DM13
Polynômes et fractions

1) Résoudre les exercices suivants du chapitre 5 page 29 : Ex1 – 3.f) ; Ex2, Ex4, Ex6
(Ex5 à faire par les étudiants souhaitant poursuivre leurs études après le BUT

1. Ex1 3) f)

x^4+3x^2+2

On pose $X=x^2$

X^2+3X+2 $\qquad \Delta = b^2-4ac = 1$

$X_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad X_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$X_1 = -2$ $\qquad X_2 = -1$

$X^2+3X+2 = (X+2)(X+1)$

$x_1^2 = -2$ $\qquad x_2^2 = -1$

x_1 $-j\sqrt{2}$ ou $j\sqrt{2}$ $\qquad x_2 = -j$ ou j

$P(x) = (x+j\sqrt{2})(x-j\sqrt{2})(x+j)(x-j)$ est factorisé dans $\mathbb{C}$ $j\sqrt{2}$, $-j\sqrt{2}$, j et $-j$ sont les racines simples de P Dans $\mathbb{R}$: $P(x) = (x^2+2)(x^2+1)$

1) Résoudre les exercices suivants du chapitre 5 page 29 : Ex1 – 3.f) ; Ex2, Ex4, Ex6
(Ex5 à faire par les étudiants souhaitant poursuivre leurs études après le BUT

Ex2

1)
$$\begin{array}{r|l}
A = 2x^3-2x^2+x+1 & x-2 = B \\
\hline
-(2x^3-4x^2) & 2x^2+2x+5 = Q \\
2x^2+x+1 & \\
-(2x^2-4x) & \\
5x+1 & \\
-(5-10) & \\
11 = R &
\end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r|l}
x^3+x+1 & x^2+1 \\
\hline
-(x^3+x) & x \\
1 &
\end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r|l}
x^3+2x^2-3x+5 & x+5 \\
\hline
-(x^3+5x^2) & x^2-3x+12 \\
-3x^2-3x+5 & \\
-(-3x^2-15x) & \\
12x+5 & \\
-(12x+60) & \\
-55 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
3x^5+9x^4-20x^3-13x^2+37x+10 & x^2+3x-5 \\
\hline
-(3x^3+9x^4-15x^3) & 3x^3-5x+2 \\
-5x^3-13x^2+37x+10 & \\
-(-5x^3-15x^2+25x) & \\
2x^2+6x+10 & \\
-(2x^2+6x-10) & \\
20 &
\end{array}$$

Vérif : $BQ+R = A$

1) Résoudre les exercices suivants du chapitre 5 page 29 : Ex1 – 3.f) ; Ex2, Ex4, Ex6
(Ex5 à faire par les étudiants souhaitant poursuivre leurs études après le BUT

Exercice 4

$P(x) = x^4 - 3x^3 - 17x^2 + 39x - 20$

$P(1) = 1 - 3 - 17 + 39 - 20 = 0$

$P'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 34x + 39$

$P'(1) = 4 - 9 - 34 + 39 = 0$

$P''(x) = 12x^2 - 18x - 34$

$P''(1) \neq 0$

1 est donc une racine double de P $\quad (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

1) Résoudre les exercices suivants du chapitre 5 page 29 : Ex1 – 3.f) ; Ex2, Ex4, Ex6
(Ex5 à faire par les étudiants souhaitant poursuivre leurs études après le BUT

Division euclidienne

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-3x^3-17x^2+39x-20 & x^2-2x+1 = (x-1)^2 \\
\hline
-x^4+2x^3-x^2 & x^2-x-20 \\
\hline
-x^3-18x^2+39x-20 & \\
+x^3-2x^2+x & \\
\hline
-20x^2+40x-20 & \\
+20x^2-40x+20 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

x^2-x-20

$\Delta = b^2-4ac = 1+80 = 81 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = -4$ $\qquad x_2 = 5$

$P(x) = (x-1)^2\underbrace{(x+4)(x-5)} = \cancel{(x-1)(x-1)(x+4)(x-5)}$

est factorisé dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ 1 est racine double de P, -4 et +5 sont racines simples de P.

1) Résoudre les exercices suivants du chapitre 5 page 29 : Ex1 – 3.f) ; Ex2, Ex4, Ex6
(Ex5 à faire par les étudiants souhaitant poursuivre leurs études après le BUT

exercice 6

* $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8$

$P(1) = 0$; $P(-2) = 0$ donc $P(x)$ est factorisable par "$(x-1)(x+2)$"

$(x-1)(x+2) = x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2$

$$\begin{array}{l|l} x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8 & x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) \\ \hline -(x^4 + x^3 - 2x^2) & x^2 + 4 \\ \hline 4x^2 + 4x - 8 & \\ -(4x^2 + 4x - 8) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc dans $\mathbb{R}$: $P(x) = (x^2+4)(x-1)(x+2)$

dans $\mathbb{C}$: $P(x) = (x-2j)(x+2j)(x-1)(x+2)$

2. $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$P(-1) = 0$

$p'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$. $p'(1) \neq 0$

-1 est racine simple de p, qui est divisible par $x+1$

$$
\begin{array}{r|l}
x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 & x+1 \\
\hline
-(x^5 + x^4) \qquad\qquad\qquad & x^4 + x^2 + 1 \\
\hline
x^3 + x^2 + x + 1 & \\
-(x^3 + x^2) \qquad & \\
\hline
x + 1 & \\
-(x+1) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$P(x) = (x+1)\underbrace{(x^4 + x^2 + 1)}$

On pose $X = x^2$ et on résout $X^2 + X + 1$

$P(x) = (x+1)\underbrace{(x^4+x^2+1)}$

On pose $X = x^2$ et on résout $X^2 + X + 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = -3 < 0$

$X_1 = \dfrac{-b - j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ $\qquad X_2 = \dfrac{-b + j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

$X_1 = \dfrac{-1 - j\sqrt{3}}{2}$ $\qquad X_2 = \dfrac{-1 + j\sqrt{3}}{2}$

Passage en exponentielle.

$X_1 = e^{-2j\pi/3} = x_1^2$ $\qquad X_2 = e^{2j\pi/3} = x_2^2$

On résout $x_1^2 = e^{-2j\pi/3}$ et $x_2^2 = e^{2j\pi/3}$

$x_1 = \pm e^{-j\pi/3}$ et $x_2 = \pm e^{j\pi/3}$

La factorisation de P dans $\mathbb{C}$ est donc :

$p(x) = (x+1)(x - e^{j\pi/3})(x + e^{j\pi/3})(x - e^{-j\pi/3})(x + e^{-j\pi/3})$

La factorisation de P dans $\mathbb{C}$ est donc :

$$p(x) = (x+1)\left(x - e^{j\pi/3}\right)\left(x + e^{j\pi/3}\right)\left(x - e^{-j\pi/3}\right)\left(x + e^{-j\pi/3}\right)$$

La factorisation de P dans IR est donc :

$$p(x) = (x+1)\left(x^2 - x + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right)$$

$$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2 .$$

$\alpha = e^{j\pi/3}$ $\qquad \mathrm{Re}\left(e^{j\pi/3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\qquad |\alpha|^2 = 1$

2) Soit f, la fraction définie par : $f(x) = \frac{5.x^2+1}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{A(x)}{B(x)}$

a) Factoriser le dénominateur de f : B
b) Expliquer pourquoi f est irréductible (s'aider du TP 6 si besoin est)
c) Ecrire la forme de la décomposition en sommes de trois éléments simples de f (s'aider du TP 6 si besoin est)
d) Calculer les coefficients de la décomposition : a, b, c.
e) En déduire la décomposition en somme d'éléments simples de f, puis ses primitives

2) $f(x) = \frac{5x^2+1}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{A(x)}{B(x)}$

a) $B(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ $\qquad (x-1)(x+2)$

x^2+2x-2

$B(1) = 0 \qquad B(-2) = 0$

$B'(1) \neq 0 \qquad B'(-2) \neq 0$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2} -(x^3 + x^2 - 2x) & x - 3 \\ \hline 0 \quad - 3x^2 - 3x + 6 & \\ -(-3x^2 - 3x + 6) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$B(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$
dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

2) Soit f, la fraction définie par : $f(x) = \frac{5.x^2+1}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{A(x)}{B(x)}$

a) Factoriser le dénominateur de f : B
b) Expliquer pourquoi f est irréductible (s'aider du TP 6 si besoin est)
c) Ecrire la forme de la décomposition en sommes de trois éléments simples de f (s'aider du TP 6 si besoin est)
d) Calculer les coefficients de la décomposition : a, b, c.
e) En déduire la décomposition en somme d'éléments simples de f, puis ses primitives

b) f est irréductible car il n'y a pas de facteur commun entre A(x) et B(x).

c) $f(x) = \frac{5x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-3}$

d) $a = \left[(x-1)f(x)\right]_{x=1}$

$= \left[\frac{5x^2+1}{(x+2)(x-3)}\right]_{x=1}$

$a = \frac{5+1}{3 \cdot -2} = \frac{6}{-6} = -1$

2) Soit f, la fraction définie par : $f(x) = \frac{5.x^2+1}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{A(x)}{B(x)}$

a) Factoriser le dénominateur de f : B
b) Expliquer pourquoi f est irréductible (s'aider du TP 6 si besoin est)
c) Ecrire la forme de la décomposition en sommes de trois éléments simples de f (s'aider du TP 6 si besoin est)
d) Calculer les coefficients de la décomposition : a, b, c.
e) En déduire la décomposition en somme d'éléments simples de f, puis ses primitives

$$b = \left[(x+2) f(x)\right]_{x=-2}$$

$$b = \frac{5\times(-2)^2+1}{(-2-1)(-2-3)} = \frac{21}{(-3)(-5)} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}$$

$$c = \left[(x-3) f(x)\right]_{x=3}$$

$$c = \frac{5\times 3^2+1}{(3-1)(3+2)} = \frac{46}{2\times 5} = \frac{46}{10} = \frac{23}{5}$$

donc

e) $$f(x) = -\frac{1}{(x-1)} + \frac{7}{5(x+2)} + \frac{23}{5(x-3)}$$

2) Soit f, la fraction définie par : $f(x) = \frac{5.x^2+1}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{A(x)}{B(x)}$

a) Factoriser le dénominateur de f : B
b) Expliquer pourquoi f est irréductible (s'aider du TP 6 si besoin est)
c) Ecrire la forme de la décomposition en sommes de trois éléments simples de f (s'aider du TP 6 si besoin est)
d) Calculer les coefficients de la décomposition : a, b, c.
e) En déduire la décomposition en somme d'éléments simples de f, puis ses primitives

$$F(x) = -\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{7}{5}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{23}{5}\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$F(x) = -\left[\ln|x-1|\right] + \frac{7}{5}\left[\ln|x+2|\right] + \frac{23}{5}\left[\ln|x-3|\right]$$

$$F(x) = -\ln|x-1| + \frac{7}{5}\ln|x+2| + \frac{23}{5}\ln|x-3| + cte$$

3) Prendre en notes la vidéo de soutien sur les polynômes, et résoudre les deux polynômes à la fin.

$P(x) = x^5 - 4x^4 - 38x^3 + 44x^2 + 37x - 40$

$P(1) = 0 \qquad P(-1) = 0$

$P'(1) = 0$

$P''(1) \neq 0$

donc P est divisible par $(x-1)^2(x+1)$

$(x^2 - 2x + 1)(x+1)$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - 4x^4 - 38x^3 + 44x^2 + 37x - 40 & x^3 - x^2 - x + 1 \\
\hline
-(x^5 - x^4 - x^3 + x^2) & x^2 - 3x - 40 \\
0 - 3x^4 - 37x^3 + 43x^2 + 37x - 40 & \\
-(-3x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 3x) & \\
0 - 40x^3 + 40x^2 + 40x - 40 & \\
-(-40x^3 + 40x^2 + 40x - 40) & \\
0 &
\end{array}
$$

1) Prendre en note la vidéo de soutien sur les polynômes et factoriser les deux derniers polynômes

$x^2 - 3x - 40$

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times -40 = 169 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{3-\sqrt{169}}{2} = -5$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} = 8$

donc $p(x) = (x-1)^2(x+1)(x+5)(x-8)$

est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

1) Prendre en note la vidéo de soutien sur les polynômes et factoriser les deux derniers polynômes

② $x^5 + x^3 - x^2 - 1$

3 Racines : 1 ; i ; $-i$.

soit $(x-1)(x-i)(x+i)$
$= (x-1)(x^2+1^2)$
$= x^3 + x - x^2 - 1$
$= x^3 - x^2 + x - 1$

$x^5 + x^3 - x^2 - 1$	$x^3 - x^2 + x - 1$
$-(x^5 + x^3 - x^4 - x^2)$	$x^2 + x + 1$
$x^4 - 1$	
$-(x^4 + x^2 - x^3 - x)$	
$-x^2 + x^3 + x - 1$	
$-(x^3 - x^2 + x - 1)$	
0	

1) Prendre en note la vidéo de soutien sur les polynômes et factoriser les deux derniers polynômes

Donc $P(x)$ est factorisable par

$(x-1)(x+i)(x-i)(x^2+x+1)$

$\Delta = b^2 - 4ac$ $\quad x_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\Delta = 1^2 - 4\times1\times1$

$\Delta = -3$.

$x_2 = \overline{x_1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Soit $P(x) = (x-1)(x+i)(x-i)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ dans $\mathbb{C}$

La factorisation de P dans $\mathbb{R}$ est donc :

$P(x) = (x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)$