{1}{1+u^2} \, du = \int 1 \, \mathrm{d}x$ ainsi $u(x) = \tan(x + c)$ et on conclut $y(x) = -x - 2 + \tan(x + c)$.
3. $y(x) = x u(x)$ donc $y'(x) = u(x) + x u'(x)$. En remplaçant cela dans l'EDO donnée on trouve $u(x) + x u'(x) = u(x) + \cos^2(u(x))$ soit encore $x u'(x) = \cos^2(u(x))$ qui est à variables séparables : $\int \frac{1}{\cos^2(u)} \, du = \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$ ainsi $\tan(u(x)) = \ln(x)$ d'où $u(x) = \arctan(\ln(x))$ et finalement $y(x) = \arctan(\ln(x)) - x - 2$.

3.4.3. EDO de type Bernoulli

Exercice 3.4.36

Déterminer la solution générale des EDO suivantes après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie :

1. $y'(t) - \frac{1}{t} y(t) = (y(t))^3 \sin(t)$
2. $y'(t) + t y(t) = t^3 (y(t))^2$

Correction

(a) L'EDO $y'(t) - \frac{1}{t} y(t) = (y(t))^3 \sin(t)$ est une équation différentielle de BERNOULLI. Comme $u(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on cherche sa solution générale sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

- $A(t) = (1-\alpha) \displaystyle\int \frac{v(t)}{u(t)} \, \mathrm{d}t = \int \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = 2 \ln|t|$,
- $B(t) = (1-\alpha) \displaystyle\int \frac{w(t)}{u(t)} e^{A(t)} \, \mathrm{d}t = -\int t^2 \sin(t) \, \mathrm{d}t = 2t^2 \cos(t) - 4t \sin(t) - 4\cos(t)$,
- $z(t) = \big(C_{1,2} + B(t)\big) e^{-A(t)} = \big(C_{1,2} + 2t^2 \cos(t) - 4t \sin(t) - 4\cos(t)\big) e^{-2\ln|t|} = \frac{C_{1,2} + 2t^2 \cos(t) - 4t \sin(t) - 4\cos(t)}{t^2}$,
- $y(t) = (z(t))^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{z(t)}}$

et on conclut que la solution générale de l'EDO de BERNOULLI assignée est

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{C_1 + 2t^2\cos(t) - 4t\sin(t) - 4\cos(t)}} & \text{si } t < 0 \qquad \text{avec } C_1 \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{-t}{\sqrt{C_2 + 2t^2\cos(t) - 4t\sin(t) - 4\cos(t)}} & \text{si } t > 0 \qquad \text{avec } C_2 \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \end{aligned}$$

(b) L'EDO $y'(t)+ty(t)=t^3(y(t))^2$ est une équation différentielle de BERNOULLI. Comme $u(t)=1$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, on cherche sa solution générale sur $\mathbb{R}$.

- *Solution nulle :* la fonction $y(t)=0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ est solution de l'EDO donnée. Toute autre solution ne s'annule jamais. Supposons dans la suite que $y(t)\neq 0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.
- $A(t)=(1-\alpha)\displaystyle\int\frac{v(t)}{u(t)}\,\mathrm{d}t=-\int t\,\mathrm{d}t=-\frac{t^2}{2}$,
- $B(t)=(1-\alpha)\displaystyle\int\frac{w(t)}{u(t)}e^{A(t)}\,\mathrm{d}t=-\int t^3e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t=-2\int xe^x\,\mathrm{d}x=-2(x-1)e^x=(2+t^2)e^{-t^2/2}$,
- $z(t)=ce^{t^2/2}+2+t^2$,
- $y(t)=(z(t))^{-1}=\frac{1}{z(t)}$

et on conclut que la solution générale de l'EDO de BERNOULLI assignée est

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto\frac{1}{Ce^{t^2/2}+t^2+2}\qquad\text{avec } C\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Chapitre 4.

Calcul analytique de la solution de quelques EDOs linéaires d'ordre 2

Dans ce chapitre nous allons montrer comment calculer la solution d'une EDO homogène d'ordre 2 linéaire à coefficients constants. On verra comment chercher des solutions pour des formes particulière du second membre d'EDO non homogènes.

Dans ce chapitre

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est de la forme

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x)=g(x)$$

où a, b et c sont des constantes données ($a\neq 0$) et g est une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Toute solution y d'un EDO linéaire du second ordre à coefficients constants dépend de deux constantes arbitraires C_1 et C_2 et est de la forme

$$y(x)=y_H(x)+y_P(x)$$

où y_P est une solution particulière de l'EDO et y_H est la solution générale de l'équation homogène associée (c'est-à-dire de l'EDO $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0$).
On doit donc résoudre deux problèmes : chercher d'abord la solution générale de l'équation homogène et ensuite une solution particulière de l'équation complète.

4.1. Résolution de l'équation homogène associée

On introduit le polynôme caractéristique $p(\lambda)=a\lambda^2+b\lambda+c$. Soit $\Delta=b^2-4ac$, alors

- si $\Delta>0$ on a
$$y_H(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x},\qquad C_1,C_2\in\mathbb{R},\qquad \lambda_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\qquad \lambda_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};$$
- si $\Delta=0$ on a
$$y_H(x)=(C_1+C_2x)e^{\lambda x},\qquad C_1,C_2\in\mathbb{R},\qquad \lambda=-\frac{b}{2a};$$
- si $\Delta<0$ on a
$$y_H(x)=e^{\sigma x}(C_1\cos(\omega x)+C_2\sin(\omega x)),\qquad C_1,C_2\in\mathbb{R},\qquad \sigma=-\frac{b}{2a},\qquad \omega=\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a},$$
qu'en physique souvent on réécrit comme
$$y_H(x,A,\varphi)=Ae^{\sigma x}\cos(\omega x-\varphi),\qquad A=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\qquad \cos(\varphi)=\frac{C_1}{A},\qquad \sin(\varphi)=\frac{C_2}{A}.$$

4.2. Recherche d'une solution particulière

Pour trouver une solution particulière, on peut soit la “deviner” directement car elle est évidente, soit l'obtenir par superposition de solutions particulières, soit la chercher sous une forme particulière.

① Cette solution particulière peut être une *solution évidente*.

EXEMPLE
Soit l'EDO $y''(x)-2y(x)=-e^x$. Une solution évidente est $y_P(x)=e^x$.

② *Principe de superposition* : soient a, b, et c trois réels et $g_1, g_2, \dots, g_n$ n applications continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si $y_{P,k}$ est une solution particulière de l'EDO $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=g_k(x)$ alors $\sum_{k=1}^n y_{P,k}$ est une solution particulière de l'EDO $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=\sum_{k=1}^n g_k(x)$.

EXEMPLE
Soit l'EDO $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=6x+1+4e^x+8e^{-x}$. On cherchera y_P sous la forme $y_P(x)=y_{P,1}(x)+y_{P,2}(x)+y_{P,3}(x)$ avec

- $y_{P,1}$ une solution particulière de l'EDO $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=6x+1$,
- $y_{P,2}$ une solution particulière de l'EDO $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=4e^x$,
- $y_{P,3}$ une solution particulière de l'EDO $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=8e^{-x}$.

③ Soit $g(x)=p_n(x)e^{\mu x}\cos(\theta x)$ ou $g(x)=p_n(x)e^{\mu x}\sin(\theta x)$, alors on cherchera y_P sous la forme :

$$y_P(x)=x^m e^{\mu x}(q_{1,n}(x)\cos(\theta x)+q_{2,n}(x)\sin(\theta x))$$

où p_n, $q_{1,n}$ et $q_{2,n}$ sont des polynômes de degré n et on a

- si $\Delta>0$ et $\theta=0$ et $\mu=\lambda_1$ ou $\mu=\lambda_2$ alors $m=1$;
- si $\Delta=0$ et $\theta=0$ et $\mu=\lambda$ alors $m=2$;
- si $\Delta<0$ et $\theta=\omega$ et $\mu=\sigma$ alors $m=1$;
- sinon $m=0$.

EXEMPLE
Soit m un paramètre qui dépend du polynôme caractéristique.

- Si $g(x)=\cos(5x)$ ou $g(x)=\sin(5x)$ alors $n=0$, $\mu=0$ et $\theta=5$ donc on cherchera y_P sous la forme $y_P(x)=x^m(A\cos(5x)+B\sin(5x))$.
- Si $g(x)=e^{2x}\sin(5x)$ alors $n=0$, $\mu=2$ et $\theta=5$ donc on cherchera y_P sous la forme $y_P(x)=x^m e^{2x}(A\cos(5x)+B\sin(5x))$.
- Si $g(x)=x\cos(5x)$ ou $g(x)=x\sin(5x)$ alors $n=1$, $\mu=0$ et $\theta=5$ donc on cherchera y_P sous la forme $y_P(x)=x^m((Ax+B)\cos(5x)+(Cx+D)\sin(5x))$.
- Si $g(x)=x$ alors $n=1$, $\mu=0$ et $\theta=0$ donc on cherchera y_P sous la forme $y_P(x)=x^m(Ax+B)$.
- Si $g(x)=xe^{3x}$ alors $n=1$, $\mu=3$ et $\theta=0$ donc on cherchera y_P sous la forme $y_P(x)=x^m e^{3x}(Ax+B)$.
- Si $g(x)=e^{2x}$ alors $n=0$, $\mu=2$ et $\theta=0$ donc on cherchera y_P sous la forme $Ax^m e^{2x}$.

EXEMPLE
On veut calculer toutes les solutions de l'EDO

$$y''(x)+y(x)=3\cos(x).$$

Il s'agit d'une EDO linéaire du second ordre à coefficients constants.

- *Recherche de l'intégrale générale de l'équation homogène.*
  L'équation caractéristique $\lambda^2+1=0$ a discriminant $\Delta=-4$. On a $\sigma=0$ et $\omega=1$. Donc l'intégrale générale de l'équation homogène est
  $$y_H(x)=c_1\cos(x)+c_2\sin(x), \qquad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

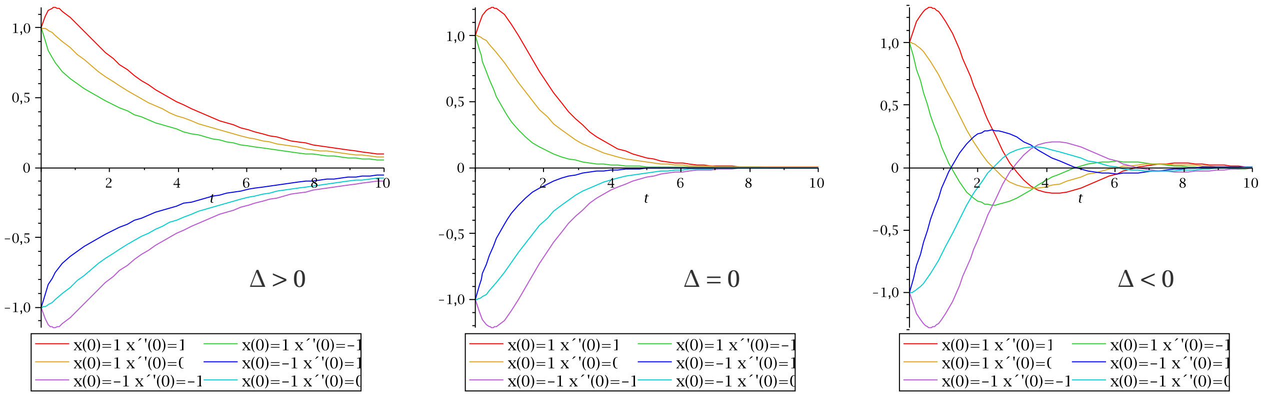
- *Recherche d'un intégrale particulier de l'équation complète.*
  Puisque $\mu = \sigma = 0$, on cherche l'intégrale particulier sous la forme
  $$y_P(x) = x\big(\alpha\cos(x) + \beta\sin(x)\big).$$
  On a alors
  $$\begin{aligned} y_P'(x) &= (\alpha+\beta x)\cos(x) + (\beta - \alpha x)\sin(x),\\ y_P''(x) &= (2\beta - \alpha x)\cos(x) - (2\alpha + \beta x)\sin(x). \end{aligned}$$
  On les remplace dans l'équation :
  $$y_P''(x) + y_P(x) = 3\cos(x) \qquad\Longrightarrow\qquad (2\beta-\alpha x)\cos(x) - (2\alpha+\beta x)\sin(x) + x(\alpha\cos(x)+\beta\sin(x)) = 3\cos(x)$$
  d'où $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{3}{2}$.

L'intégrale générale de l'EDO assignée est donc
$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + \frac{3}{2}x\cos(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

EXEMPLE (OSCILLATEUR HARMONIQUE AMORTI)
Les oscillateurs harmoniques décrivent des comportements oscillants qu'ils soient dus à une nature intrinsèquement oscillatoire (comme le mouvement d'une masse reliée à un ressort) ou à un mouvement au voisinage d'une position d'équilibre (comme dans le modèle d'une liaison moléculaire). Dans les deux cas, on utilise le même modèle de l'oscillateur harmonique. De plus, on s'intéresse ici au cas où on a un frottement fluide proportionnel à la vitesse.
Éloigné d'une distance x de sa position de repos ($x = 0$), le mouvement en fonction du temps t est décrit par l'équation différentielle
$$mx''(t) = -kx(t) - \gamma x'(t)$$
où m est la masse de l'objet, $k > 0$ la constante élastique du ressort et $\gamma > 0$ le coefficient de frottement. On cherche la fonction $t \mapsto x$ solution de cette EDO.
On réécrit l'équation sous la forme
$$x''(t) + 2\delta x'(t) + \eta^2 x(t) = 0$$
où on a noté
$$\delta = \frac{\gamma}{2m} > 0 \qquad \text{et} \qquad \eta^2 = \frac{k}{m} > 0.$$
Le polynôme caractéristique associé à cette équation est
$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\delta\lambda + \eta^2$$
qui a discriminant
$$\Delta = 4\delta^2 - 4\eta^2$$
et racines
$$\lambda_1 = \frac{-2\delta - \sqrt{\Delta}}{2} = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \eta^2} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{-2\delta + \sqrt{\Delta}}{2} = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \eta^2}.$$
Selon le signe de Δ on a trois comportements différentes :

- Si $\Delta > 0$, c'est-à-dire si $\delta > \eta$ alors λ_1 et λ_2 sont réels et différents et la solution de l'EDO est de la forme
  $$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
  Comme $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ (car $\sqrt{\delta^2-\eta^2} < \delta$), x tend vers 0 de façon exponentielle quand $t \to +\infty$. Physiquement cela signifie que si la constante de frottement est grande comparée à la constate d'élasticité du ressort alors la masse n'oscille pas mais va être tirée vers la position d'équilibre.
- Si $\Delta = 0$, c'est-à-dire si $\delta = \eta$ alors $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$ et la solution de l'EDO est de la forme
  $$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
  Dans ce cas aussi la solution x tend vers 0 de façon exponentielle quand $t \to +\infty$.
- Si $\Delta < 0$, c'est-à-dire si $\delta < \eta$ alors λ_1 et λ_2 sont deux nombres complexes conjugués et la solution de l'EDO est de la

forme
$$x(t) = C_1 e^{-\delta t}\cos(\sqrt{-\Delta}t) + C_2 e^{-\delta t}\sin(\sqrt{-\Delta}t), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
qui se réécrit $x(t) = re^{-\delta t}\cos(\sqrt{-\Delta}t+\varphi)$ avec $r = \sqrt{C_1^2+C_2^2}$, $\varphi = \arctan(-C_1/C_2)$. Dans cette dernière expression on voit le caractère oscillatoire du mouvement. Dans ce cas le frottement ne suffit pas pour empêcher l'oscillation mais son effet se traduit par une diminution exponentielle de l'ampleur de l'oscillation : le graphe de $x(t)$ est compris entre les courbes d'équation $\pm re^{-\delta t}$.



EXEMPLE (OSCILLATEUR HARMONIQUE FORCÉ : CAS D'UNE EXCITATION SINUSOÏDALE)
On s'intéresse à l'influence d'une excitation harmonique sur un oscillateur. Outre le fait que ce type d'excitation est important pour lui-même (vibrations d'une machine tournante, mouvement d'un électron dans un champ magnétique...), cette étude revêt un intérêt théorique capital. En effet, la fonction qui décrit cette force excitatrice peut s'écrire comme une superposition de fonctions sinusoïdales (discrète ou continue selon que la force est périodique ou non). Le fait que l'équation différentielle soit linéaire, autrement dit que le principe de superposition puisse s'appliquer, permet d'écrire la solution pour une force quelconque comme la somme des solutions obtenues pour chaque terme de la décomposition. Il est alors nécessaire de déterminer la réponse à chaque terme de la décomposition, à savoir à une excitation sinusoïdale. Ceci donne une importance considérable à l'étude de l'excitation sinusoïdale.
Étudions l'équation différentielle qui décrit le mouvement d'un corps de masse $m>0$ qui se déplace horizontalement assujetti à une force générée par un ressort de constante élastique $k>0$ et une force externe d'intensité $f(t) = A\cos(\varphi t)$ avec A et φ deux paramètres réels (on a négligé le frottement).
La position x du corps en fonction du temps suit la loi
$$mx''(t) + kx(t) = A\cos(\varphi t).$$
On la réécrit sous la forme
$$x''(t) + \eta^2 x(t) = a\cos(\varphi t)$$
ayant posé $\eta^2 = k/m > 0$ et $a = A/m$.

- Équation homogène : $x''(t) + \eta^2 = 0$. Le polynôme caractéristique est $p(\lambda) = \lambda^2 + \eta^2$ et a les deux racines complexes conjugués $\lambda_1 = -i\eta$ et $\lambda_2 = i\eta$. La solution est de la forme
$$x(t) = C_1\cos(\eta t) + C_2\sin(\eta t), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
- Solution particulière : il faut considérer les deux cas suivantes.
  - Si $\varphi \neq \eta$ alors on cherche une solution particulière du type
  $$x_P(t) = b\cos(\varphi t) + c\sin(\varphi t).$$
  On a $x_P'(t) = -b\varphi\sin(\varphi t) + c\varphi\cos(\varphi t)$ et $x_P''(t) = -b\varphi^2\cos(\varphi t) - c\varphi^2\sin(\varphi t)$. En remplaçant dans l'EDO on obtient
  $$-b\varphi^2\cos(\varphi t) - c\varphi^2\sin(\varphi t) + \eta^2 b\cos(\varphi t) + \eta^2 c\sin(\varphi t) = a\cos(\varphi t),$$
  ce qui implique
  $$b = \frac{a}{\eta^2-\varphi^2}, \qquad \text{et} \qquad c = 0.$$
  - Si $\varphi = \eta$ alors on cherche une solution particulière du type
  $$x_P(t) = bt\cos(\varphi t) + ct\sin(\varphi t).$$

On a $x_P'(t) = (b+c\varphi t)\cos(\varphi t)+(c-b\varphi t)\sin(\varphi t)$ et $x_P''(t) = (2c-b\varphi t)\varphi\cos(\varphi t)-(2b+c\varphi t)\varphi\sin(\varphi t)$. En remplaçant dans l'EDO on obtient

$$(2c-b\varphi t)\varphi\cos(\varphi t)-(2b+c\varphi t)\varphi\sin(\varphi t)+\varphi^2 bt\cos(\varphi t)+\varphi^2 ct\sin(\varphi t)=a\cos(\varphi t),$$

qui se réécrit

$$((-2-t)b+(1-t)c)\varphi\sin(\varphi t)+((b-a)+2c(1+t)\varphi-bt\varphi^2)\cos(\varphi t)=0$$

ce qui implique

$$b=0, \qquad \text{et} \qquad c=\frac{a}{2\varphi}.$$

La solution complète est donc

- si $\varphi\neq\eta$, $x(t)=C_1\cos(\eta t)+C_2\sin(\eta t)+\frac{a}{\eta^2-\varphi^2}\cos(\varphi t)$ avec $C_1, C_2\in\mathbb{R}$; si on pose $r=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$ et $\varphi=\arctan(-C_1/C_2)$ on obtient
$$x(t)=r\cos(\eta t+\varphi)+\frac{a}{\eta^2-\varphi^2}\cos(\varphi t)$$
qui est la superposition de deux mouvements oscillatoires avec deux amplitudes et deux périodes différents.
- si $\varphi=\eta$, $x(t)=C_1\cos(\varphi t)+C_2\sin(\varphi t)+\frac{a}{2\varphi}t\sin(\varphi t)$ avec $C_1, C_2\in\mathbb{R}$; si on pose $r=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$ et $\psi=\arctan(-C_1/C_2)$ on obtient
$$x(t)=r\cos(\varphi t+\psi)+\frac{a}{2\varphi}t\sin(\varphi t).$$
On remarque que toute sous-suite (t_n) divergent à $+\infty$ de la forme $t_n=t_0+\frac{2\pi}{\varphi n}$ pour $t_0\neq 0$ on a $|x(t_n)|\to+\infty$: les oscillations ont ampleur de plus en plus grande (c'est ce que l'on appelle la résonance).

4.3. Exercices

Exercice 4.3.1
Calculer les solutions des EDO linéaires du second ordre à coefficients constants suivantes :

1. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$
2. $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$
3. $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$
4. $y''(x) - y(x) = e^{2x}$
5. $y''(x) - y'(x) = e^{x}$

Correction

1. Le polynôme caractéristique associé à l'EDO est $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ qui a discriminant $\Delta = 1$: on a deux solutions réelles distinctes
$$\lambda_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{3+1}{2} = 2.$$
Toutes les solutions sont alors les fonctions $y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$ pour tout $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
2. Le polynôme caractéristique associé à l'EDO est $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ qui a discriminant $\Delta = 0$: on a deux solutions réelles coïncidentes
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{4}{2} = 2.$$
Toutes les solutions sont les fonctions $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$ pour tout $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
3. Le polynôme caractéristique associé à l'EDO est $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ qui a discriminant $\Delta = -4$: on a deux solutions complexes conjuguées
$$\lambda_1 = \frac{2-2i}{2} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{2+2i}{2}.$$
Comme $\Re(\lambda_2) = 1$ et $\Im(\lambda_2) = 1$, toutes les solutions sont les fonctions $y(x) = e^{x}(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))$ pour tout $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
4. Comme l'EDO n'est pas homogène on cherche ses solutions sous la forme $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ où les y_H sont toutes les solutions de l'EDO homogène associée et y_P est une solution particulière de l'EDO complète.
Le polynôme caractéristique associé à l'EDO est $\lambda^2 - 1 = 0$ qui a discriminant $\Delta = 1$: on a deux solutions réelles distinctes
$$\lambda_1 = -1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = 1.$$
Toutes les solutions de l'homogène sont les fonctions $y_H(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$ pour tout $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Comme le terme source est $g(x) = e^{2x}$, on a $n = 0$, $\mu = 2$ et $\vartheta = 0$; comme $\Delta > 0$, $\vartheta = 0$ mais $\mu \neq \lambda_1$ et $\mu \neq \lambda_2$ alors $m = 0$: la solution particulière sera de la forme $y_P(x) = q_1 e^{2x}$. Pour qu'elle soit une solution particulière on doit imposer qu'elle vérifie l'EDO complète ; comme $y_P'(x) = 2q_1 e^{2x}$ et $y_P''(x) = 4q_1 e^{2x}$ il faut que
$$4q_1 e^{2x} - q_1 e^{2x} = e^{2x}$$
qui donne $q_1 = \frac{1}{3}$.
En conclusion toutes les solutions sont les fonctions $y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$ pour tout $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
5. Toute solution est de la forme $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ où y_H représente toutes les solutions de l'équation $y''(x) - y'(x) = 0$ tandis que y_P est une solution particulière de $y''(x) - y'(x) = e^{x}$. Le polynôme caractéristique est $2\lambda^2 - 1 = 0$ qui a comme racines les deux réels $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$. Par conséquent $y_H(x) = C_1 + C_2 e^{x}$. En adoptant la notation du cours on a $n = 0$, $\mu = 1$, $\vartheta = 0$, $\Delta > 0$ et $\mu = \lambda_2 = 1$ par conséquent $m = 1$: la solution particulière est alors de la forme $y_P(x) = Cxe^{x}$. Pour déterminer C on impose à y_P d'être solution de l'EDO. Comme $y_P'(x) = C(1+x)e^{x}$ et $y_P''(x) = C(2+x)e^{x}$, il faut que $\left(C(2+x)e^{x}\right) - \left(C(1+x)e^{x}\right) = e^{x}$, ce qui donne $C = 1$. On conclut que toutes les solutions de l'EDO s'écrivent
$$y(x) = C_1 + C_2 e^{x} + xe^{x}.$$

Exercice 4.3.2
Résoudre le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + 10y(x) = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Correction
L'équation différentielle est linéaire du second ordre, à coefficients constants, et sans second membre (*i.e.* elle est déjà homogène!). L'équation caractéristique $\lambda^2-2\lambda+10=0$ a discriminant $\Delta<0$. Comme $\sigma=1$ et $\omega=3$, l'intégrale générale de l'équation homogène est

$$y_H(x)=e^x\left(c_1\cos(3x)+c_2\sin(3x)\right),\qquad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Puisque $y(0)=1$ alors $c_1=1$. Comme $y'(0)=2$ et $y'(x)=e^x\left((c_1+3c_2)\cos(3x)+(c_1-3c_2)\sin(3x)\right)$ alors $c_2=1/3$. On conclut que la solution du problème de CAUCHY est

$$y(x)=e^x\left(\cos(3x)+\frac{1}{3}\sin(3x)\right).$$

Exercice 4.3.3
Calculer toutes les solutions de l'EDO $2y''(x)-5y'(x)+3y(x)=e^x$.

Correction
Toute solution est de la forme

$$y(x)=y_H(x)+y_P(x)$$

où y_H représente toutes les solutions de l'équation $2y''(x)-5y'(x)+3y(x)=0$ tandis que y_P est une solution particulière de $2y''(x)-5y'(x)+3y(x)=e^x$.

- $\boxed{\text{Calcul de } y_H.}$ Le polynôme caractéristique est $2\lambda^2-5\lambda+3=0$ qui a comme racines les deux réels $\lambda_1=1$ et $\lambda=3/2$. Par conséquent
$$y_H(x)=C_1e^x+C_2e^{3x/2}.$$
- $\boxed{\text{Calcul de } y_P.}$ En adoptant la notation du cours on a $n=0$, $\mu=1$, $\vartheta=0$, $\Delta>0$ et $\mu=\lambda_1=1$ par conséquent $m=1$: la solution particulière est alors de la forme $y_P(x)=Cxe^x$. Pour déterminer C on impose à y_P d'être solution de l'EDO. Comme $y_P'(x)=C(1+x)e^x$ et $y_P''(x)=C(2+x)e^x$, il faut que
$$2\big(C(2+x)e^x\big)-5\big(C(1+x)e^x\big)+3\big(Cxe^x\big)=e^x,$$
ce qui donne $C=1$.

On conclut que toutes les solutions de l'EDO s'écrivent

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{3x/2}+xe^x.$$

Exercice 4.3.4
Calculer toutes les solutions de l'EDO $2y''(x)-7y'(x)+5y(x)=-3e^x$.

Correction
Toute solution est de la forme

$$y(x)=y_H(x)+y_P(x)$$

où y_H représente toutes les solutions de l'équation $2y''(x)-7y'(x)+5y(x)=0$ tandis que y_P est une solution particulière de $2y''(x)-7y'(x)+5y(x)=-3e^x$.

- $\boxed{\text{Calcul de } y_H.}$ Le polynôme caractéristique est $2\lambda^2-7\lambda+5=0$ qui a comme racines les deux réels $\lambda_1=1$ et $\lambda=5/2$. Par conséquent
$$y_H(x)=C_1e^x+C_2e^{5x/2}.$$
- $\boxed{\text{Calcul de } y_P.}$ En adoptant la notation du cours on a $n=0$, $\mu=1$, $\vartheta=0$, $\Delta>0$ et $\mu=\lambda_1=1$ par conséquent $m=1$: la solution particulière est alors de la forme $y_P(x)=Cxe^x$. Pour déterminer C on impose à y_P d'être solution de l'EDO. Comme $y_P'(x)=C(1+x)e^x$ et $y_P''(x)=C(2+x)e^x$, il faut que
$$2\big(C(2+x)e^x\big)-7\big(C(1+x)e^x\big)+5\big(Cxe^x\big)=-3e^x,$$
ce qui donne $C=1$.

On conclut que toutes les solutions de l'EDO s'écrivent

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{5x/2}+xe^x.$$

Exercice 4.3.5

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + y(x) = (x+1)e^x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Correction
Comme l'EDO n'est pas homogène on cherche ses solutions sous la forme $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ où les y_H sont toutes les solutions de l'EDO homogène $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$ (y_H contient deux constantes d'intégration) et y_P est une solution particulière de l'EDO complète $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = (x+1)e^x$.
Le polynôme caractéristique associé à l'EDO est $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ qui a discriminant $\Delta = 4 - 4 = 0$, l'unique racine réelle est

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Par conséquent, les solutions de l'EDO homogène sont les fonctions $y_H(x) = (C_1 + C_2 x)e^x$ pour tout $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Comme le terme source est $g(x) = (x+1)e^x$, on a $n = 1$, $\mu = 1$ et $\vartheta = 0$; puisque $\Delta = 0$, $\vartheta = 0$ et $\mu = \lambda$ alors $m = 2$: la solution particulière sera de la forme $y_P(x) = x^2 e^x(\alpha + \beta x) = (\alpha x^2 + \beta x^3)e^x$. Pour qu'elle soit une solution particulière on doit imposer qu'elle vérifie l'EDO complète; comme $y_P'(x) = (2\alpha x + 3\beta x^2 + \alpha x^2 + \beta x^3)e^x = (2\alpha x + (3\beta + \alpha)x^2 + \beta x^3)e^x$ et $y_P''(x) = (2\alpha + (6\beta + 4\alpha)x + (6\beta + \alpha)x^2 + \beta x^3)e^x$, il faut

$$(2\alpha + (6\beta + 4\alpha)x + (6\beta + \alpha)x^2 + \beta x^3)e^x - 2(2\alpha x + (3\beta + \alpha)x^2 + \beta x^3)e^x + (\alpha x^2 + \beta x^3)e^x = (x+1)e^x$$

c'est-à-dire $(2\alpha) + (6\beta + 4\alpha - 4\alpha)x + (6\beta + \alpha - 6\beta - 2\alpha + \alpha)x^2 + (\beta - 2\beta + \beta)x^3 = 1 + x$, ce qui donne $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{6}$.
En conclusion les solutions de l'EDO sont les fonctions $y(x) = (C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3)e^x$ pour tout $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
On cherche parmi ces solutions celles qui vérifient $y(0) = 1$; comme $y(0) = C_1$ on obtient les fonctions $y(x) = (1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3)e^x$ pour tout $C_2 \in \mathbb{R}$. Parmi ces solutions, on cherche maintenant celle qui vérifie $y'(0) = 2$; comme $y'(0) = 1 + C_2$ on conclut que l'unique solution du problème de CAUCHY donné est la fonction $y(x) = (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3)e^x$.

Exercice 4.3.6

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = (1-x)e^{-x}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Correction
Comme l'EDO n'est pas homogène on cherche ses solutions sous la forme $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ où les y_H sont toutes les solutions de l'EDO homogène $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$ (y_H contient deux constantes d'intégration) et y_P est une solution particulière de l'EDO complète $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = (1-x)e^{-x}$.
Le polynôme caractéristique associé à l'EDO est $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ qui a discriminant $\Delta = 4 - 4 = 0$, la solution réelle est

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Par conséquent, les solutions de l'EDO homogène sont les fonctions $y_H(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$ pour tout $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Comme le terme source est $g(x) = (1-x)e^{-x}$, selon la notation du polycopié on a $n = 1$, $\mu = -1$ et $\vartheta = 0$; comme $\Delta = 0$, $\vartheta = 0$ et $\mu = \lambda$ alors $m = 2$: la solution particulière sera de la forme $y_P(x) = x^2 e^{-x}(\alpha + \beta x) = (\alpha x^2 + \beta x^3)e^{-x}$. Pour qu'elle soit une solution particulière on doit imposer qu'elle vérifie l'EDO complète; comme $y_P'(x) = (2\alpha x + (3\beta - \alpha)x^2 - \beta x^3)e^{-x}$ et $y_P''(x) = (2\alpha + (6\beta - 4\alpha)x - (6\beta - \alpha)x^2 + \beta x^3)e^{-x}$, il faut

$$(2\alpha + (6\beta - 4\alpha)x - (6\beta - \alpha)x^2 + \beta x^3)e^{-x} + 2(2\alpha x + (3\beta - \alpha)x^2 - \beta x^3)e^{-x} + (\alpha x^2 + \beta x^3)e^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

c'est-à-dire $(2\alpha) + (6\beta - 4\alpha + 4\alpha)x + (-6\beta + \alpha + 6\beta - 2\alpha + \alpha)x^2 + (+\beta - 2\beta + \beta)x^3 = 1 + x$, ce qui donne $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{6}$.
En conclusion les solutions de l'EDO sont les fonctions $y(x) = (C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3)e^{-x}$ pour tout $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
On cherche parmi ces solutions celles qui vérifient $y(0) = 1$; comme $y(0) = C_1$ on obtient les fonctions $y(x) = (1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3)e^{-x}$ pour tout $C_2 \in \mathbb{R}$. Parmi ces solutions, on cherche maintenant celle qui vérifie $y'(0) = 2$; comme $y'(0) = 1 + C_2$ on conclut que l'unique solution du problème de CAUCHY donné est la fonction $y(x) = (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3)e^{-x}$.

Exercice 4.3.7

$$\begin{cases} y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = 2xe^{4x}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Correction
Comme l'EDO n'est pas homogène on cherche ses solutions sous la forme $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ où les y_H sont toutes les solutions de l'EDO homogène $y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = 0$ (y_H contient deux constantes d'intégration) et y_P est une solution particulière de l'EDO complète $y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = 2xe^{4x}$.
Le polynôme caractéristique associé à l'EDO est $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ qui a discriminant $\Delta = 25 - 16 = 9$, les deux solutions réelles sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 4$. Par conséquent, les solutions de l'EDO homogène sont les fonctions $y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$ pour tout $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Comme le terme source est $g(x) = 2xe^{4x}$, selon la notation du polycopié on a $n = 1$, $\mu = 4$ et $\vartheta = 0$; comme $\Delta > 0$, $\vartheta = 0$ et $\mu = \lambda_2$ alors $m = 1$: la solution particulière sera de la forme $y_P(x) = xe^{4x}(\alpha x + \beta) = (\alpha x^2 + \beta x)e^{4x}$. Pour qu'elle soit une solution particulière on doit imposer qu'elle vérifie l'EDO complète; comme $y_P'(x) = (\beta + (2\alpha + 4\beta)x + 4\alpha x^2)e^{4x}$ et $y_P''(x) = ((2\alpha + 8\beta) + (16\alpha + 16\beta)x + 16\alpha x^2)e^{4x}$, il faut

$$((2\alpha + 8\beta) + (16\alpha + 16\beta)x + 16\alpha x^2)e^{4x} - 5(\beta + (2\alpha + 4\beta)x + 4\alpha x^2)e^{4x} + 4(\alpha x^2 + \beta x)e^{4x} = 2xe^{4x}$$

c'est-à-dire $(2\alpha + 8\beta - 5\beta) + (16\alpha + 16\beta - 10\alpha - 20\beta + \beta)x + (16\alpha - 20\alpha + 4\alpha)x^2 = 2x$, ce qui donne $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = -\frac{2}{9}$.
En conclusion les solutions de l'EDO sont les fonctions $y(x) = C_1 e^x + \left(C_2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}x^2\right) e^{4x}$ pour tout $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. On cherche parmi ces solutions celles qui vérifient $y(0) = 1$; comme $y(0) = C_1 + C_2$ on obtient les fonctions $y(x) = C_1 e^x + \left(1 - C_1 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}x^2\right) e^{4x}$ pour tout $C_1 \in \mathbb{R}$. Parmi ces solutions, on cherche maintenant celle qui vérifie $y'(0) = 2$; comme $y'(0) = 4 - \frac{2}{9} - 3C_1$ on conclut que l'unique solution du problème de CAUCHY donné est la fonction $y(x) = \frac{16}{27}e^x + \left(\frac{11}{27} - \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}x^2\right) e^{4x}$.

Exercice 4.3.8

Résoudre le problème de CAUCHY

$$\begin{cases} y''(x) + 9y(x) = 108x\cos(3x), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Correction
Comme l'EDO n'est pas homogène on cherche ses solutions sous la forme $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ où les y_H sont toutes les solutions de l'EDO homogène $y''(x) + 9y(x) = 0$ (y_h contient deux constantes d'intégration) et y_P est une solution particulière de l'EDO complète $y''(x) + 9y(x) = 108x\cos(3x)$.
Le polynôme caractéristique associé à l'EDO est $\lambda^2 + 9 = 0$ qui a discriminant $\Delta = -9$, les deux racines complexes conjuguées sont

$$\lambda_1 = -3i, \qquad \lambda_2 = 3i.$$

Par conséquent, les solutions de l'EDO homogène sont les fonctions $y_H(x) = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)$ pour tout $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Comme le terme source est $g(x) = 108x\cos(3x)$, on a $n = 1$, $\mu = 0$ et $\vartheta = 3$; puisque $\Delta < 0$, $\vartheta = \omega = 3$ et $\mu = 0$ alors $m = 1$: la solution particulière sera de la forme $y_P(x) = x\big((\alpha x + \beta)\cos(3x) + (\gamma x + \delta)\sin(3x)\big) = (\alpha x^2 + \beta x)\cos(3x) + (\gamma x^2 + \delta x)\sin(3x)$.
Pour qu'elle soit une solution particulière on doit imposer qu'elle vérifie l'EDO complète; comme $y_P'(x) = (3\gamma x^2 + (2\alpha + 3\delta)x + \beta)\cos(3x) + (-3\alpha x^2 + (2\gamma - 3\beta)x + \delta)\sin(3x)$ et $y_P''(x) = (-9\alpha x^2 + (12\gamma - 9\beta)x + 2\alpha + 6\delta)\cos(3x) + (-9\gamma x^2 + (-12\alpha - 9\delta)x + 2\gamma - 6\beta)\sin(3x)$, il faut

$$\begin{aligned} &(-9\alpha x^2 + (12\gamma - 9\beta)x + 2\alpha + 6\delta)\cos(3x) + (-9\gamma x^2 + (-12\alpha - 9\delta)x + 2\gamma - 6\beta)\sin(3x) \\ &+ 9\big((\alpha x^2 + \beta x)\cos(3x) + (\gamma x^2 + \delta x)\sin(3x)\big) \\ &= 108x\cos(3x) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(12\gamma x + 2\alpha + 6\delta)\cos(3x) + (-12\alpha x + 2\gamma - 6\beta)\sin(3x) = 108x\cos(3x)$$

ce qui donne

$$\begin{cases} 12\gamma = 108, \\ 2\alpha + 6\delta = 0, \\ -12\alpha = 0, \\ 2\gamma - 6\beta = 0 \end{cases} \implies \alpha = \delta = 0,\ \beta = 3,\ \gamma = 9.$$

En conclusion les solutions de l'EDO sont les fonctions $y(x) = (C_1 + 3x)\cos(3x) + (C_2 + 9x^2)\sin(3x)$ pour tout $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. On cherche parmi ces solutions celles qui vérifient $y(0) = 0$; comme $y(0) = C_1$ on obtient les fonctions $y(x) = 3x\cos(3x) + \left(C_2 + 9x^2\right)\sin(3x)$ pour tout $C_2 \in \mathbb{R}$. Parmi ces solutions, on cherche maintenant celle qui vérifie $y'(0) = 0$; comme $y'(0) = 3 + 3C_2$ on conclut que l'unique solution du problème de CAUCHY donné est la fonction $y(x) = 3x\cos(3x) + (9x^2 - 1)\sin(3x)$.

Exercice 4.3.9

Trouver la solution des problèmes de CAUCHY suivants :

$$(1)\ \begin{cases} y''(t) - 2\sqrt{2}y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0 \\ y(\pi/2) = 1 \\ y'(\pi/2) = 1 \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} y''(t) + y'(t) - 12y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

Correction

(1) L'équation caractéristique $\lambda^2 - 2\sqrt{2}\lambda + 2 = 0$ a discriminant $\Delta = 0$ et l'unique racine double $\lambda = \sqrt{2}$. La solution générale de l'EDO sur $\mathbb{R}$ est donc

$$y(t) = (At + B)e^{\sqrt{2}t}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Déterminons la valeur des constantes A et B correspondant à l'unique solution vérifiant $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$. On a

$$y'(t) = [A + (At + B)\sqrt{2}]e^{\sqrt{2}t},$$

donc

$$\begin{cases} y(0) = 2, \\ y'(0) = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 2, \\ A + \sqrt{2}B = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 2, \\ A = 3 - 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

L'unique solution du problème de CAUCHY donné est l'application

$$\begin{aligned} y \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto [(3 - 2\sqrt{2})t + 2]e^{\sqrt{2}t} \end{aligned}$$

(2) L'équation caractéristique $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ a discriminant $\Delta = -4 < 0$ et deux racines complexes conjuguées de partie réelle $\sigma = 2$ et partie imaginaire 1 et -1. La solution générale de l'EDO sur $\mathbb{R}$ est donc

$$y(t) = (A\cos(t) + B\sin(t))e^{2t}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Déterminons la valeur des constantes A et B correspondant à l'unique solution vérifiant $y(\pi/2) = 1$ et $y'(\pi/2) = 1$. On a

$$y'(t) = [(2A + B)\cos(t) + (2B - A)\sin(t)]e^{2t},$$

donc

$$\begin{cases} y(\pi/2) = 1, \\ y'(\pi/2) = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} Be^{\pi} = 1, \\ (2B - A)e^{\pi} = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} A = e^{-\pi}, \\ B = e^{-\pi}. \end{cases}$$

L'unique solution du problème de CAUCHY donné est l'application

$$\begin{aligned} y \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (\cos(t) + \sin(t))e^{2t-\pi} \end{aligned}$$

(3) L'équation caractéristique $\lambda^2 + \lambda - 12 = 0$ a discriminant $\Delta = 49 > 0$ et admet deux racines réelles distinctes, $\lambda = -4$ et

$\lambda = 3$. La solution générale de l'EDO sur $\mathbb{R}$ est donc

$$y(t) = Ae^{-4t} + Be^{3t}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Déterminons la valeur des constantes A et B correspondant à l'unique solution vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 4$. On a

$$y'(t) = -4Ae^{-4t} + 3Be^{3t},$$

donc

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 4, \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 1, \\ -4A + 3B = 4, \end{cases} \iff \begin{cases} A = -1/7, \\ B = 8/7. \end{cases}$$

L'unique solution du problème de CAUCHY donné est l'application

$$\begin{aligned} y \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{7}(-e^{-4t} + 8e^{3t}) \end{aligned}$$

Exercice 4.3.10
Calculer la solution générale des EDO d'ordre 2 linéaires à coefficients constants suivantes :

(1) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = (t^2 + 1)e^{-t}$,
(2) $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 4e^{3t}$.
(3) $y''(t) + y(t) = \sin(t)$,
(4) $y''(t) + y(t) = \sin(3t)$,
(5) En déduire la solution générale de l'EDO $y''(t) + y(t) = \sin^3(t)$.

Correction

(1) Considérons l'EDO $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = (t^2 + 1)e^{-t}$.

1.1. *Calcul de la solution générale y_H de l'équation homogène $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$.*
Elle admet pour équation caractéristique $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ qui a discriminant $\Delta = 1 > 0$ et admet deux racines réelles distinctes, $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = -1$. La solution générale de l'EDO homogène sur $\mathbb{R}$ est donc

$$y_H(t) = Ae^{-2t} + Be^{-t}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

1.2. *Calcul d'une solution particulière y_P de l'équation $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = (t^2 + 1)e^{-t}$.*
Puisque $g(t) = (t^2 + 1)e^{-t}$, *i.e.* $n = 2$, $\mu = -1 = \lambda_2$ et $\theta = 0$, on cherchera y_P sous la forme $y_P(t) = te^{-t}(a + bt + ct^2) = (at + bt^2 + ct^3)e^{-t}$. On a alors

$$\begin{aligned} y_P(t) &= (at + bt^2 + ct^3)e^{-t}, \\ y_P'(t) &= (a + (2b - a)t + (3c - b)t^2 - ct^3)e^{-t}, \\ y_P''(t) &= ((2b - 2a) + (6c - 4b + a)t + (-6c + b)t^2 + ct^3)e^{-t}, \end{aligned}$$

d'où

$$y_P''(t) + 3y_P'(t) + 2y_P(t) = \Big(\big(a + 2b\big) + \big(2b + 6c\big)t + \big(3c\big)t^2 + \Big)e^{-t} = (t^2 + 1)e^{-t}$$

Par identification (deux polynômes sont égaux s'ils ont mêmes coefficients) il vient

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2b + 6c = 0 \\ 3c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = 1/3 \end{cases}$$

On en déduit qu'une solution particulière est donc

$$\begin{aligned} y_P \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (3t - t^2 + t^3/3)e^{-t}. \end{aligned}$$

1.3. *Solution générale de l'équation $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=(t^2+1)e^{-t}$.*

La solution générale de l'EDO est donc

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto Ae^{-2t}+Be^{-t}+(3t-t^2+t^3/3)e^{-t}, \qquad A,B\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

(2) Considérons l'EDO $y''(t)-2y'(t)-3y(t)=4e^{3t}$.

2.1. *Calcul de la solution générale y_H de l'équation homogène $y''(t)-2y'(t)-3y(t)=0$.*

Elle admet pour équation caractéristique $\lambda^2-2\lambda-3=0$ qui a discriminant $\Delta=16>0$ et admet deux racines réelles distinctes, $\lambda_1=-1$ et $\lambda_2=3$. La solution générale de l'EDO homogène sur $\mathbb{R}$ est donc

$$y_H(t)=Ae^{-t}+Be^{3t}, \qquad A,B\in\mathbb{R}.$$

2.2. *Calcul d'une solution particulière y_P de l'équation $y''(t)-2y'(t)-3y(t)=4e^{3t}$.*

Puisque $g(t)=4e^{3t}$, *i.e.* $n=0$, $\mu=3=\lambda_2$ et $\theta=0$, on cherchera y_P sous la forme $y_P(t)=Ate^{3t}$. On a alors

$$\begin{aligned} y_P(t)&=Ate^{3t},\\ y_P'(t)&=A(1+3t)e^{3t},\\ y_P''(t)&=A(6+9t)e^{3t}, \end{aligned}$$

d'où

$$y_P''(t)-2y_P'(t)-3y_P(t)=4Ae^{3t}=4e^{3t}$$

Par identification (deux polynômes sont égaux s'ils ont mêmes coefficients) il vient $A=1$. On en déduit qu'une solution particulière est donc

$$\begin{aligned} y_P\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto te^{3t}. \end{aligned}$$

2.3. *Solution générale de l'équation $y''(t)-2y'(t)-3y(t)=4e^{3t}$.*

La solution générale de l'EDO est donc

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto Ae^{-t}+(B+t)e^{3t}, \qquad A,B\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

(3) Considérons l'EDO $y''(t)+y(t)=\sin(t)$.

3.1. *Calcul de la solution générale y_H de l'équation homogène $y''(t)+y(t)=0$.*

Elle admet pour équation caractéristique $\lambda^2+1=0$ qui a discriminant $\Delta<0$ et admet deux racines complexes conjuguées, $\lambda_1=-i$ et $\lambda_2=i$. La solution générale de l'EDO homogène sur $\mathbb{R}$ est donc

$$y_H(t)=(A\cos(t)+B\sin(t)), \qquad A,B\in\mathbb{R}.$$

3.2. *Calcul d'une solution particulière y_P de l'équation $y''(t)+y(t)=\sin(t)$.*

Puisque $g(t)=\sin(t)$, *i.e.* $n=0$, $\mu=0$ et $\theta=1=\omega$ avec $\Delta<0$, on cherchera y_P sous la forme $y_P(t)=t(C\cos(t)+D\sin(t))$. On a alors

$$\begin{aligned} y_P(t)&=t(C\cos(t)+D\sin(t)),\\ y_P'(t)&=t(-C\sin(t)+D\cos(t))+C\cos(t)+D\sin(t),\\ y_P''(t)&=t(-C\sin(t)-D\cos(t))-2C\sin(t)+2D\cos(t), \end{aligned}$$

d'où

$$y_P''(t)+y_P(t)=2(D\cos(t)-C\sin(t))=\sin(t).$$

Par identification (deux polynômes sont égaux s'ils ont mêmes coefficients) il vient $C=-1/2$ et $D=0$. On en déduit qu'une solution particulière est donc

$$\begin{aligned} y_P \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto -t\cos(t)/2. \end{aligned}$$

3.3. *Solution générale de l'équation $y''(t)+y(t)=\sin(t)$.*
La solution générale de l'EDO est donc

$$\begin{aligned} y \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (A\cos(t)+B\sin(t)) - t\cos(t)/2, \qquad A, B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(4) Considérons l'EDO $y''(t)+y(t)=\sin(3t)$.

4.1. *Calcul d'une solution particulière y_P de l'équation $y''(t)+y(t)=\sin(3t)$.*
Puisque $g(t)=\sin(3t)$, *i.e.* $n=0$, $\mu=0$ et $\theta=3\neq\omega$ avec $\Delta<0$, on cherchera y_P sous la forme $y_P(t)=C\cos(3t)+D\sin(3t)$. On a alors

$$\begin{aligned} y_P(t) &= C\cos(3t)+D\sin(3t), \\ y_P'(t) &= -3C\sin(3t)+3D\cos(3t), \\ y_P''(t) &= -9C\cos(3t)-9D\sin(3t), \end{aligned}$$

d'où

$$y_P''(t)+y_P(t) = -8(C\cos(3t)+D\sin(3t)) = \sin(3t).$$

Par identification (deux polynômes sont égaux s'ils ont mêmes coefficients) il vient $C=0$ et $D=-1/8$. On en déduit qu'une solution particulière est donc

$$\begin{aligned} y_P \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto -\sin(3t)/8. \end{aligned}$$

4.2. *Solution générale de l'équation $y''(t)+y(t)=\sin(3t)$.*
La solution générale de l'EDO est donc

$$\begin{aligned} y \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (A\cos(3t)+B\sin(3t)) - \sin(3t)/8, \qquad A, B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(5) Considérons l'EDO $y''(t)+y(t)=\sin^3(t)$.

5.1. *Calcul d'une solution particulière y_P de l'équation $y''(t)+y(t)=\sin^3(t)$.*
Puisque $g(t)=\sin^3(t)=-\sin(3t)/4+3\sin(t)/4$, d'après le principe de superposition on en déduit qu'une solution particulière est donc

$$\begin{aligned} y_P \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto -(-\sin(3t)/8)/4+3(-t\cos(t)/2)/4 = \sin(3t)/32 - t\cos(t)/8. \end{aligned}$$

5.2. *Solution générale de l'équation $y''(t)+y(t)=\sin^3(t)$.*
La solution générale de l'EDO est donc

$$\begin{aligned} y \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (A\cos(3t)+B\sin(3t)) + \sin(3t)/32 - t\cos(t)/8, \qquad A, B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 4.3.11

1. Calculer la solution générale de l'EDO $y''(t)-9y(t)=0$
2. Calculer une solution particulière de l'EDO $y''(t)-9y(t)=18t$
3. Calculer une solution particulière de l'EDO $y''(t)-9y(t)=5e^{2t}$
4. Calculer une solution particulière de l'EDO $y''(t)-9y(t)=12e^{3t}$
5. Calculer une solution particulière de l'EDO $y''(t)-9y(t)=-13\sin(2t)$

6. En utilisant le principe de superposition (sans faire de calculs), en déduire la solution générale de l'EDO $y''(t) - 9y(t) = 18t + 5e^{2t} + 12e^{3t} - 13\sin(2t)$

Correction
Les solutions de l'EDO $y''(t) - 9y(t) = 18t + 5e^{2t} + 12e^{3t} - 13\sin(2t)$ s'écrivent

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{3t} - 2t - e^{2t} + 2te^{3t} + \sin(2t).$$

En effet, ,pus allons d'abord calculer la solution générale de l'EDO homogène, puis une solution particulière de l'EDO complète en utilisant le principe de superposition.

Solution générale de l'EDO homogène :

L'équation caractéristique $\lambda^2 - 9 = 0$ a discriminant $\Delta = 9 > 0$. On a $\lambda_{1,2} = \pm 3$. L'intégrale générale de l'équation homogène est donc

$$y_H(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{3t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière :

Par le principe de superposition on cherchera y_P sous la forme $y_P(t) = y_{P,1}(t) + y_{P,2}(t) + y_{P,3}(t) + y_{P,4}(t)$ avec

1. $y_{P,1}$ une solution particulière de l'EDO $y''(t) - 9y(t) = 18t$,
2. $y_{P,2}$ une solution particulière de l'EDO $y''(t) - 9y(t) = 5e^{2t}$,
3. $y_{P,3}$ une solution particulière de l'EDO $y''(t) - 9y(t) = 12e^{3t}$,
4. $y_{P,4}$ une solution particulière de l'EDO $y''(t) - 9y(t) = -13\sin(2t)$.

1. Calcul de $y_{P,1}$.
On a $g_1(t) = 18t$, ce qui nous donne $n = 1$, $\mu = 0$ et $\theta = 0$. De plus, $\Delta > 0$ et $\mu \neq \lambda_{1,2}$, donc $m = 0$. On cherche alors $y_{P,1}$ sous la forme $y_{P,1} = At + B$. On a

$$y_{P,1} = At + B \qquad y'_{P,1} = A \qquad y''_{P,1} = 0,$$

donc

$$18t = y''_{P,1}(t) - 9y_{P,1}(t) = 0 - 9(At + B)$$

d'où $A = -2$ et $B = 0$.

2. Calcul de $y_{P,2}$.
On a $g_2(t) = 5e^{2t}$, ce qui nous donne $n = 0$, $\mu = 2$ et $\theta = 0$. De plus, $\Delta > 0$ et $\mu \neq \lambda_{1,2}$, donc $m = 0$. On cherche alors $y_{P,2}$ sous la forme $y_{P,2} = Ae^{2t}$. On a

$$y_{P,2} = Ae^{2t} \qquad y'_{P,2} = 2Ae^{2t} \qquad y''_{P,2} = 4Ae^{2t},$$

donc

$$5e^{2t} = y''_{P,2}(t) - 9y_{P,2}(t) = (4A - 9A)e^{2t}$$

d'où $A = -1$.

3. Calcul de $y_{P,3}$.
On a $g_3(t) = 12e^{3t}$, ce qui nous donne $n = 0$, $\mu = 3$ et $\theta = 0$. De plus, $\Delta > 0$ et $\mu = \lambda_2$, donc $m = 1$. On cherche alors $y_{P,3}$ sous la forme $y_{P,3} = Ate^{3t}$. On a

$$y_{P,3} = Ate^{3t} \qquad y'_{P,3} = A(1 + 3t)e^{3t} \qquad y''_{P,3} = A(6 + 9t)e^{3t},$$

donc

$$12e^{3t} = y''_{P,3}(t) - 9y_{P,2}(t) = A(6 + 9t - 9t)e^{3t}$$

d'où $A = 2$.

4. Calcul de $y_{P,4}$.
On a $g_4(t) = -13\sin(2t)$, ce qui nous donne $n = 0$, $\mu = 0$ et $\theta = 2$. De plus, $\Delta > 0$ et $\mu \neq \lambda_{1,2}$, donc $m = 0$. On cherche alors $y_{P,4}$ sous la forme $y_{P,4} = A\cos(2t) + B\sin(2t)$. On a

$$y_{P,4} = A\cos(2t) + B\sin(2t) \qquad y'_{P,4} = 2B\cos(2t) - 2A\sin(2t) \qquad y''_{P,4} = -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t),$$

donc

$$-13\sin(2t) = y''_{P,4}(t) - 9y_{P,4}(t) = (-4A - 9A)\cos(2t) + (-4B - 9B)\sin(2t)$$

d'où $A = 0$ et $B = 1$.

On conclut qu'une solution particulière de l'EDO $y''(t) - 9y(t) = 18t + 5e^{2t} + 12e^{3t} - 13\sin(2t)$ est

$$y_P(t) = y_{P,1}(t) + y_{P,2}(t) + y_{P,3}(t) + y_{P,4}(t) = -2t - e^{2t} + 2te^{3t} + \sin(2t).$$

Exercice 4.3.12

Calculer toutes les solutions de l'EDO $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 6t + 1 + 4e^t + 8e^{-t}$ (on utilisera le principe de superposition pour calculer la solution particulière).

Correction

Solution générale de l'EDO homogène :

L'équation caractéristique $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ a discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$. On a $\lambda = \frac{4\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ ainsi $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$. L'intégrale générale de l'équation homogène est donc

$$y_H(x) = c_1 e^t + c_2 e^{3t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière :

Par le principe de superposition on cherchera y_P sous la forme $y_P(t) = y_{P,1}(t) + y_{P,2}(t) + y_{P,3}(t)$ avec

1. $y_{P,1}$ une solution particulière de l'EDO $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 6t + 1$,
2. $y_{P,2}$ une solution particulière de l'EDO $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 4e^t$,
3. $y_{P,3}$ une solution particulière de l'EDO $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 8e^{-t}$.

1. $\boxed{\text{Calcul de } y_{P,1}.}$
   On a $g_1(t) = 6t + 1$, ce qui nous donne $n = 1$, $\mu = 0$ et $\theta = 0$. De plus, $\Delta > 0$ et $\mu \neq \lambda_{1,2}$, donc $m = 0$. On cherche alors $y_{P,1}$ sous la forme $y_{P,1} = At + B$. On a

   $$y_{P,1} = At + B \qquad y'_{P,1} = A \qquad y''_{P,1} = 0,$$

   donc

   $$6t + 1 = y''_{P,1}(t) - 4y'_{P,1}(t) + 3y_{P,1}(t) = 0 - 4A + 3(At + B)$$

   d'où $A = 2$ et $B = 3$.
2. $\boxed{\text{Calcul de } y_{P,2}.}$
   On a $g_2(t) = 4e^t$, ce qui nous donne $n = 0$, $\mu = 1$ et $\theta = 0$. De plus, $\Delta > 0$ et $\mu = \lambda_1$, donc $m = 1$. On cherche alors $y_{P,2}$ sous la forme $y_{P,2} = Ate^t$. On a

   $$y_{P,2} = Ate^t \qquad y'_{P,2} = A(1+t)e^t \qquad y''_{P,2} = A(2+t)e^t,$$

   donc

   $$4e^t = y''_{P,2}(t) - 4y'_{P,2}(t) + 3y_{P,2}(t) = A(2+t)e^t - 4A(1+t)e^t + 3Ate^t = -2Ae^t$$

   d'où $A = -2$.
3. $\boxed{\text{Calcul de } y_{P,3}.}$
   On vérifie que la fonction e^{-t} est solution particulière de l'EDO. Si on n'a pas remarqué cela, on peut utiliser la méthode classique : on a $g_3(t) = 8e^{-t}$, ce qui nous donne $n = 0$, $\mu = -1$ et $\theta = 0$. De plus, $\Delta > 0$ et $\mu \neq \lambda_{1,2}$, donc $m = 0$. On cherche alors $y_{P,3}$ sous la forme $y_{P,3} = Ae^{-t}$. On a

   $$y_{P,3} = Ae^{-t} \qquad y'_{P,3} = -Ae^{-t} \qquad y''_{P,3} = Ae^{-t},$$

   donc

   $$8e^{-t} = y''_{P,3}(t) - 4y'_{P,3}(t) + 3y_{P,3}(t) = Ae^{-t} + 4Ae^{-t} + 3Ae^{-t} = 8Ae^{-t}$$

   d'où $A = 1$.

On conclut qu'une solution particulière de l'EDO $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 6t + 1 + 4e^t + 8e^{-t}$ est

$$y_P(t) = y_{P,1}(t) + y_{P,2}(t) + y_{P,3}(t) = (2t + 3) - 2te^t + e^{-t}.$$

On conclut que les solutions de l'EDO $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 6t + 1 + 4e^t + 8e^{-t}$ s'écrivent

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} + 2t + 3 - 2te^t + e^{-t}.$$

Exercice 4.3.13

Considérons l'EDO linéaire

$$y''(t)+by'(t)+cy(t)=g(t).$$

Si les fonctions $y_1(t)=t^3$, $y_2(t)=t^3+e^{-t}$ et $y_3(t)=1+t^3-5e^{-t}$ sont solution de cette EDO, que valent-ils b, c et $g(t)$?

Correction

$y_2(t)-y_1(t)=e^{-t}$ et $y_3(t)-y_1(t)=1-5e^{-t}$ sont solutions de l'EDO homogène $y''(t)+by'(t)+cy(t)=0$, donc 0 et -1 sont racines du polynôme caractéristique $\lambda^2+b\lambda+c=0$, *i.e.* $\lambda^2+b\lambda+c=(\lambda+1)\lambda$ d'où $b=1$ et $c=0$.
$y_1(t)=t^3$ est solution de l'EDO complète, donc $6t+3t^2=g(t)$.

Exercice 4.3.14

On se propose de déterminer l'évolution au cours du temps de la charge q dans un circuit RLC soumis à une tension sinusoïdale. La charge est solution de l'équation différentielle

$$Lq''(t)+Rq'(t)+\frac{1}{C}q(t)=\omega v\sin(\omega t) \tag{4.1}$$

où v est une constante réelle, L et ω sont des constantes réelles positives et où R et C sont des constantes strictement positives.

1. Soit $\alpha\in\mathbb{R}^*$ et $\beta\in\mathbb{R}$. Déterminer une primitive de la fonction
$$\begin{aligned}F\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t)\end{aligned}$$
2. On suppose que $L=0$. Calculer la solution de l'EDO (4.1) vérifiant $q(0)=0$.
3. On suppose $L>0$ et $R^2-4L/C>0$. Déterminer la solution générale de l'EDO (4.1).

Correction

1. Soit f et g deux fonctions dérivables. Alors
$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$
On pose $I(t)=\int e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,\mathrm{d}t$. En intégrant par parties ($f(t)=\cos(\beta t)$ et $g'(x)=e^{\alpha t}$) on trouve
$$I(t)=\int e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,\mathrm{d}t=\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\cos(\beta t)+\frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,\mathrm{d}t.$$
De la même manière, on pose $J(t)=\int e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,\mathrm{d}t$. En intégrant par parties ($f(t)=\sin(\beta t)$ et $g'(x)=e^{\alpha t}$) on trouve
$$J(t)=\int e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,\mathrm{d}t=\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\sin(\beta t)-\frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,\mathrm{d}t=\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\sin(\beta t)-\frac{\beta}{\alpha}I(t).$$
On en déduit
$$I(t)=\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\cos(\beta t)+\frac{\beta}{\alpha}J(t)=\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\cos(\beta t)+\frac{\beta}{\alpha}\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\sin(\beta t)-\frac{\beta^2}{\alpha^2}I(t)$$
d'où
$$I(t)=\int e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,\mathrm{d}t=\frac{\alpha\cos(\beta t)+\beta\sin(\beta t)}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha t}$$
et
$$J(t)=\int e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,\mathrm{d}t=\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\sin(\beta t)-\frac{\beta}{\alpha}I(t)=\frac{\alpha\sin(\beta t)-\beta\cos(\beta t)}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha t}$$
2. Dans le cas $L=0$ l'EDO (4.1) devient
$$Rq'(t)+\frac{1}{C}q(t)=\omega v\sin(\omega t).$$
   - *Calcul de la solution générale de l'équation homogène $Rq'(t)+\frac{1}{C}q(t)=0$.*
   L'application $t\mapsto 1/(RC)$ est continue et différente de zéro sur $\mathbb{R}$. Formellement on peut donc écrire $\frac{q_H'(t)}{q_H(t)}=-\frac{1}{RC}$,

ce qui conduit à la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène

$$\begin{aligned} q_H\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \kappa e^{-t/(RC)} \qquad \text{avec } \kappa \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- *Calcul d'une solution particulière de l'équation* $Rq'(t) + \frac{1}{C} q(t) = \omega\nu\sin(\omega t)$.
  Considérons une nouvelle fonction inconnue $K(t)$ telle que $q_P(t) = K(t)e^{-t/(RC)}$ soit solution de $Rq'_P(t) + \frac{1}{C} q_P(t) = \omega\nu\sin(\omega t)$. On calcule $q'_P(t) = K'(t)e^{-t/(RC)} - K(t)e^{-t/(RC)}/(RC)$ et on le reporte dans l'EDO ; on obtient (en utilisant le résultat à la question 1)

$$K'(t) = \frac{\omega\nu}{R}\left(e^{t/(RC)}\sin(\omega t)\right) \quad \overset{\substack{\alpha=1/(RC)\\ \beta=\omega}}{\Longrightarrow} \quad K(t) = \frac{\omega\nu}{R}\left(\frac{\frac{\cos(\omega t)}{RC} + \omega\sin(\omega t)}{\frac{1}{(RC)^2} + \omega^2} e^{t/(RC)}\right)$$

  et donc la fonction

$$\begin{aligned} q_P\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (\omega\nu C)\left(\frac{\sin(\omega t) - \omega RC\cos(\omega t)}{1 + (\omega RC)^2} e^{t/(RC)}\right) \end{aligned}$$

  est une solution particulière sur $\mathbb{R}$.

- *Calcul de la solution générale de l'équation* $Rq'(t) + \frac{1}{C} q(t) = \omega\nu\sin(\omega t)$.
  On en déduit que la solution générale de l'EDO sur $\mathbb{R}$ est l'application

$$\begin{aligned} q\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto q_H(t) + q_P(t) = \kappa e^{-t/(RC)} + \frac{\omega\nu C}{1 + (\omega RC)^2}\left(\sin(\omega t) - \omega RC\cos(\omega t)\right) e^{t/(RC)} \end{aligned}$$

- *Calcul de la solution vérifiant* $q(0) = 0$.
  L'unique solution vérifiant $q(0) = 0$ est obtenue pour $\kappa = \dfrac{\omega^2\nu RC^2}{1 + (\omega RC)^2}$.

3. Si $L > 0$, l'EDO (4.1) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

- *Calcul de la solution générale* q_H *de l'équation homogène* $Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C} q(t) = 0$.
  Elle admet pour équation caractéristique $L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$ qui a discriminant $\Delta = R^2 - 4L/C$. Sous l'hypothèse $R^2 - 4L/C > 0$ elle admet deux racines réelles distinctes, $\lambda_1 = \frac{R^2-\sqrt{\Delta}}{2L}$ et $\lambda_2 = \frac{R^2+\sqrt{\Delta}}{2L}$. La solution générale de l'EDO homogène sur $\mathbb{R}$ est donc

$$q_H(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

- *Calcul d'une solution particulière* q_P *de l'équation* $Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C} q(t) = \omega\nu\sin(\omega t)$.
  Puisque $g(t) = \omega\nu\sin(\omega t)$, *i.e.* $n = 0$, $\mu = 0$ et $\theta = \omega$, on cherchera q_P sous la forme $q_P(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$. On a alors

$$\begin{aligned} q_P(t) &= \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t), \\ q'_P(t) &= \omega\big(-\alpha\sin(\omega t) + \beta\cos(\omega t)\big), \\ q''_P(t) &= \omega^2\big(-\alpha\cos(\omega t) - \beta\sin(\omega t)\big), \end{aligned}$$

  d'où

$$Lq''_P(t) + Rq'_P(t) + \frac{1}{C} q_P(t) = \left(-L\omega^2\alpha + R\omega\beta + \frac{\alpha}{C}\right)\cos(\omega t) + \left(-L\omega^2\beta - R\omega\alpha + \frac{\beta}{C}\right)\sin(\omega t) = \omega\nu\sin(\omega t)$$

  Les réels α et β doivent donc être solution de

$$\begin{cases} -L\omega^2\alpha + R\omega\beta + \frac{\alpha}{C} = 0 \\ -L\omega^2\beta - R\omega\alpha + \frac{\beta}{C} = \omega\nu \end{cases} \iff \begin{cases} \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)\alpha = -R\omega\beta \\ \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)\beta = \omega\nu - R\omega\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\frac{\omega^2\nu R}{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + (R\omega)^2} \\ \beta = \frac{\omega\nu\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)}{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + (R\omega)^2} \end{cases}$$

On en déduit qu'une solution particulière est donc

$$\begin{aligned}q_P\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto -\frac{\omega^2 \nu R}{\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)^2+(R\omega)^2}\cos(\omega t)+\frac{\omega\nu\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)}{\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)^2+(R\omega)^2}\sin(\omega t).\end{aligned}$$

- *Solution générale de l'équation $Lq''(t)+Rq'(t)+\frac{1}{C}q(t)=\omega\nu\sin(\omega t)$.*
  La solution générale de l'EDO est donc

$$\begin{aligned}q\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto Ae^{\frac{R^2-\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}t}+Be^{\frac{R^2+\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}t}-\frac{\omega^2 \nu R}{\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)^2+(R\omega)^2}\cos(\omega t)+\frac{\omega\nu\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)}{\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)^2+(R\omega)^2}\sin(\omega t),\qquad A,B\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exercice 4.3.15 (Oscillateur harmonique forcé : cas d'une excitation sinusoïdale)
On s'intéresse à l'influence d'une excitation harmonique sur un oscillateur. Outre le fait que ce type d'excitation est important pour lui-même (vibrations d'une machine tournante, mouvement d'un électron dans un champ magnétique...), cette étude revêt un intérêt théorique capital. En effet, la fonction qui décrit cette force excitatrice peut s'écrire comme une superposition de fonctions sinusoïdales (discrète ou continue selon que la force est périodique ou non). Le fait que l'équation différentielle soit linéaire, autrement dit que le principe de superposition puisse s'appliquer, permet d'écrire la solution pour une force quelconque comme la somme des solutions obtenues pour chaque terme de la décomposition. Il est alors nécessaire de déterminer la réponse à chaque terme de la décomposition, à savoir à une excitation sinusoïdale. Ceci donne une importance considérable à l'étude de l'excitation sinusoïdale.
Étudions l'équation différentielle qui décrit le mouvement d'un corps de masse $m>0$ qui se déplace horizontalement assujetti à une force générée par un ressort de constante élastique $k>0$ et une force externe d'intensité $f(t)=A\cos(\varphi t)$ avec A et φ deux paramètres réels (on a négligé le frottement).

Correction
La position x du corps en fonction du temps suit la loi

$$mx''(t)+kx(t)=A\cos(\varphi t).$$

On la réécrit sous la forme

$$x''(t)+\eta^2x(t)=a\cos(\varphi t)$$

ayant posé $\eta^2=k/m>0$ et $a=A/m$.

- Équation homogène : $x''(t)+\eta^2=0$. Le polynôme caractéristique est $p(\lambda)=\lambda^2+\eta^2$ et a les deux racines complexes conjugués $\lambda_1=-i\eta$ et $\lambda_2=i\eta$. La solution est de la forme

$$x(t)=C_1\cos(\eta t)+C_2\sin(\eta t),\qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

- Solution particulière : il faut considérer les deux cas suivantes.
  - Si $\varphi\neq\eta$ alors on cherche une solution particulière du type

  $$x_P(t)=b\cos(\varphi t)+c\sin(\varphi t).$$

  On a $x_P'(t)=-b\varphi\sin(\varphi t)+c\varphi\cos(\varphi t)$ et $x_P''(t)=-b\varphi^2\cos(\varphi t)-c\varphi^2\sin(\varphi t)$. En remplaçant dans l'EDO on obtient

  $$-b\varphi^2\cos(\varphi t)-c\varphi^2\sin(\varphi t)+\eta^2b\cos(\varphi t)+\eta^2c\sin(\varphi t)=a\cos(\varphi t),$$

  ce qui implique

  $$b=\frac{a}{\eta^2-\varphi^2},\qquad\text{et}\qquad c=0.$$

  - Si $\varphi=\eta$ alors on cherche une solution particulière du type

  $$x_P(t)=bt\cos(\varphi t)+ct\sin(\varphi t).$$

  On a $x_P'(t)=(b+c\varphi t)\cos(\varphi t)+(c-b\varphi t)\sin(\varphi t)$ et $x_P''(t)=(2c-b\varphi t)\varphi\cos(\varphi t)-(2b+c\varphi t)\varphi\sin(\varphi t)$. En remplaçant dans l'EDO on obtient

$$(2c - b\varphi t)\varphi\cos(\varphi t) - (2b + c\varphi t)\varphi\sin(\varphi t) + \varphi^2 bt\cos(\varphi t) + \varphi^2 ct\sin(\varphi t) = a\cos(\varphi t),$$

qui se réécrit

$$((-2-t)b + (1-t)c)\varphi\sin(\varphi t) + ((b-a) + 2c(1+t)\varphi - bt\varphi^2)\cos(\varphi t) = 0$$

ce qui implique

$$b = 0, \qquad \text{et} \qquad c = \frac{a}{2\varphi}.$$

La solution complète est donc

- si $\varphi \neq \eta$, $x(t) = C_1\cos(\eta t) + C_2\sin(\eta t) + \frac{a}{\eta^2-\varphi^2}\cos(\varphi t)$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$; si on pose $r = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ et $\varphi = \arctan(-C_1/C_2)$ on obtient
$$x(t) = r\cos(\eta t + \varphi) + \frac{a}{\eta^2 - \varphi^2}\cos(\varphi t)$$
qui est la superposition de deux mouvements oscillatoires avec deux amplitudes et deux périodes différents.
- si $\varphi = \eta$, $x(t) = C_1\cos(\varphi t) + C_2\sin(\varphi t) + \frac{a}{2\varphi}t\sin(\varphi t)$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$; si on pose $r = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ et $\psi = \arctan(-C_1/C_2)$ on obtient
$$x(t) = r\cos(\varphi t + \psi) + \frac{a}{2\varphi}t\sin(\varphi t).$$
On remarque que toute sous-suite (t_n) divergent à $+\infty$ de la forme $t_n = t_0 + \frac{2\pi}{\varphi n}$ pour $t_0 \neq 0$ on a $|x(t_n)| \to +\infty$: les oscillations ont ampleur de plus en plus grande (c'est ce que l'on appelle la résonance).

Annexe A.

Rappels : primitives

Une fonction $F\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ est une primitive (ou *intégrale indéfinie*) d'une fonction $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ si

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in [a;b].$$

- Si F existe on dit que f est *intégrable*.
- F est une primitive de f ssi la fonction $F + c$ l'est pour tout réel c.
- L'ensemble des primitives d'une fonction f est noté $\int f(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$$

Exemple

- $(x^2)' = 2x$ donc $\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + c$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ donc $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x) + c$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$ donc $\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + c$

A.1. Primitives fondamentales

- $\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x) + c$
- $\displaystyle\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c$
- $\displaystyle\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + c$
- $\displaystyle\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \tan(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\tan(x)} + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + c$

A.2. Techniques d'intégration

- *Linéarité :*

$$\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x,\ k \in \mathbb{R}$$

- *Produit (= intégration par parties) :*

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

- *Composition (=intégration par changement de variable) :*
  en posant $u = f(x)$ on obtient $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'(x)$, soit encore $\mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x$ et donc

$$\int g(\underbrace{f(x)}_{=u})\underbrace{f'(x)\,\mathrm{d}x}_{=du} = \int g(u)\,\mathrm{d}u = G(u) + c = G(f(x)) + c$$

A.3. Exercices

Exercice A.3.1 (Par intégration directe)
Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int 2x^3-3x+1\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int (1+2x^3)^2\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \sqrt[4]{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Correction

1. $\displaystyle 2\frac{x^4}{4}-3\frac{x^2}{2}+x+c=\frac{1}{2}x(x^3-3x+2)+c$
2. $\displaystyle\int 4x^6+4x^3+1\,\mathrm{d}x=\frac{4}{7}x^7+x^4+x+c$
3. $\displaystyle\int x^{1/2}+x^{1/3}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{3}{4}x^{4/3}+c$
4. $\displaystyle\int x^{-4/3}\,\mathrm{d}x=-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+c$
5. $\displaystyle\frac{(x+1)^{1/2}}{1/2}+c=2\sqrt{x+1}+c$
6. $\displaystyle\frac{4}{7}(x-1)^{7/4}+c$
7. $\displaystyle\int \frac{x+1-1}{x+1}\,\mathrm{d}x=\int 1-\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x=x-\ln(x+1)+c$
8. $\displaystyle\int \frac{x(x^2+1)+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int x+\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\arctan(x)+c$

Exercice A.3.2
Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Correction

1. $\displaystyle u(x)=1+x,\ u'(x)=1,\ \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\ln|1+x|+c$
2. $\displaystyle u(x)=1-x,\ u'(x)=-1,\ -\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=-\ln|1-x|+c$
3. $\arctan(x)+c$
4. $\displaystyle\frac{1}{1-x^2}=\frac{1/2}{1-x}+\frac{1/2}{1+x},\ \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\ln|1+x|-\ln|1-x|)+c=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+c=\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)+c$
5. $\arcsin(x)+c=-\arccos(x)+c$

Exercice A.3.3 (Par transformations élémentaires ou changement de variable)
Calculer les primitives suivantes en utilisant

$$\int f(\underbrace{u(x)}_{=t})\,\underbrace{u'(x)}_{=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}}\,\mathrm{d}x=\int f(t)\frac{\mathrm{d}t}{\cancel{\mathrm{d}x}}\cancel{\mathrm{d}x}=\int f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque : si $u(x)=Ax+B$ alors $u'(x)=A$ constante et on pourra utiliser la propriété $\int f(\underbrace{u(x)}_{=t})\,\mathrm{d}x=\frac{1}{A}\int f(t)A\,\mathrm{d}t$.

1. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{\ln^3(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln^3(x)}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{1+\cos(x)}{x+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \sin^3(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
14. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$
15. $\displaystyle\int x(x^2+1)^2\,\mathrm{d}x$
16. $\displaystyle\int e^{2x+1}\,\mathrm{d}x$
17. $\displaystyle\int x\sqrt{5+x^2}\,\mathrm{d}x$
18. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
19. $\displaystyle\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$
20. $\displaystyle\int x^2e^{x^3}\,\mathrm{d}x$

21. $\displaystyle\int \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 22. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+3}}\,\mathrm{d}x$ 23. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ 24. $\displaystyle\int \sin(3x)\,\mathrm{d}x$ 25. $\displaystyle\int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$

Correction

1. $u(x)=1+e^x$, $u'(x)=e^x$, $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\ln(1+e^x)+c$
2. $u(x)=1+e^x$, $u'(x)=e^x$, $\int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x=\int 1\,\mathrm{d}x-\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=x-\ln(1+e^x)+c$
3. $u(x)=2x+1$, $u'(x)=2$, $\frac{1}{2}\int \sqrt{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int [u(x)]^{1/2}u'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{[u(x)]^{3/2}}{3}=\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3}+c$
4. $u(x)=\ln(x)$, $u'(x)=1/x$, $\int (u(x))^3u'(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\ln^4(x)}{4}+c$
5. $u(x)=-1/x$, $u'(x)=1/x^2$, $\int e^{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x=e^{-1/x}+c$
6. $u(x)=\ln(x)$, $u'(x)=1/x$, $\int \frac{u'(x)}{(u(x))^3}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2\ln^2(x)}+c$
7. $u(x)=x+\sin(x)$, $u'(x)=1+\cos(x)$, $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\ln|x+\sin(x)|+c$
8. $u(x)=x^2$, $u'(x)=2x$, $\int \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}\,\mathrm{d}x=\arctan(x^2)+c$
9. $u(x)=1+\sin^2(x)$, $u'(x)=2\sin(x)\cos(x)=\sin(2x)$, $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\ln(1+\sin^2(x))+c$
10. $u(x)=\sin(x)$, $u'(x)=\cos(x)$, $\int (u(x))^3u'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\sin^4(x)}{4}+c$
11. $u(x)=\tan(x)$, $u'(x)=1/\cos^2(x)$, $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\ln|\tan(x)|+c$
12. $u(x)=\tan(x)$, $u'(x)=1/\cos^2(x)$, $\int e^{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x=e^{\tan(x)}+c$
13. $u(x)=1-x^2$, $u'(x)=-2x$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x+\int (u(x))^{-1/2}u'(x)\,\mathrm{d}x=\arcsin(x)+2\sqrt{1-x^2}+c$
14. $u(x)=x^2+2x+1$, $u'(x)=2x+2$, $\frac{1}{2}\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+1)+c$
15. $u(x)=x^2+1$, $u'(x)=2x$, $\frac{1}{2}\int (u(x))^2u'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{(x^2+1)^3}{6}+c$
16. $u(x)=2x+1$, $u'(x)=2$, $\frac{1}{2}\int e^{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{u(x)}+c=\frac{e^{2x+1}}{2}+c$
17. $u(x)=5+x^2$, $u'(x)=2x$, $\frac{1}{2}\int (u(x))^{1/2}u'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(5+x^2)^{3/2}+c$
18. $u(x)=\sqrt{x}$, $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $2\int e^{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x=2e^{\sqrt{x}}+c$
19. $u(x)=x^2$, $u'(x)=2x$, $\frac{1}{2}\int e^{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{e^{x^2}}{2}+c$
20. $u(x)=x^3$, $u'(x)=3x^2$, $\frac{1}{3}\int e^{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{e^{x^3}}{3}+c$
21. $u(x)=\sqrt{x}$, $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\frac{1}{2}\int \sin(u(x))\,u'(x)\,\mathrm{d}x=-2\cos\sqrt{x}+c$
22. $u(x)=x^2+3$, $u'(x)=2x$, $\frac{1}{2}\int (u(x))^{-1/3}u'(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+3)^2}+c$
23. $u(x)=1+x^4$, $u'(x)=4x^3$, $\frac{1}{4}\int \dfrac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\frac{\ln(1+x^4)}{4}+c$
24. $u(x)=3x$, $u'(x)=3$, $\frac{1}{3}\int \sin(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\cos(3x)+c$
25. Si on pose $t=\tan(x)$ alors $\mathrm{d}t=\frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$ et on obtient $e^{\tan(x)}+c$ car $\frac{1}{\cos^1(x)}=1+\tan^2(x)=$

Exercice A.3.4 (Par transformations élémentaires ou changement de variable)

Calculer les primitives suivantes en utilisant

$$\int f(\underbrace{u(x)}_{=t})\,\mathrm{d}x=\int f(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t.$$

Pour cela il faut tout d'abord calculer $x=u^{-1}(t)$ puis en calculer la dérivée. Plus généralement, si on a une relation du type $u(x)=h(t)$ alors $u'(x)\,\mathrm{d}x=h'(t)\,\mathrm{d}t$ ce qui permet de remplacer $\mathrm{d}x=\frac{h'(t)}{u'(x)}\,\mathrm{d}t$ avec $x=u^{-1}(h(t))$.

1. $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x$ 2. $\displaystyle\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 3. $\displaystyle\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ 6. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ 7. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}\,\mathrm{d}x$ 8. $\displaystyle\int e^x\ln(1+e^x)\,\mathrm{d}x$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{x(2+\ln^2(x))}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}}\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
14. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$
15. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$
16. $\displaystyle\int x\sqrt{a+x^2}\,\mathrm{d}x$
17. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}\,\mathrm{d}x$
18. $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$
19. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$
20. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$
21. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$
22. $\displaystyle\int \frac{1}{3+x^2}\,\mathrm{d}x$
23. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

Correction

Ici c'est plus difficile de reconnaître $u'(x)$ ainsi on inverse la relation $t=u(x)$ pour obtenir $x=u^{-1}(t)$ avant de calculer les dérivées et trouver la relation entre $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}x$:

1. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln(x)$ alors $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ et on obtient $-\cos(\ln(x))+c$
2. Pour $x>0$, si on pose $t=\sqrt{x}$ alors $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $2(\sqrt{x}+e^{\sqrt{x}})+c$
3. Pour $x>0$, si on pose $t=\sqrt{x}$ alors $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $2\ln(\sqrt{x}-1)+c$
4. Pour $x>0$, si $x>0$. Si on pose $t=\sqrt{x}$ alors $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $4\sqrt{1+\sqrt{x}}+c$
5. Si on pose $t=e^x$ alors $e^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ et on obtient $\ln(1+e^x)+c$
6. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln(x)$ alors $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ et on obtient $\ln|\ln(x)|+c$
7. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x)$ alors $-\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ et on obtient $-2\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}+c$
8. Si on pose $t=1+e^x$ alors $e^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ ainsi $\int e^x\ln(1+e^x)\,\mathrm{d}x=\int\ln(t)\,\mathrm{d}t$. Sans utiliser l'intégration par partie, si on pose $t=e^w$ alors $\mathrm{d}t=e^w\,\mathrm{d}w$ ainsi $\int\ln(t)\,\mathrm{d}t=\int we^w\,\mathrm{d}w=(w-1)e^w$ et on obtient $(1+e^x)\ln(1+e^x)-e^x+c$.
9. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln(x)$ alors $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ et on obtient $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{2}}\right)+c$
10. Si on pose $t^2=1-x^2$ alors $-x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $-\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}+c$
11. Si on pose $t^2=x^3-1$ alors $3x^2\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\frac{2}{9}(x^3+2)\sqrt{x^3-1}+c$
12. Si on pose $t^2=e^x-1$ alors $\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ et on obtient $2\left(\sqrt{e^x-1}-\arctan(\sqrt{e^x-1})\right)+c$
13. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln(x)$ alors $\mathrm{d}x=e^t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\frac{1}{2}\ln^2(x)+c$
14. Si on pose $t=e^x$ alors $\mathrm{d}x=\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\arctan e^x+c$
15. Si on pose $t=\sqrt{1+x^2}$ alors $2x\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\sqrt{1+x^2}+c$
16. Pour $a+x^2\ge 0$, si on pose $t=\sqrt{a+x^2}$ alors $2x\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\frac{1}{3}\sqrt{(a+x^2)^3}+c$
17. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln(x)$ alors $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ et on obtient $\arcsin(\ln(x))+c$
18. Si on pose $t=\frac{1}{x}$ alors $-\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ et on obtient $-e^{1/x}+c$
19. Si on pose $t=1+\sin(x)$ alors $\cos(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ et on obtient $\ln|1+\sin(x)|+c$
20. Si on pose $t=\frac{1}{x}$ alors $-\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ et on obtient $-\sin\left(\frac{1}{x}\right)+c$
21. Si on pose $t^2=1+x^2$ alors $x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{x^2+1}+c$
22. $\int\frac{1}{3+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x$. Si on pose $t=x/\sqrt{3}$ alors $\mathrm{d}x=\sqrt{3}t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan(x/\sqrt{3})+c$
23. Si on pose $t=x^2$ alors $2\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ et on obtient $\frac{1}{2}\arctan(x^2)+c$

Exercice A.3.5

Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{\cos^2(x)}{1-\sin(x)}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)\sin(x)}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$

Correction

1. $\cos^2(x)=1-\sin^2(x)=(1-\sin(x))(1+\sin(x))$, $\int\frac{(1-\sin(x))(1+\sin(x))}{1-\sin(x)}\,\mathrm{d}x=x-\cos(x)+c$

2. $1=\cos^2(x)+\sin^2(x)$, $u(x)=\sin(x)-\cos(x)$, $u'(x)=\sin(x)+\cos(x)$, $\int \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\,\mathrm{d}x=\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\ln(\sin(x)-\cos(x))+c$
3. $1=\cos^2(x)+\sin^2(x)$, $\int \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x+\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x=\tan(x)-\dfrac{1}{\tan(x)}+c$
4. $1=\cos^2(x)+\sin^2(x)$, $\int \frac{1}{\cos(x)\sin(x)}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos(x)\sin(x)}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}+\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos(x)|+\ln|\sin(x)|+c$
5. $\sin(x)=2\sin(x/2)\cos(x/2)$, $u(x)=x/2$, $u'(x)=1/2$, $\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\cos(u(x))\sin(u(x))}u'(x)\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos(x/2)|+\ln|\sin(x/2)|+c=\ln|\tan(x/2)|+c$.
6. $\cos(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $u(x)=\frac{\pi}{2}-x$, $u'(x)=-1$, $\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x=-\int \frac{1}{\sin\left(u(x)\right)}u'(x)\,\mathrm{d}x=\ln|\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})|-\ln|\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})|+c=\ln(\sin(x)-\cos(x))+c$

Exercice A.3.6 (Intégration par parties)

Calculer les primitives suivantes en utilisant $\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$:

1. $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int x^2e^x\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int x\ln(x)\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}e^{\tan(x)}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int x^3\ln(x)\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \ln^2(x)\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int x^3\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$

Correction

1. On pose $f(x)=\ln(x)$ et $g'(x)=\frac{1}{x^2}$. Alors $f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=-\frac{1}{x}$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1+\ln(x)}{x}+c$
2. On pose $f(x)=\ln(1+x)$ et $g'(x)=1$. Alors $f'(x)=\frac{1}{1+x}$ et $g(x)=x$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=(1+x)\ln(1+x)-x+c$
3. On pose $f(x)=x^2$ et $g'(x)=e^x$. Alors $f'(x)=2x$ et $g(x)=e^x$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=x^2e^x-2\int xe^x\,\mathrm{d}x$. On intègre encore par partie et on obtient$=e^x((x-2)x+2)+c$
4. On pose $f(x)=\ln(x)$ et $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Alors $f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=2\sqrt{x}$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=2\sqrt{x}(\ln(x)-2)+c$
5. On pose $f(x)=x$ et $g'(x)=\sin(x)$. Alors $f'(x)=1$ et $g(x)=-\cos(x)$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=-x\cos(x)+\sin(x)+c$
6. On pose $f(x)=x^2$ et $g'(x)=\cos(x)$. Alors $f'(x)=2x$ et $g(x)=\sin(x)$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=x^2\sin(x)-2[-x\cos(x)+\sin(x)]+c$
7. On pose $f(x)=\ln(x)$ et $g'(x)=x$. Alors $f'(x)=1/x$ et $g(x)=x^2/2$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{1}{4}x^2+c$
8. On pose $f(x)={}^{\sin(x)}/_{\cos(x)}$ et $g'(x)={}^{e^{\tan(x)}}/_{\cos^2(x)}$. Alors $f'(x)={}^{1}/_{cos^2(x)}$ et $g(x)=e^{\tan(x)}$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=e^{\tan(x)}(\tan(x)-1)+c$
9. On pose $f(x)=\ln(x)$ et $g'(x)=x^3$. Alors $f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=\frac{x^4}{4}$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{16}x^4(4\ln(x)-1)+c$
10. On pose $f(x)=\ln(x)$ et $g'(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$. Alors $f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=\frac{4x^{3/4}}{3}$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3}x^{3/4}\left(\ln(x)-\frac{4}{3}\right)+c$
11. On pose $f(x)=\ln(x)$ et $g'(x)=\ln(x)$. Alors $f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=x\ln(x)-x$. On obtient $f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=x(\ln^2(x)-2\ln(x)+2)+c$
12. On pose d'abord $t=x^2$ ainsi $\mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x$. Alors $\int x^3\sin(x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x^2\sin(x^2)2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int t\sin(t)\,\mathrm{d}t$. On pose $f(t)=t$ et $g'(t)=\sin(t)$. Alors $f'(t)=1$ et $g(t)=-\cos(t)$. On obtient $f(t)g(t)-\int f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{-t\cos(t)+\sin(t)}{2}+c=\dfrac{-x^2\cos(x^2)+\sin(x^2)}{2}+c$

Exercice A.3.7

Calculer la primitive suivante en utilisant un changement de variable. Comparer ensuite au résultat obtenu en utilisant l'intégration par parties :

$$\int \frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Correction

CV Si on pose $t=\arcsin(x)$ alors $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\,\mathrm{d}t$ et $x=\sin(t)$ et on obtient

$$\int \frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int t\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

On a calculé cette intégrale à l'exercice A.3.6(5.) :

$$\int t\sin(t)\,\mathrm{d}t=-t\cos(t)+\sin(t)+c=-\arcsin(x)\cos(\arcsin(x))+x+c$$

IPP

$$\int \frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \quad \underset{\substack{f(x)=\arcsin(x) \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ g(x)=-\sqrt{1-x^2} \;\Leftarrow\; g'(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}}{=} \quad =-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin(x)+x+c$$

Les deux calculs donnent le même résultat car $\cos(\arcsin(x))=\pm\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}=\pm\sqrt{1-x^2}$

Exercice A.3.8 (Formules de réduction)

Les formules de réduction dérivent de l'application répétée de la règle d'intégration par parties.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in\mathbb{R}^*$, montrer que
$$\int x^n e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x=\left(x^n-\frac{n}{\alpha}x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{\alpha^2}x^{n-2}\cdots+(-1)^n\frac{n!}{\alpha^n}\right)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}+c$$
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que
$$\int \sin^n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{-\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n}+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que
$$\int x^n\sin(x)\,\mathrm{d}x=-x^n\cos(x)+nx^{n-1}\sin(x)-n(n-1)\int x^{n-2}\sin(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int x^n\cos(x)\,\mathrm{d}x=x^n\sin(x)+nx^{n-1}\cos(x)-n(n-1)\int x^{n-2}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$
4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha\neq-1$ et $x>0$. Montrer que
$$\int x^\alpha\ln^n(x)\,\mathrm{d}x=\left(\ln^n(x)-\frac{n}{\alpha+1}\ln^{n-1}(x)+\frac{n(n-1)}{(\alpha+1)^2}\ln^{n-2}(x)\cdots+(-1)^n\frac{n!}{(\alpha+1)^n}\right)\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c.$$

Correction

1. On pose $I_n=\int x^n e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$. En intégrant par parties ($f(x)=x^n$ et $g'(x)=e^{\alpha x}$) on trouve
$$I_n=x^n\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}-\frac{n}{\alpha}I_{n-1}=x^n\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}-\frac{n}{\alpha}\left(x^{n-1}\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}-\frac{n-1}{\alpha}I_{n-2}\right)=\cdots=\left(x^n-\frac{n}{\alpha}x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{\alpha^2}x^{n-2}\cdots+(-1)^n\frac{n!}{\alpha^n}\right)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}+c$$
2. On pose $I_n=\int\sin^n(x)\,\mathrm{d}x$. En intégrant par parties ($f(x)=\sin^{n-1}(x)$ et $g'(x)=\sin(x)$) on trouve
$$I_n=-\sin^{n-1}(x)\cos(x)+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n=\frac{-\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$
De la même manière, on pose $I_n=\int\cos^n(x)\,\mathrm{d}x$. En intégrant par parties ($f(x)=\cos^{n-1}(x)$ et $g'(x)=\cos(x)$) on trouve
$$I_n=\frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

3. On pose $I_n = \int x^n \sin(x)\,dx$ et $J_n = \int x^n \cos(x)\,dx$. En intégrant par parties ($f(x) = x^n$ et $g'(x) = \sin(x)$ dans la première intégrale et $f(x) = x^n$ et $g'(x) = \cos(x)$ dans la deuxième intégrale) on trouve

$$I_n = -x^n \cos(x) + nJ_{n-1} \qquad J_n = x^n \sin(x) - nI_{n-1}$$

Par conséquence

$$\begin{aligned} I_n &= -x^n \cos(x) + n\left(x^{n-1}\sin(x) - (n-1)I_{n-2}\right) = -x^n\cos(x) + nx^{n-1}\sin(x) - n(n-1)I_{n-2} \\ J_n &= x^n \sin(x) - n\left(-x^{n-1}\cos(x) + (n-1)J_{n-2}\right) = x^n \sin(x) + nx^{n-1}\cos(x) - n(n-1)J_{n-2} \end{aligned}$$

4. On pose $I_n = \int x^\alpha \ln^n(x)\,dx$. En intégrant par parties ($f(x) = \ln^n(x)$ et $g'(x) = x^\alpha$) on trouve

$$I_n = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^n(x) - \frac{n}{\alpha+1}I_{n-1} = \cdots = \left(\ln^n(x) - \frac{n}{\alpha+1}\ln^{n-1}(x) + \frac{n(n-1)}{(\alpha+1)^2}\ln^{n-2}(x)\cdots + (-1)^n\frac{n!}{(\alpha+1)^n}\right)\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

Exercice A.3.9 (cf. P. Halmos)

Si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables quelconques, on sait que **la dérivée du produit n'est pas le produit des dérivées**, autrement dit $(fg)' \neq f'g'$. Cependant, il existe des fonctions f et g pour lesquelles on a bien $(fg)' = f'g'$, par exemple si f et g sont toutes deux égales à une constante (pas nécessairement la même). Pouvez-vous en trouver d'autres ?

Correction

- Si $f(x) = k_1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $g(x) = k_2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $(fg)'(x) = (k_1k_2)' = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x)g'(x) = 0 \times 0 = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Si $g = f$, on cherche f telle que $(f^2)' = (f')^2$, c'est-à-dire $2f(x)f'(x) = (f'(x))^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, soit $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on trouve à nouveau $f(x) = g(x) = k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $2f(x) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on trouve $f(x) = g(x) = ke^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Dire que $(fg)' = f'g'$ revient à dire que $f'g + fg' = f'g'$. En divisant par le produit fg (il est inutile à ce stade de se préoccuper de la possibilité de diviser par 0, nous cherchons seulement formellement des conditions nécessaires) on a

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}$$

c'est-à-dire $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\frac{g'(x)}{g(x)}}{1-\frac{g'(x)}{g(x)}}$, soit encore

$$[\ln(f(x))]' = \frac{g'(x)}{g'(x)-g(x)}.$$

Si on choisit g, il suffit de poser $f = e^G$ où G est une primitive de $\frac{g'(x)}{g'(x)-g(x)}$.

Voyons quelques exemples :

  - si on pose $g(x) = x$ alors $G(x) = \int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x)$ et $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Vérifions si on a bien $(fg)' = f'g'$:

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \\ f'(x)g'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

  - si on pose $g(x) = x^a$ alors $G(x) = \int \frac{ax^{a-1}}{ax^{a-1}-x^a}\,dx = \int \frac{ax^{a-1}}{ax^{a-1}-x^a}\,dx = -a\ln(a-x)$ et $f(x) = \frac{1}{(a-x)^a}$. Vérifions si on a bien $(fg)' = f'g'$:

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \left(\frac{x^a}{(a-x)^a}\right)' = a^2x^{a-1}(a-x)^{-a-1} \\ f'(x)g'(x) &= a(a-x)^{-a-1}\cdot ax^{a-1} = a^2x^{a-1}(a-x)^{-a-1} \end{aligned}$$

  - si on pose $g(x) = e^{ax}$ alors $G(x) = \int \frac{ae^{ax}}{ae^{ax}-e^{ax}}\,dx = \frac{a}{a-1}x$ et $f(x) = e^{bx}$ où $b = a/(a-1)$. Vérifions si on a bien $(fg)' = f'g'$:

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= (e^{bx}e^{ax})' = (e^{(a+b)x})' = (a+b)e^{(a+b)x} \\ f'(x)g'(x) &= be^{bx}ae^{ax} = (ab)e^{(a+b)x} = (a+b)e^{(a+b)x} \end{aligned}$$