Nom : ………………………….. **Prénom :** …………………………………. **Groupe :** ALTERNANCE

<u>Calculatrice</u> : Collège <u>Documents</u> : aucun <u>Répondre sur le sujet</u>

<u>Exercice 1</u> Linéarisation à l'aide des formules d'Euler et calcul intégral (6 pts)

1) A l'aide des formules d'Euler, linéariser : $f(t) = \cos(5t) . \cos(2t)$

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

2) En déduire la valeur de l'intégrale suivante : (on pourra récupérer les résultats de la question 1))

$K = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(t)dt =$……………………………………………………………………………………

……

……

……

……

……

……

……

3) Calculer l'intégrale ci-dessous :

$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{2\pi}{5}} \mathrm{g(t)dt}$ où $g(t) = sin^3(5t)$

<u>Exercice 2</u> Calcul d'intégrales – suivez bien les instructions ! (5 pts)

1) Quelle est la formule permettant de calculer une intégrale par intégration par parties ?

2) Calculer l'intégrale suivante à l'aide d'une intégration par parties :

$$\mathrm{L} = \int_0^1 (3\mathrm{x}+1).\,\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}\mathrm{dx}$$

3) Calculer l'intégrale suivante à l'aide de deux intégrations par parties successives (on pourra, lorsqu’il le sera utile, utiliser le résultat de la question 2) :

$$\mathrm{M} = \int_0^1 (3\mathrm{x}+1)^2 . \mathrm{e}^{2\mathrm{x}} \mathrm{dx}$$

Exercice 3 : Factorisation de polynômes, DSES de fraction et calcul intégral
On justifiera le résultat obtenu à chaque question. (9 pts)

1) Factoriser dans $\mathbb{R}$: $B(x) = 4x^6+4x^5 + x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1$ (Indication : on montrera que B a une racine multiple et que $B(j) = 0$).

………

………

2) Factoriser dans $\mathbb{R}$: $A(x) = (x^2 - 1).(4x^2 - 4x + 1)$ puis simplifier la fraction :

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{x^4 - 1}{4x^6 + 4x^5 + x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1}$$ (reprendre les factorisations précédentes)

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

3) La fraction F possède-t-elle une partie entière ? Si non, justifier pourquoi, si oui, la calculer.

………

………

………

………

………

4) Ecrire la forme de la décomposition en somme d'éléments simples dans $\mathbb{R}$ de la fraction f obtenue précédemment, irréductible et sans partie entière , puis calculer les coefficients de sa DSES.

………

………

………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

5) Conclusion : En déduire les primitives de f.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Exercice facultatif et hors barème, extrait des tests d'entrée à l'ITII PACA - 2003 (ISEN par alternance)

Question 4 La décomposition en fractions simples donne :

$$\frac{13x^2}{x^4+5x^2-36} =$$

On en déduit, pour $|\,t\,| > 2$, la primitive suivante :

$$F(t) = \int_3^t \frac{13x^2}{x^4+5x^2-36}\,dx =$$

$$\lim_{t \to \infty} F(t) =$$

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du DS1 S2
1FTP

Exercice 1

Collège Documents : aucun Répondre sur le sujet

Exercice 1 **Linéarisation à l'aide des formules d'Euler et calcul intégral (6 pts)**

1) A l'aide des formules d'Euler, linéariser : $f(t) = \cos(5t) \cdot \cos(2t)$

$$f(t) = \cos(5t) \cdot \cos(2t)$$

$$= \left(\frac{e^{j5t} + e^{-j5t}}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^{2jt} + e^{-2jt}}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{7jt} + e^{3jt} + e^{-3jt} + e^{-7jt}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{7jt} + e^{-7jt} + e^{3jt} + e^{-3jt}\right) = \frac{1}{4}\left(2\cos(7t) + 2\cos(3t)\right)$$

$$f(t) = \frac{\cos(7t)}{2} + \frac{\cos(3t)}{2} = \boxed{\frac{1}{2}\cos(7t) + \frac{1}{2}\cos(3t)}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(\cos(7t) + \cos(3t)\right)$$

Exercice 1

2) En déduire la valeur de l'intégrale suivante : (on pourra récupérer les résultats de la question 1))

$K = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}\cos(7t) + \frac{1}{2}\cos(3t)\right)dt$ cos est paire et $\left[\frac{\pi}{3} ; -\frac{\pi}{3}\right]$ centré en 0, donc $K = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(7t) + \cos(3t)\, dt$

$= \left[\frac{\sin(7t)}{7} + \frac{\sin(3t)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{14} + 0 - 0 = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{14}}$

Exercice 1

3) Calculer l'intégrale ci-dessous :

$$I = \int_0^{\frac{2\pi}{5}} g(t)dt \text{ où } g(t) = sin^3(5t)$$

g est $\frac{2\pi}{5}$ - périodique et $[0; \frac{2\pi}{5}]$ est un intervalle de longueur $\frac{2\pi}{5}$.

Donc $I = \int_{-\pi/5}^{\pi/5} g(t)\,dt.$

De plus g est impaire, donc $I = 0$

Exercice 2

$$\begin{cases} u = 3x+1 \\ v' = e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 3 \\ v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

Exercice 2 **Calcul d'intégrales – suivez bien les instructions ! (5 pts)**

1) Quelle est la formule permettant de calculer une intégrale par intégration par parties ?

$$\int_a^b u.v'\,dt = [u.v]_a^b - \int_a^b u'.v\,dt$$

2) Calculer l'intégrale suivante à l'aide d'une intégration par parties :

$$L = \int_0^1 \underbrace{(3x+1)}_{u}.\underbrace{e^{2x}}_{v'}dx$$

$$L = \left[(3x+1)\times\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \frac{3}{2}\int_0^1 e^{2x}\,dx$$

$$L = 4\times\frac{e^2}{2} - 1\times\frac{e^0}{2} - \frac{3}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1$$

$$L = 2.e^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^0}{2}\right)$$

$$L = 2.e^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}e^2 + \frac{3}{4}$$

$$L = \frac{1}{4}\left(8e^2 - 2 - 3e^2 + 3\right) \Leftrightarrow L = \frac{1}{4}\left(5e^2+1\right)$$

Exercice 2

3) Calculer l'intégrale suivante à l'aide de deux intégrations par parties successives (on pourra, lorsqu'il le sera utile, utiliser le résultat de la question 2) :

$$M = \int_0^1 (3x+1)^2 . e^{2x} dx$$

$$\begin{cases} U = (3x+1)^2 \\ V' = e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = 2\times 3(3x+1) \\ V = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$M = \left[(3x+1)^2 \times \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{2\times 3(3x+1)}_{U} \times \underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{V'} dx$$

$$M = 16 \times \frac{e^2}{2} - 1 \times \frac{e^0}{2} - 3\int_0^1 (3x+1) \times e^{2x} dx$$

$$M = 8e^2 - \frac{1}{2} - 3 \times \left(\frac{1}{4}(5e^2+1)\right)$$

$$M = 8e^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}(5e^2+1)$$

$$M = \frac{1}{4}(32e^2 - 2 - 15e^2 - 3)$$

$$M = \frac{1}{4}(17e^2 - 5)$$

Exercice 3

DS1 d'outils mathématiques et logiciels – semestre 2

<u>Exercice 3</u> : Factorisation de polynômes, DSES de fraction et calcul intégral

On justifiera le résultat obtenu à chaque question. (9 pts)

1) Factoriser dans $\mathbb{R}$: $B(x) = 4x^6+4x^5+x^4+2x^3-2x^2-2x+1$ (Indication : on montrera que B a une racine multiple et que $B(j)=0$).

$B(1) = 4+4+1+2-2-2+1 \neq 0$

$B(-1) = 4-4+1-2-2+2+1 = 0$

$B'(-1) = -24+20-4+6+4-2 = 0$ $\qquad (x+1)^2$

$B''(-1) \neq 0$

$B(j) = 4j^6+4j^5+j^4+2j^3-2j^2-2j+1$

$= -4+4j+1-2j+2-2j+1 = 0$

donc j racine évidente et $-j$ également car $B \in \mathbb{R}[x]$

$(x-j)(x+j)(x+1)(x+1) = (x^2+1)(x^2+2x+1)$

$= x^4+2x^3+2x^2+2x+1$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 4x^6+4x^5+x^4+2x^3-2x^2-2x+1 & x^4+2x^3+2x^2+2x+1 \\
\hline
- & 4x^6-8x^5-8x^4-8x^3-4x^2 & 4x^2-4x+1 \\
 & -4x^5-7x^4-6x^3-6x^2-2x+1 & \\
+ & 4x^5+8x^4+8x^3+8x^2+4x & \\
 & x^4+2x^3+2x^2+2x+1 & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

donc $B(x) = (4x^2-4x+1)(x^2+1)(x+1)^2$

$= (2x-1)^2(x^2+1)(x+1)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$= (2x-1)^2(x-j)(x+j)(x+1)^2 \longrightarrow \mathbb{C}$

Exercice 3

2) Factoriser dans $\mathbb{R}$: $A(x) = x^4 - 1$ puis simplifier la fraction :

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{x^4-1}{4x^6+4x^5+x^4+2x^3-2x^2-2x+1}$$ (reprendre les factorisations précédentes)

$A(x) = x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x+1)(x-1)(x^2+1)$

donc $$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)\cancel{(x^2+1)}}{(2x-1)^2\cancel{(x^2+1)}(x+1)^{\cancel{2}}}$$

Soit $$f(x) = \frac{(x-1)}{(2x-1)^2(x+1)} = \frac{A_1(x)}{B_1(x)}$$

3) La fraction f possède-t-elle une partie entière ? Si non, justifier pourquoi, si oui, la calculer.

$\deg(A_1) = 1 < \deg(B_1) = 3$ donc non, la fraction f n'a pas de partie entière

Exercice 3

(4) $$f(x) = \frac{x-1}{(2x-1)^2(x+1)} = \frac{a}{(2x-1)^2} + \frac{b}{2x-1} + \frac{c}{x+1}$$

$$a = \left[(2x-1)^2 f(x)\right]_{x=1/2} = \left[\frac{x-1}{x+1}\right]_{x=1/2} = \frac{-1/2}{3/2} = -\frac{1}{3}$$

$$c = \left[(x+1)\, f(x)\right]_{x=-1} = \left[\frac{x-1}{(2x-1)^2}\right]_{x=-1} = \frac{-2}{9}$$

$$f(0) = \frac{-1}{1} = -1 = a - b + c \Leftrightarrow b = a + c + 1 = -\frac{1}{3} - \frac{2}{9} + 1 = \frac{4}{9}$$

$$f(x) = -\frac{1}{3(2x-1)^2} + \frac{4}{9}\,\frac{1}{2x-1} - \frac{2}{9}\,\frac{1}{x+1}$$

Exercice 3

$$f(x) = -\frac{1}{3(2x-1)^2} + \frac{4}{9}\,\frac{1}{2x-1} - \frac{2}{9}\,\frac{1}{x+1}$$

$$\int f(x)\,dx = -\frac{1}{3\times 2}\int \frac{2\,dx}{(2x-1)^2} + \frac{4}{9}\,\frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{2x-1} - \frac{2}{9}\cdot\int \frac{dx}{x+1}$$

$$F(x) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x-1} + \frac{2}{9}\cdot\ln|2x-1| - \frac{2}{9}\cdot\ln|x+1| + cte$$