Soit $F(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 36x^3 + 83x^2 - 62x + 14}{x^4 - 18x^2 + 32x - 15} = \frac{A(x)}{B(x)}$ une fraction rationnelle, le but de ce problème est de déterminer les primitives de F. Pour cela, il vous faudra la décomposer en somme d'éléments simples en suivant les étapes suivantes :

1) Montrer que 1 est une racine multiple de B, le dénominateur de F, puis factoriser ce dernier.

$B(1) = 1 - 18 + 32 - 15 = 33 - 33 = 0$

$B'(x) = 4x^3 - 36x + 32 \Rightarrow B'(1) = 4 - 36 + 32 = 36 - 36 = 0$.

$B''(x) = 12x^2 - 36 \Rightarrow B''(1) \neq 0$

1 est une racine double de B. B est alors divisible par $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$.

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 18x^2 + 32x - 15 & x^2 - 2x + 1 \\
\cline{2-2}
-(x^4 - 2x^3 + x^2) & x^2 + 2x - 15 \\
\cline{1-1}
2x^3 - 19x^2 + 32x - 15 & \\
-(2x^3 - 4x^2 + 2x) & \\
\cline{1-1}
-15x^2 + 30x - 15 & \\
-(-15x^2 + 30x - 15) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

On obtient alors : $B(x) = (x-1)^2(x^2 + 2x - 15)$

On résout $x^2 + 2x - 15 = 0$

$\Delta = 4 - 4(-15) = 4 + 60 = 64 > 0$

donc $x_1 = \frac{-2+8}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{-2-8}{2} = -5$.

On obtient alors la factorisation de B dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$:

$B(x) = (x-1)^2(x-3)(x+5)$

2) Montrer que F a une partie entière, la calculer, puis noter G la fraction restante.

Soit $F = \frac{A}{B}$, une fraction de polynômes. Deux cas de figure se présentent :

- Soit <u>deg(A) ≥deg(B)</u>, on peut alors effectuer la division euclidienne de A par B. On obtient donc les polynômes Q et R tels que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases} \text{ et } F = \frac{A}{B} = \frac{BQ+R}{B} = Q + \frac{R}{B}.$$

Q est appelé <u>partie entière</u> de F.

- Soit deg(A)<deg(B), on ne peut alors pas effectuer de division euclidienne de A par B, et F ne possède pas de partie entière.

deg A = 5 ≥ deg B = 4, F a donc une partie entière

$A = 2x^5 - x^4 - 36x^3 + 83x^2 - 62x + 14$ | $x^4 - 18x^2 + 32x - 15 = B$

$-(2x^5 - 36x^3 + 64x^2 - 30x)$ | $2x - 1 = Q$

$-x^4 + 19x^2 - 32x + 14$

$-(-x^4 + 18x^2 - 32x + 15)$

$R = x^2 - 1$

$F = Q + \frac{R}{B}$ donc $F(x) = \underbrace{2x - 1}_{\text{partie entière}} + \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2(x-3)(x+5)}$

3) Réduire la fraction G obtenue dans la question précédente.

$G(x) = \frac{(x^2 - 1)}{(x-1)^2(x-3)(x+5)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x-3)(x+5)}$ est réductible

$G(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x-3)(x+5)}$

4) Ecrire la forme de la décomposition en somme d'éléments simples de la fraction irréductible et sans partie entière Z, définie par : $\mathbf{Z(x)} = \frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{(x+5)(x-1)(x-3)}}$, puis calculer les coefficients.

$$Z(x) = \frac{x+1}{(x+5)(x-1)(x-3)} = \frac{a}{x+5} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-3}$$

$$a = \left[(x+5)\,Z(x)\right]_{x=-5} = \left[\frac{x+1}{(x-1)(x-3)}\right]_{x=-5} = \frac{-4}{(-6)(-8)} = \frac{-1}{12}$$

$$b = \left[(x-1)\,Z(x)\right]_{x=1} = \left[\frac{x+1}{(x+5)(x-3)}\right]_{x=1} = \frac{2}{6(-2)} = -\frac{1}{6}$$

$$c = \left[(x-3)\,Z(x)\right]_{x=3} = \left[\frac{x+1}{(x-1)(x+5)}\right]_{x=3} = \frac{4}{2\times 8} = \frac{1}{4}$$

Ainsi $$Z(x) = -\frac{1}{12(x+5)} - \frac{1}{6(x-1)} + \frac{1}{4(x-3)}$$

5) Déduire des résultats obtenus dans les questions précédentes, la décomposition en somme d'éléments simples de F, puis déterminer ses primitives.

$$F(x) = 2x - 1 + Z(x)$$

donc

$$\int F(x)\,dx = \int (2x-1)\,dx - \frac{1}{12}\int \frac{dx}{x+5} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-3}$$

$$\int F(x)\,dx = x^2 - x - \frac{1}{2}\ln|x+5| - \frac{1}{6}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x-3| + \text{cte}$$