DM13
Polynômes et fractions

1) Prendre en note la vidéo de soutien sur les polynômes et factoriser les deux derniers polynômes

2) Soit f, la fraction définie par : $f(x) = \frac{5.x^2+1}{x^3-2x^2-5x+} = \frac{A(x)}{B(x)}$

a) Factoriser le dénominateur de f : B
b) Expliquer pourquoi f est irréductible (s'aider du TP 6 si besoin est)
c) Ecrire la forme de la décomposition en sommes de trois éléments simples de f (s'aider du TP 6 si besoin est
d) Calculer les coefficients de la décomposition : a, b, c.
e) En déduire la décomposition en somme d'éléments simples de f, puis ses primitives

3) A l'aide du tableau de la transformation de Laplace, déterminer :

$$\mathcal{L}\left[x^3-5x+1\right] \quad ; \quad \mathcal{L}\left[\sin(3t)\cdot U(t)\right] \quad ; \quad \mathcal{L}\left[e^{-2t}\cdot \cos(5t)\cdot U(t)\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+7)^5}\right] \quad ; \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+1}{p^2+2p+5}\right] \quad ; \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+8}\right]$$

4) Résoudre, à l'aide de la transformation de Laplace l'équation différentielle suivante :

$$y''(t)+2y'(t)+y(t)=4e^{3t} \quad \text{avec} \quad y(0)=0 \quad \text{et} \quad y'(0)=1$$

1) Prendre en note la vidéo de soutien sur les polynômes et factoriser les deux derniers polynômes

$P(x) = x^5 - 4x^4 - 38x^3 + 44x^2 + 37x - 40$

$P(1) = 0$ $\quad$ $P(-1) = 0$

$P'(1) = 0$

$P''(1) \neq 0$

donc P est divisible par $(x-1)^2(x+1)$

$(x^2 - 2x + 1)(x+1)$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & -4x^4 & -38x^3 & +44x^2 & +37x & -40 & x^3 - x^2 - x + 1 \\
\cline{7-7}
-(x^5 & -x^4 & -x^3 & +x^2) & & & x^2 - 3x - 40 \\
\hline
0 & -3x^4 & -37x^3 & +43x^2 & +37x & -40 & \\
-(& -3x^4 & +3x^3 & +3x^2 & -3x) & & \\
\hline
 & 0 & -40x^3 & +40x^2 & +40x & -40 & \\
 & -(& -40x^3 & +40x^2 & +40x & -40) & \\
\hline
 & & & & 0 & &
\end{array}
$$

1) Prendre en note la vidéo de soutien sur les polynômes et factoriser les deux derniers polynômes

$x^2 - 3x - 40$

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times -40 = 169 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{3 - \sqrt{169}}{2} = -5$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} = 8$

donc $P(x) = (x-1)^2(x+1)(x+5)(x-8)$

est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

1) Prendre en note la vidéo de soutien sur les polynômes et factoriser les deux derniers polynômes

(2) $x^5+x^3-x^2-1$

3 Racines : 1 ; i ; $-i$.

$x^2 \ (x-1)(x-i)(x+i)$

$=(x-1)(x^2+1^2)$

$=x^3+x-x^2-1$

$=x^3-x^2+x-1$

$$\begin{array}{l|l}
x^5+x^3-x^2-1 & x^3-x^2+x-1 \\
\hline
-(x^5+x^3-x^4-x^2) & x^2+x+1 \\
\quad x^4-1 & \\
-(x^4+x^2-x^3-x) & \\
\quad -x^2+x^3+x-1 & \\
-(x^3-x^2+x-1) & \\
\quad 0 &
\end{array}$$

1) Prendre en note la vidéo de soutien sur les polynômes et factoriser les deux derniers polynômes

Donc $P(x)$ est factorisable par 8

$(x-1)(x+i)(x-i)(x^2+x+1)$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1^2 - 4\times1\times1$

$\Delta = -3$.

$x_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$x_2 = \overline{x_1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Soit $P(x) = (x-1)(x+i)(x-i)(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$ dans $\mathbb{C}$

$P(x) = (x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)$ dans $\mathbb{R}$

2) Soit f, la fraction définie par : $f(x) = \frac{5.x^2+1}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{A(x)}{B(x)}$

a) Factoriser le dénominateur de f : B
b) Expliquer pourquoi f est irréductible (s'aider du TP 6 si besoin est)
c) Ecrire la forme de la décomposition en sommes de trois éléments simples de f (s'aider du TP 6 si besoin est)
d) Calculer les coefficients de la décomposition : a, b, c.
e) En déduire la décomposition en somme d'éléments simples de f, puis ses primitives

2) $f(x) = \frac{5x^2+1}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{A(x)}{B(x)}$

a) $B(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

$(x-1)(x+2)$

$x^2 + x - 2$

$B(1) = 0$ $\quad B(-2) = 0$

$B'(1) \neq 0$ $\quad B'(-2) \neq 0$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & x^2 + x - 2 \\
\hline
-(x^3 + x^2 - 2x) & x - 3 \\
0 - 3x^2 - 3x + 6 & \\
-(-3x^2 - 3x + 6) & \\
0 &
\end{array}
$$

$B(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$
dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

2) Soit f, la fraction définie par : $f(x) = \frac{5.x^2+1}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{A(x)}{B(x)}$

a) Factoriser le dénominateur de f : B
b) Expliquer pourquoi f est irréductible (s'aider du TP 6 si besoin est)
c) Ecrire la forme de la décomposition en sommes de trois éléments simples de f (s'aider du TP 6 si besoin est)
d) Calculer les coefficients de la décomposition : a, b, c.
e) En déduire la décomposition en somme d'éléments simples de f, puis ses primitives

b) f est irréductible car il n'y a pas de facteur commun entre A(x) et B(x).

c) $f(x) = \frac{5x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-3}$

d) $a = \Big[(x-1)f(x)\Big]_{x=1}$

$= \left[\frac{5x^2+1}{(x+2)(x-3)}\right]_{x=1}$

$a = \frac{5+1}{3 \cdot -2} = \frac{6}{-6} = -1$

2) Soit f, la fraction définie par : $f(x) = \frac{5.x^2+1}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{A(x)}{B(x)}$

a) Factoriser le dénominateur de f : B

b) Expliquer pourquoi f est irréductible (s'aider du TP 6 si besoin est)

c) Ecrire la forme de la décomposition en sommes de trois éléments simples de f (s'aider du TP 6 si besoin est)

d) Calculer les coefficients de la décomposition : a, b, c.

e) En déduire la décomposition en somme d'éléments simples de f, puis ses primitives

$$b = \left[(x+2) f(x)\right]_{x=-2}$$

$$b = \frac{5 \times (-2)^2 + 1}{(-2-1)(-2-3)} = \frac{21}{(-3)(-5)} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}$$

$$c = \left[(x-3) f(x)\right]_{x=3}$$

$$c = \frac{5 \times 3^2 + 1}{(3-1)(3+2)} = \frac{46}{2 \times 5} = \frac{46}{10} = \frac{23}{5}$$

donc

e) $$f(x) = -\frac{1}{(x-1)} + \frac{7}{5(x+2)} + \frac{23}{5(x-3)}$$

2) Soit f, la fraction définie par : $f(x) = \frac{5.x^2+1}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{A(x)}{B(x)}$

a) Factoriser le dénominateur de f : B
b) Expliquer pourquoi f est irréductible (s'aider du TP 6 si besoin est)
c) Ecrire la forme de la décomposition en sommes de trois éléments simples de f (s'aider du TP 6 si besoin est)
d) Calculer les coefficients de la décomposition : a, b, c.
e) En déduire la décomposition en somme d'éléments simples de f, puis ses primitives

$$F(x) = -\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{7}{5}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{23}{5}\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$F(x) = -\left[\ln|x-1|\right] + \frac{7}{5}\left[\ln|x+2|\right] + \frac{23}{5}\left[\ln|x-3|\right]$$

$$F(x) = -\ln|x-1| + \frac{7}{5}\ln|x+2| + \frac{23}{5}\ln|x-3| + cte$$

3) A l'aide du tableau de la transformation de Laplace, déterminer :

$\mathcal{L}[x^3-5x+1]$; $\mathcal{L}[\sin(3t)\cdot U(t)]$; $\mathcal{L}[e^{-2t}\cdot \cos(5t)\cdot U(t)]$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+7)^5}\right]$; $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+1}{p^2+2p+5}\right]$; $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+8}\right]$

3) $\mathcal{L}[x^3-5x+1] = \mathcal{L}[x^3]-5\mathcal{L}[x]+\mathcal{L}[1]$

$$\mathcal{L}[x^3-5x+1] = \frac{3!}{p^4} - \frac{5}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$\mathcal{L}[\sin(3t).U(t)] = \frac{3}{p^2+9}$$

$$\mathcal{L}[e^{-2t}.\cos(5t).U(t)] = \frac{p+2}{(p+2)^2+5^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+7)^5}\right] = \frac{1}{4!}\left(e^{-7t}.\cancel{x}\,t^4\right).U(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}\right] = e^{-at}.t^n.U(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+1}{\underset{(p+1)^2+4}{p^2+2p+5}}\right] = \cos(2t).e^{-t}.U(t)$$

3) A l'aide du tableau de la transformation de Laplace, déterminer :

$\mathcal{L}[x^3-5x+1]$; $\mathcal{L}[\sin(3t).U(t)]$; $\mathcal{L}[e^{-2t}.\cos(5t).U(t)]$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+7)^5}\right]$; $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+1}{p^2+2p+5}\right]$; $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+8}\right]$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1\times 2\sqrt{2}}{p^2+\underbrace{8}}\right]=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(2\sqrt{2}\,t).U(t).$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{p^2+\underbrace{\omega^2}}\right]=\sin(\omega t).U(t) \qquad \text{ici} \quad \omega^2=8 \Leftarrow \omega=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

1) Prendre en note la vidéo de soutien sur les polynômes et factoriser les deux derniers polynômes

2) Soit f, la fraction définie par : $f(x) = \frac{5.x^2+1}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{A(x)}{B(x)}$

a) Factoriser le dénominateur de f : B
b) Expliquer pourquoi f est irréductible (s'aider du TP 6 si besoin est)
c) Ecrire la forme de la décomposition en sommes de trois éléments simples de f (s'aider du TP 6 si besoin est
d) Calculer les coefficients de la décomposition : a, b, c.
e) En déduire la décomposition en somme d'éléments simples de f, puis ses primitives

3) A l'aide du tableau de la transformation de Laplace, déterminer :

$\mathcal{L}[x^3-5x+1]$; $\mathcal{L}[\sin(3t).U(t)]$; $\mathcal{L}[e^{-2t}.\cos(5t).U(t)]$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+7)^5}\right]$; $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+1}{p^2+2p+5}\right]$; $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+8}\right]$

4) Résoudre, à l'aide de la transformation de Laplace l'équation différentielle suivante :

$y''(t)+2y'(t)+y(t)=4e^{3t}$ avec $y(0)=0$ et $y'(0)=1$