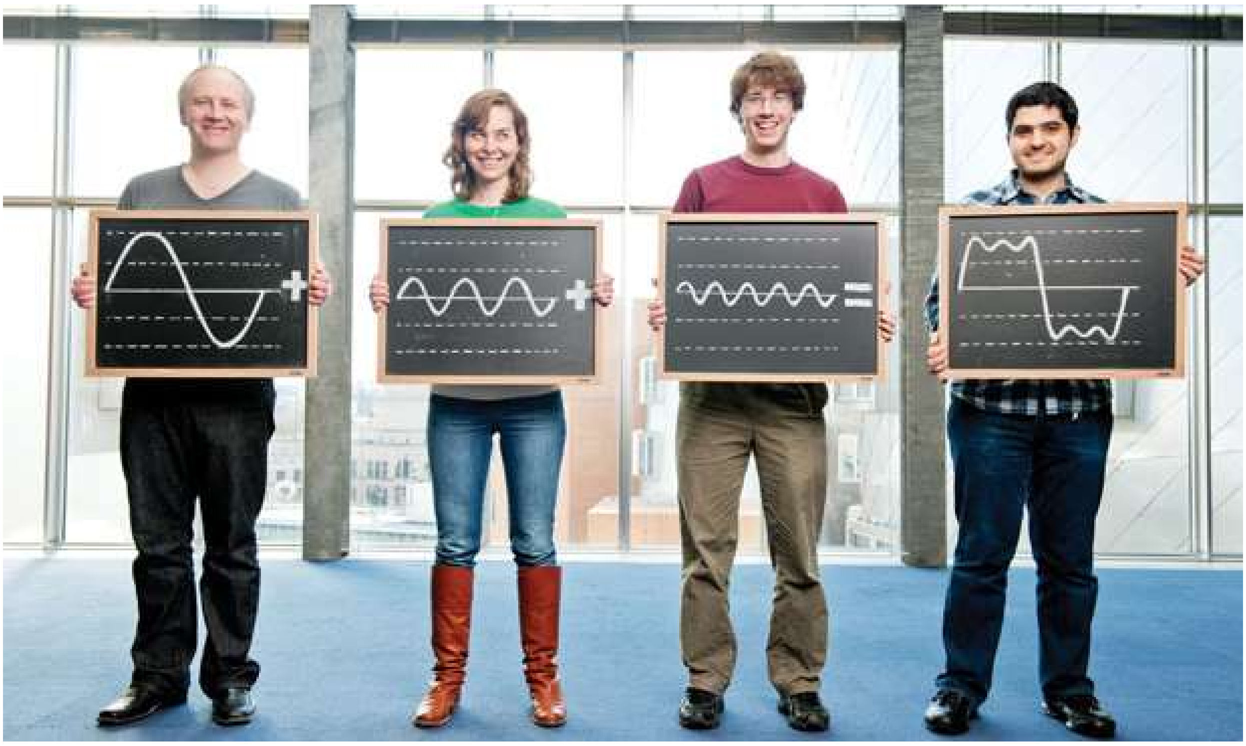
BACHELOR UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE

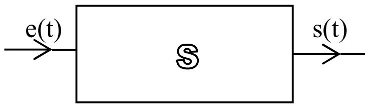
Ressource R2-04 : OUTILS MATHEMATIQUES ET LOGICIELS

Chapitre 8 : Initiation aux séries de Fourier



Enseignante : Sylvia Le Beux
Sylvia.lebeux@univ-tln.fr
Bureau A042
Moodle : https://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=527

Introduction Soit S un système électrique linéaire (RC, RLC…) schématisé ci-dessous par :



Dans un tel circuit, un signal d'entrée e(t) engendre un signal de sortie s(t), appelé aussi réponse du circuit au signal e(t), et ces deux signaux sont reliés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants (programme du GEII) : (les coefficients a_i et b_i sont des constantes).

$$a_n s^{(n)}(t) + a_{n-1} s^{(n-1)}(t) + \ldots\ldots + a_1 s'(t) + a_0 s(t) = b_n e^{(n)}(t) + \\ + b_{n-1} e^{(n-1)}(t) + \ldots\ldots + b_1 e'(t) + b_0 e(t)$$

Ainsi, si le signal d'entrée est une somme finie ou non de signaux : $e(t) = e_1(t)+e_2(t)+\ldots.+e_n(t)$, alors la réponse est de la même forme : $s(t) = s_1(t)+s_2(t)+\ldots+s_n(t)$ où chaque signal s_i est la réponse du circuit au signal e_i avec $i \in [\![1, n]\!]$.

Lorsque le signal d'entrée est une fonction constante ou encore une fonction sinusoïdale, il est assez facile d'obtenir mathématiquement le signal de sortie et de l'analyser, puisqu'il s'agit également respectivement d'une constante ou d'une sinusoïde. Que faire alors lorsque le signal d'entrée n'est pas sinusoïdal, mais, quand même périodique ? C'est le baron Joseph Fourier (1768 – 1837), qui a résolu ce problème en montrant que l'on peut décomposer un signal périodique en somme d'une constante et de fonctions sinusoïdales.

Dans ce chapitre nous allons déterminer à quelles conditions on peut écrire un signal T-périodique sous la forme : $\mathbf{e(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} (a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t))}$ où $\mathbf{T=\frac{2\pi}{\omega}}$.

Lorsque c'est le cas, on dit que le signal e est décomposable en série de Fourier. Nous pourrons alors représenter le spectre de e.

I. Développement d'une fonction périodique en série de Fourier

1) Définitions

Soit x une fonction de période T, intégrable sur tout intervalle [t_0, t_0+T].
On appelle série de Fourier réelle de x la série suivante :

$a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} (a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t))$**, où les suites réelles $(a_p)_p$ et $(b_p)_p$ sont définies de la façon suivante :**

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt \quad ; \quad a_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\cos(p\omega t).dt \quad ; \quad b_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\sin(p\omega t).dt \text{ pour } p \geq 1,$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

a_0 **est la valeur moyenne du signal x.**
L'harmonique de rang p est le signal : $H_p(t) = a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)$
Le fondamental est l'harmonique de rang 1 : $H_1(t) = a_1.\cos(\omega t) + b_1.\sin(\omega t)$

……………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………….............

2) Rappels du chapitre 6 :

Soit f, une fonction T-périodique, intégrable sur tout intervalle de longueur T : [a,a+T].
On a alors :

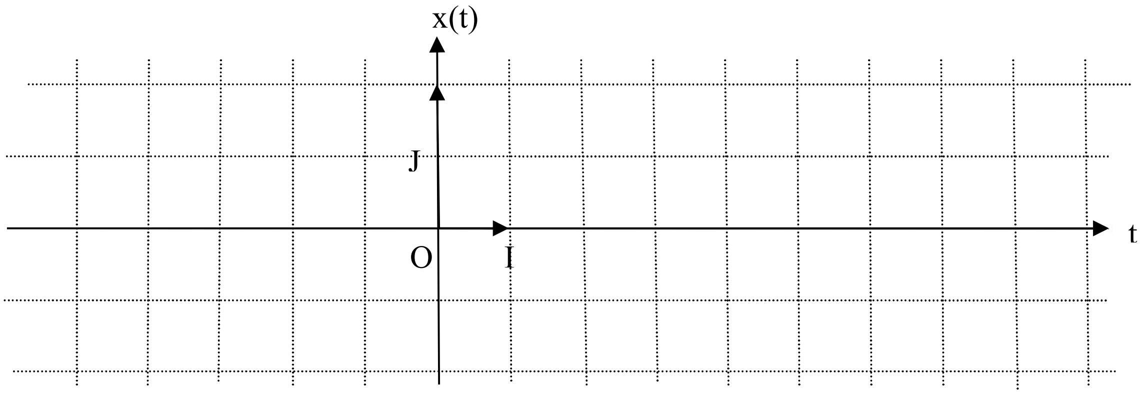
$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

On peut donc calculer les intégrales définissant les coefficients de Fourier sur n'importe quel intervalle de longueur T.

- Si f est une fonction paire et intégrable sur [-a,a], alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2.\int_0^a f(x)dx$.
- Si f est une fonction impaire et intégrable sur [-a,a], alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

II. Travaux Pratique : série de Fourier et analyse spectrale d'un signal carré

Soit x, la fonction de période 2π, définie par : $x(t)=\begin{cases}1 \text{ pour } t\in[0;\pi[\\ -1 \text{ pour } t\in[\pi;2\pi[\end{cases}$



1) Représenter graphiquement le signal x, puis déterminer ses coefficients de Fourier :

…………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

2) Ecrire la série de Fourier du signal x :

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

La série de Fourier d'un signal pair est en cosinus : $a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p.\cos(p\omega t)$

La série de Fourier d'un signal impair est en sinus : $\sum_{p=1}^{+\infty} b_p.\sin(p\omega t)$

3) A l'aide d'un logiciel de calcul formel

- Définir et représenter le signal x sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi[$. Pour cela on introduira m, la formule du motif de x : $m(t) \coloneqq \begin{cases} 1 \text{ pour } t \in [0;\pi[\\ -1 \text{ pour } t \in [-\pi;0[\end{cases}$, puis f, la fonction somme des motifs : m, m avancé de 2π, et m retardé de 2π.
- Définir les coefficients de Fourier de x.
- Définir et représenter dans un même repère sur le même intervalle que précédemment la valeur moyenne, le fondamental et les harmoniques de rang 2 à 5.
- Définir la somme de rang n de la série de Fourier de x.
- Représenter sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi[$ et dans un même repère, le signal x et son développement en série de Fourier à l'ordre n pour n = 1,3 et 5, puis commenter.

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

4) Théorème de Dirichlet et définition d'une fonction développable en série de Fourier

Soit x un signal de période T, intégrable sur tout intervalle $[\alpha, \alpha+T]$.

- Si x est continue sur $[\alpha, \alpha+T[$, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle admet une limite finie à gauche et à droite.
- x est dérivable sur $[\alpha, \alpha+T[$, sauf éventuellement en un nombre fini de points où sa dérivée admet une limite finie à gauche et à droite.

Alors la série de Fourier de x converge en tout point t et sa fonction somme est alors :

$$a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} (a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)) = \begin{cases} x(t) \text{ pour t où x est continue} \\ \dfrac{x(t_+) + x(t_-)}{2} \text{ pour t où x est discontinue} \end{cases}$$

On dit alors que x est développable en série de Fourier.

Vocabulaire Toute fonction vérifiant les hypothèses du théorème de Dirichlet sont dites de classe C^1 par morceaux sur l'ensemble des réels.
Exemple Appliquer le théorème de Dirichlet au signal rectangle du TP page 7

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

5) Spectre d'un signal périodique

Le terme général $a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)$ peut aussi s'écrire $A_p \cos(p\omega t + \phi_p)$
où : $A_p = |a_p - ib_p| = \sqrt{a_p{}^2 + b_p{}^2}$ et $\phi_p = \arg(a_p - ib_p)$. ($p \neq 0$)
A_p est l'amplitude de l'harmonique de rang p
ϕ_p est la phase de l'harmonique de rang p.
Une autre écriture du développement en série de Fourier d'un signal périodique f est donc : $A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} A_p \cos(p\omega t + \phi_p)$, avec $A_0 = a_0$.
L'ensemble des amplitudes A_p forme le spectre d'amplitude unilatéral du signal x, ou spectre de raies (il s'agit d'un spectre discret). Il est représenté par un diagramme en bâtons obtenu en représentant les amplitudes A_p en fonction de p/T. A_p devient négligeable à partir d'un certain rang.

Exemple Après avoir déterminé la suite des amplitudes, tracer le spectre d'amplitude unilatéral du signal carré du TP page 7

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

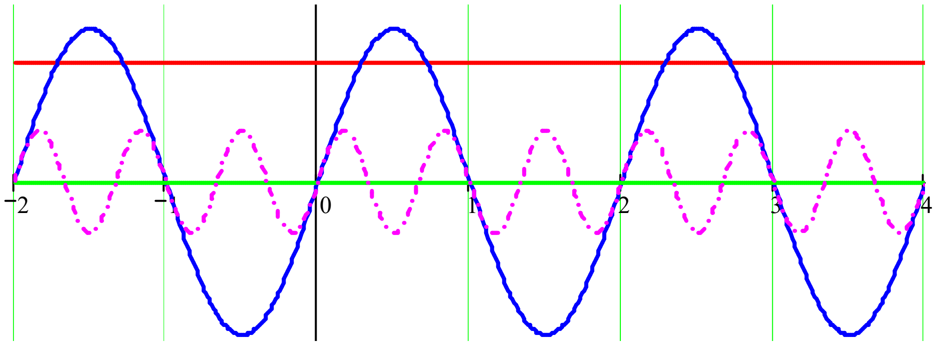
………………………………………………………………………………………

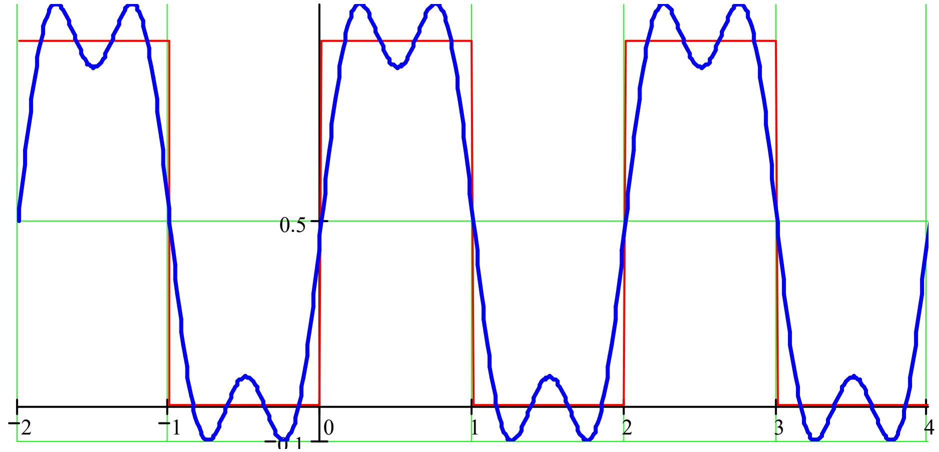
………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

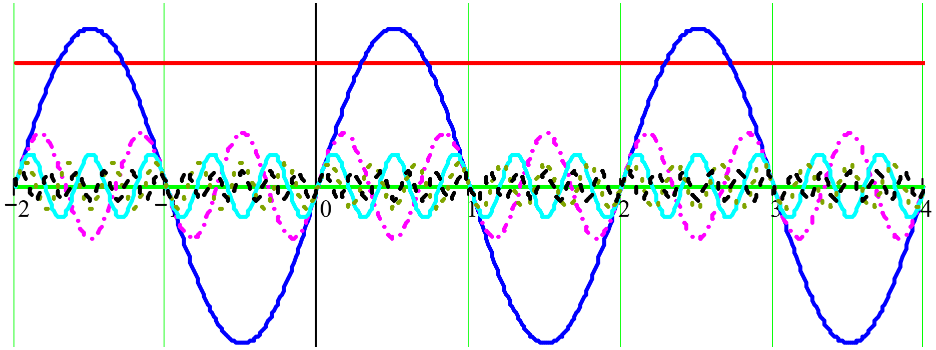
………………………………………………………………………………………

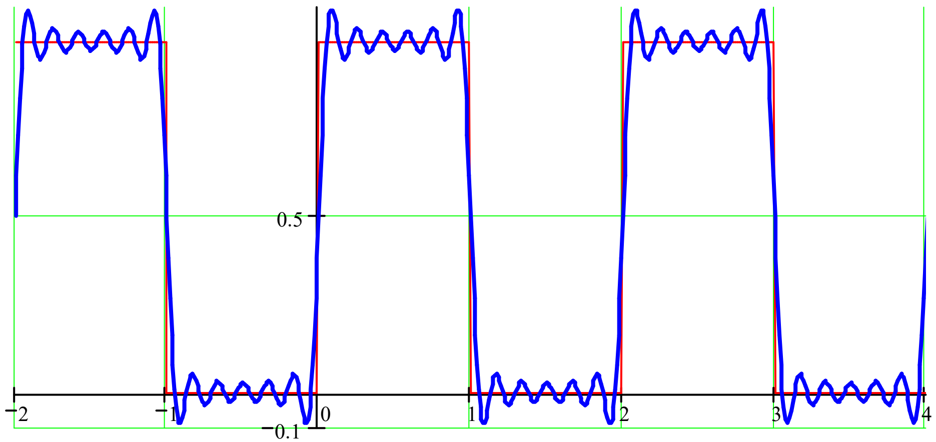
Illustration de la série de Fourier du signal carré de période 1 et d'amplitude 2





Au-dessus : Harmoniques de rang 0 (valeur moyenne), de rang 1 (fondamental) jusqu'au rang 3.
A droite : somme des harmoniques de rang de 0 à 3 et signal f.





Au-dessus : Harmoniques de rang 0 jusqu'au rang 21.
A droite : somme des harmoniques de rang 0 à 21 et signal f.

III. Exercices

Exercice 1

Soit x, le signal 4-périodique, pair, et défini par : $x(t) = \begin{cases} 1 \text{ pour } t \in [0;1[\\ -2 \text{ pour } t \in [1;2[\end{cases}$

1) Représenter x sur l'intervalle [-4,4].
2) Calculer les coefficients de Fourier de x.
3) Ecrire la série de Fourier de x.
4) Appliquer le théorème de Dirichlet afin de déterminer la somme de cette série.
5) Tracer le spectre d'amplitude.

Exercice 2

Soit x, le signal 5π-périodique, défini par : $x(t) = \begin{cases} 3 \text{ pour } t \in [0;3\pi[\\ 1 \text{ pour } t \in [3\pi;5\pi[\end{cases}$

1) Représenter x sur l'intervalle [-5 π,5 π].
2) Calculer les coefficients de Fourier de x.
3) Ecrire la série de Fourier de x.
4) Appliquer le théorème de Dirichlet afin de déterminer la somme de cette série.
5) Tracer le spectre d'amplitude.

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

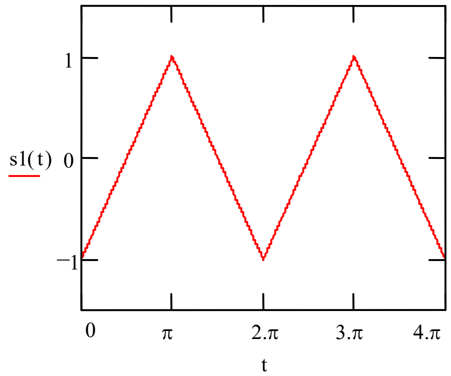
…………………………………………………………………………………………

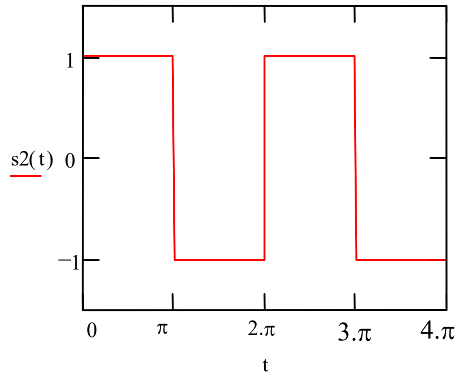
IV. **Pour aller plus loin…**

1. Décomposition en série de Fourier de quelques signaux

On souhaite décomposer en série de Fourier les signaux suivants :

- signal triangulaire symétrique s1(t)
- signal carré symétrique s2(t)



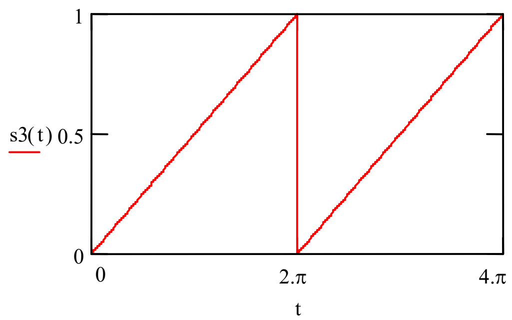


On pourra utiliser un logiciel de calcul formel pour vérifier graphiquement les séries de Fourier. On procédera alors de la façon suivante :

a. Définir et représenter graphiquement la fonction à étudier sur une période.
b. Définir les coefficients de Fourier (on écrira les formules générales, de façon à ce qu'elles puissent être reprises pour les deux signaux.)
c. Définir le développement en série de Fourier à l'ordre n.
d. Représenter sur un même graphe la fonction à étudier et son développement en série de Fourier à l'ordre n pour n = 1,3 et 5.
e. Visualiser les harmoniques de rang 1, 3 et 5.

2. Tracé d'un spectre de fréquence

Après avoir exprimé les coefficients de Fourier A_n, tracer le spectre en fréquence du signal rampe s3 ci-dessous jusqu'au rang 15.



……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………