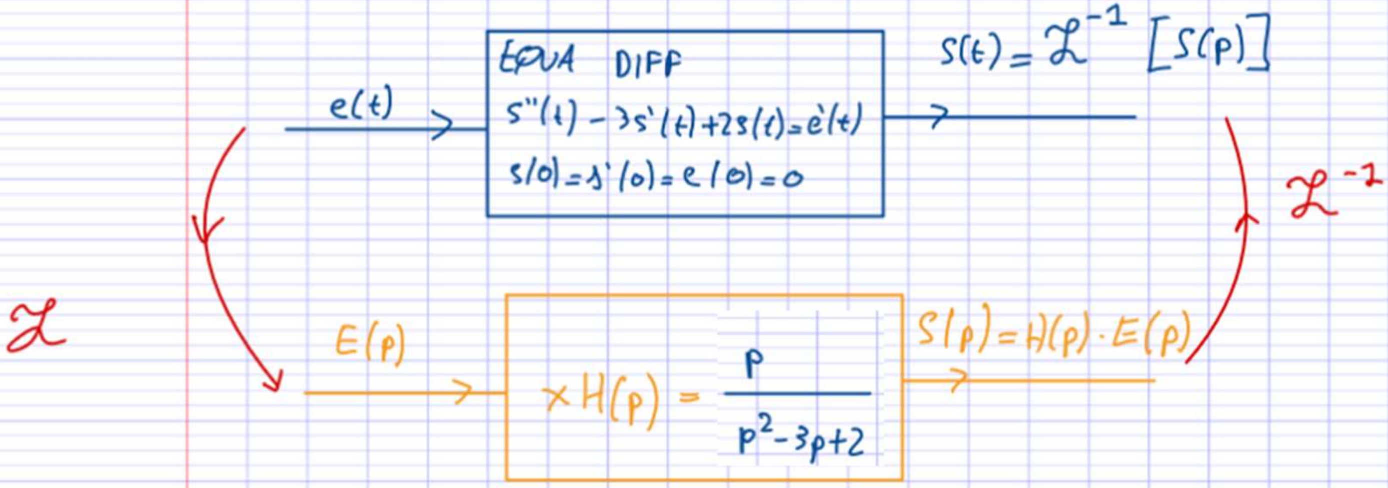
DM14
Transformation de Laplace

Soit le circuit caractérisé par l'équation différentielle ci-dessous, reliant $t \longmapsto e(t)$ et $t \longmapsto s(t)$ les signaux respectivement entrée et sortie.

$$\begin{cases} s'' - 3s' + 2s = e' \\ s(0) = s'(0) = e(0) = 0 \end{cases}$$

1. Faire un schéma
2. Déterminer la fonction de transfert du circuit $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$
3. Déterminer la réponse impulsionnelle du circuit
   (chercher $s(t)$ lorsque $e(t) = \delta(t) \leftarrow$ Dirac)
4. Déterminer la réponse indicielle du circuit
   (chercher $s(t)$ lorsque $e(t) = U(t) \leftarrow$ échelon unité)

$$\begin{cases} s'' - 3s' + 2s = e' \\ s(0) = s'(0) = e(0) = 0 \end{cases}$$



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

$$p^2 S(p) - 3p\, S(p) + 2\, S(p) = p\, E(p)$$

$$\Leftrightarrow (p^2 - 3p + 2)\, S(p) = p\, E(p)$$

$$\Leftrightarrow H(p) = \frac{p}{p^2 - 3p + 2}$$

Réponse impulsionnelle :

Si $e(t) = \delta(t)$ alors $E(p) = 1$ donc $S(p) = H(p) \cdot E(p)$

$$S(p) = \frac{p}{p^2 - 3p + 2}$$

1 est racine de $p^2 - 3p + 2$.

$$\begin{array}{r|l} p^2 - 3p + 2 & p-1 \\ \cline{2-2} -(p^2 - p) & p-2 \\ \hline -2p+2 & \\ -(-2p+2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc $S(p) = \dfrac{p}{(p-1)(p-2)} = \dfrac{a}{p-1} + \dfrac{b}{p-2}$ $a, b \in \mathbb{R}$

$a = \lim\limits_{p \to 1} \dfrac{p}{p-2} = -1$ et $b = \lim\limits_{p \to 2} \dfrac{p}{p-1} = 2$

Soit $S(p) = -\dfrac{1}{p-1} + \dfrac{2}{p-2}$

donc $\boxed{s(t) = -e^{t} + 2e^{2t}}$ est la réponse impulsionnelle.

Réponse indicielle :

Si $e(t) = 1$ alors $E(p) = \frac{1}{p}$ donc $S(p) = E(p) \cdot H(p)$

$$S(p) = \frac{p}{p\,(p-1)(p-2)} = \frac{1}{(p-1)(p-2)} = \frac{a}{p-1} + \frac{b}{p-2} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$a = \lim_{p \to 1} \frac{1}{p-2} = -1 \quad \text{et} \quad b = \lim_{p \to 2} \frac{1}{p-1} = 1$$

Donc $S(p) = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}$

Donc $\boxed{s(t) = e^{2t} - e^{t}}$ est la réponse indicielle