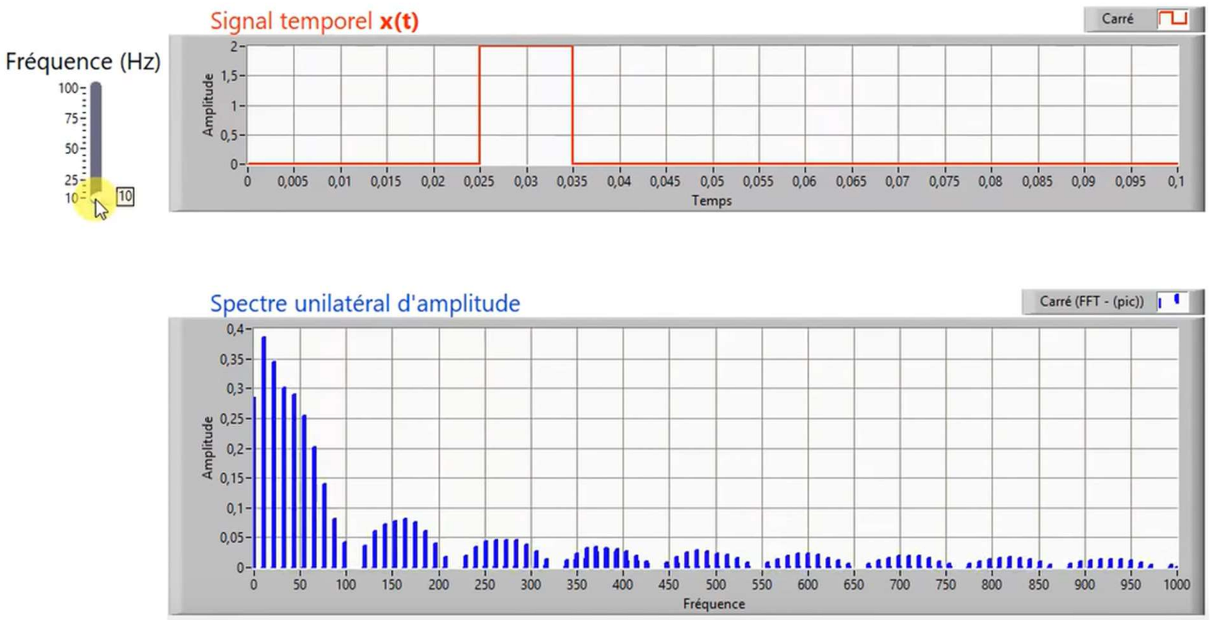
BACHELOR UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE

Ressource R4-04 : OUTILS MATHEMATIQUES ET LOGICIELS

Chapitre 4 : Analyse spectrale d'une signal non périodique Transformation de Fourier



Enseignante : Sylvia Le Beux
Sylvia.lebeux@univ-tln.fr

Table des matières

Programme de la ressource R4.04 d'Outils Mathématiques et Logiciels

<u>Chapitre III</u> : Calcul matriciel et application au GEII

--- DS1- R4.04 ---

<u>Chapitre IV</u> : Transformation de Fourier

-- DS2- R4.04 ---

Bibliographie

- <u>Pour les étudiants souhaitant s'entraîner et progresser :</u>

  Mathématiques en modules – Tome 2 - bases fondamentales DUT et BTS industriels
  auteur : C.Larcher - édition CASTELLA
  <u>Magasin GEII</u>
  <u>Remarques</u> : Résumé/rappel de cours de DUT et exercices appliqués au GEII corrigés.

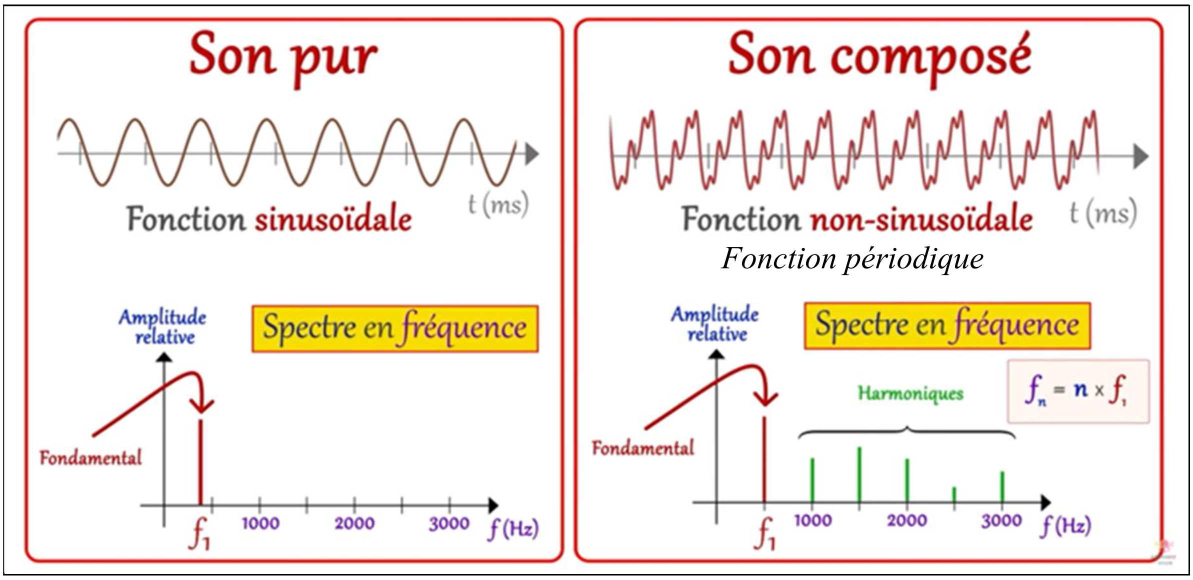
  Maths BTS-DUT industriels - édition Techno + - auteurs C.Larcher
  <u>Côte BU</u> : 510 LAR
  <u>Remarques</u> : Résumé de cours et exercices très appliqués au GEII corrigés.

- <u>Pour les étudiants souhaitant suivre de longues études :</u>

  Cours DUT/BTS : édition : Ellipses – auteur : P. Variot
  <u>Côte BU</u> :510 VAR
  <u>Remarques</u> : Cours DUT d'un très bon niveau, tout le programme du DUT y est traité et plus.

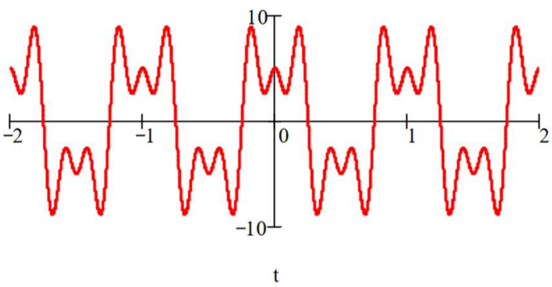
  L'épreuve de mathématiques au concours ENSEA - édition : CASTELLA - auteurs : Lièvre - Mazoyer
  <u>ISBN</u> : 978 2 7135 2846 0 à la BU.
  <u>Remarques</u> : Résumé de cours très clair et sujets de concours corrigés intégralement.

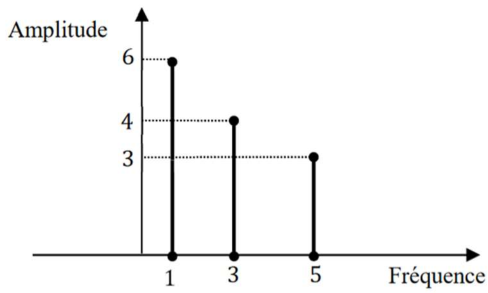
Partie A : Analyse spectrale d’un signal périodique – Série de Fourier - Rappels



Exemple 1 : Spectre du signal périodique $\mathbf{x(t) = 3\cos(10\pi t) + 6\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) - 4\cos(6\pi t)}$

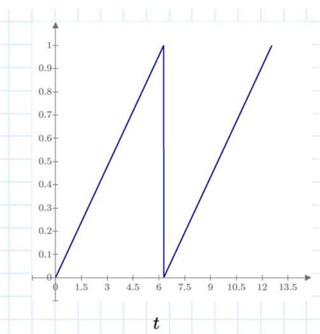
Représentation temporelle et spectre d’amplitude

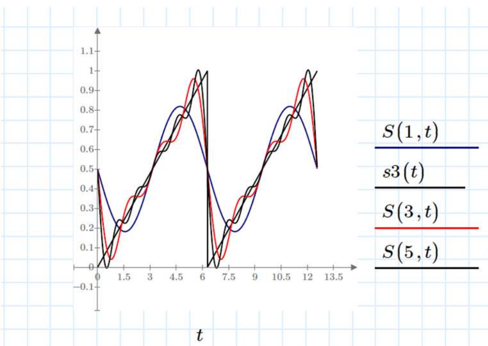


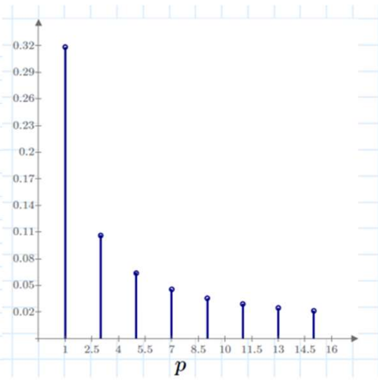


Remarque les composantes de fréquence paire est nulle car et le signal est à symétrie demi-onde.

Exemple 2 : Spectre d’un signal en dents de scie – décomposition en série de Fourier – spectre d’amplitude







Définitions - formules et propriétés :

1) Soit x une fonction de période T, intégrable sur tout intervalle $[t_0, t_0+T]$.
On appelle série de Fourier réelle de x la série suivante :

$a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t))$, **où les suites réelles $(a_p)_p$ et $(b_p)_p$ sont définies de la façon suivante :**

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt \quad ; \quad a_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\cos(p\omega t).dt \quad ; \quad b_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\sin(p\omega t).dt \;\text{ pour } p \geq 1,$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

a_0 est la valeur moyenne du signal x.
L'harmonique de rang p est le signal : $H_p(t) = a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)$
Le fondamental est l'harmonique de rang 1 : $H_1(t) = a_1.\cos(\omega t) + b_1.\sin(\omega t)$

2) La série de Fourier d'un signal paire est en cosinus : $a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p.\cos(p\omega t)$

La série de Fourier d'un signal impaire est en sinus : $\sum_{p=1}^{+\infty} b_p.\sin(p\omega t)$

3) Le terme général $a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)$ **peut aussi s'écrire** $A_p \cos(p\omega t + \phi_p)$
où : $A_p = |a_p - ib_p| = \sqrt{a_p{}^2 + b_p{}^2} = 2|c_p|$ **et** $\phi_p = \arg(a_p - ib_p) = \arg(c_p)$. $(p \neq 0)$
A_p est l'amplitude de l'harmonique de rang p
ϕ_p est la phase de l'harmonique de rang p.
Une autre écriture du développement en série de Fourier d'un signal périodique f est donc : $A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} A_p \cos(p\omega t + \phi_p)$, **avec** $A_0 = a_0$.
L'ensemble des amplitudes A_p forme le spectre d'amplitude unilatéral du signal x, ou spectre de raies (il s'agit d'un spectre discret). Il est représenté par un diagramme en bâtons obtenu en représentant les amplitudes A_p en fonction de p/T. A_p devient négligeable à partir d'un certain rang.

4) On appelle série de Fourier complexe d'un signal x, T-périodique la série : $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t}$

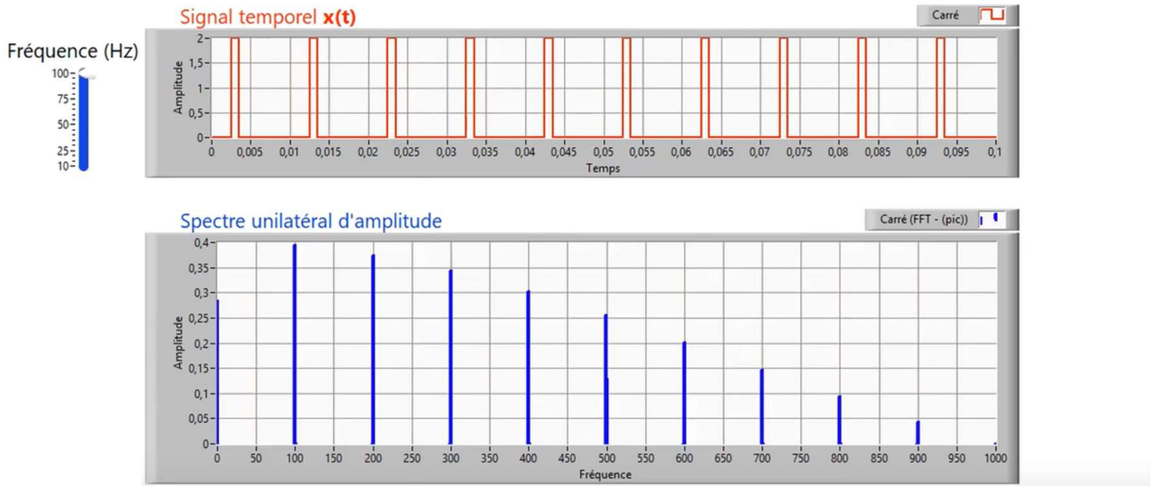
où : $c_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).e^{-ik\omega t}dt$ **pour** $k \neq 0$ **et** $c_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt$ **avec** $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

On a alors les correspondances suivantes : $c_0 = a_0$ **et** $c_k = \frac{a_k - i.b_k}{2}$ **pour** $k \neq 0$.

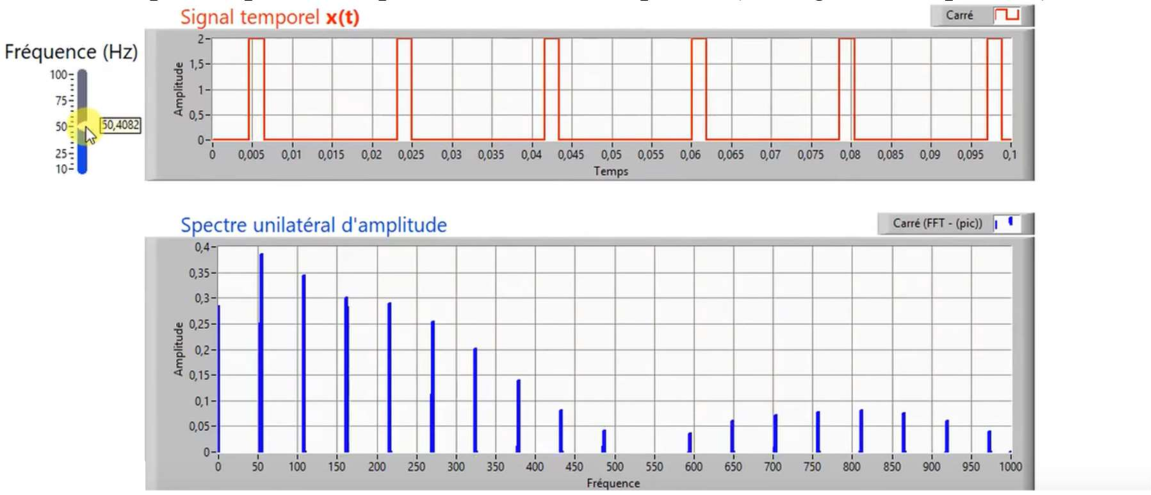
5) Le spectre fréquentiel d'amplitude d'un signal périodique est toujours discret, ses différentes raies représentent l'amplitude de ses composantes.

<u>Spectre d’un signal non périodique</u> :

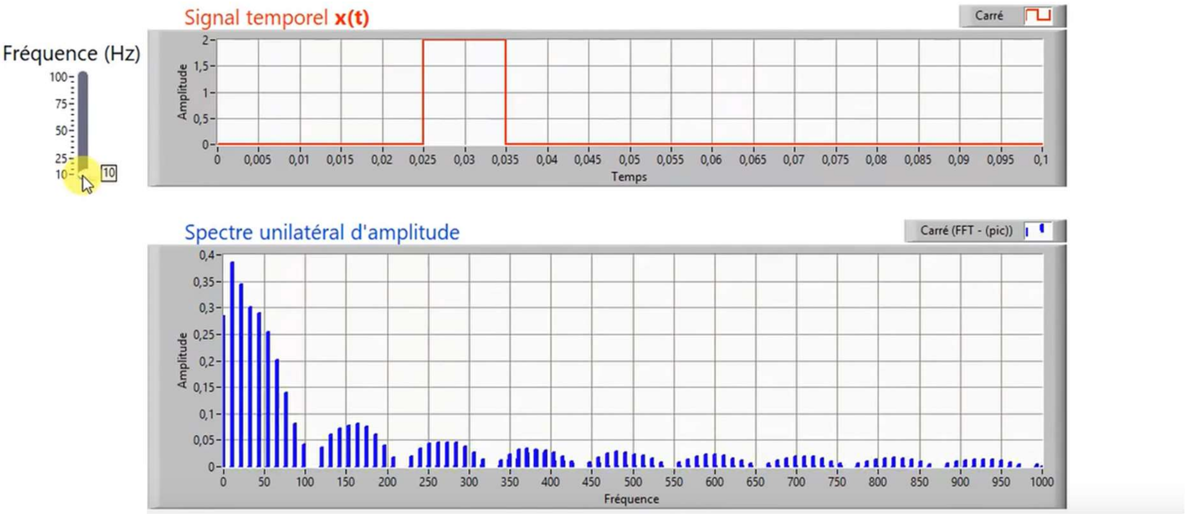
Soit x, un signal périodique, dont le motif est une impulsion rectangulaire. On peut lire sur son spectre sa fréquence (l’abscisse du fondamental) : 100 Hz, et sa période : 0,01 s par calcul inverse ou par lecture graphique sur sa représentation temporelle.



Observons ce qu’il se passe lorsqu’on diminue la fréquence (ou augmente la période) :



Les raies se rapprochent, puisqu’elles sont distantes d’une fréquence. Rappel : $f_n=n.f_1$
Lorsque la fréquence tend vers zéro, le signal n’est plus périodique, et par interpolation son spectre tend à devenir continu.



Partie B : Analyse spectrale d'un signal apériodique – Transformation de Fourier

I. Généralités sur la transformation de Fourier

1) Définitions

Soit x, un signal dépendant du temps :

$$\mathbf{x} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\mathbf{t} \longmapsto \mathbf{x(t)}$$

On appelle transformée de Fourier de x(t), la fonction X, dépendant de la fréquence f :

$$\mathbf{X} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\mathbf{f} \longmapsto \mathbf{X(f)}$$

X est définie par la formule suivante : $\mathbf{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2j\pi ft}\, dt}$

Pour un f donné, X(f) existe si et seulement si l'intégrale ci-dessus converge.
On note : X(f)=TF[x(t)] ou encore : X=TF[x].

2) Vocabulaire

Le graphe représentant la fonction :

- $f \mapsto |X(f)|$ est appelé le spectre de module (ou d'amplitude) du signal x, il s'agit d'un spectre continu.
- $f \mapsto \arg(X(f))$ est appelé le spectre de phase du signal x,
- $f \mapsto |X(f)|^2$ est appelée le spectre de puissance (ou d'énergie) du signal x.

II. Transformée de Fourier de signaux usuels

1) Signal rectangle $\mathbf{rect(t)} = \begin{cases} \mathbf{1 \text{ si } |t| \le \frac{1}{2}} \\ \mathbf{0 \text{ si } |t| > \frac{1}{2}} \end{cases}$

………………………………………………………………………………………………..............

………………………………………………………………………………………………..............

………………………………………………………………………………………………..............

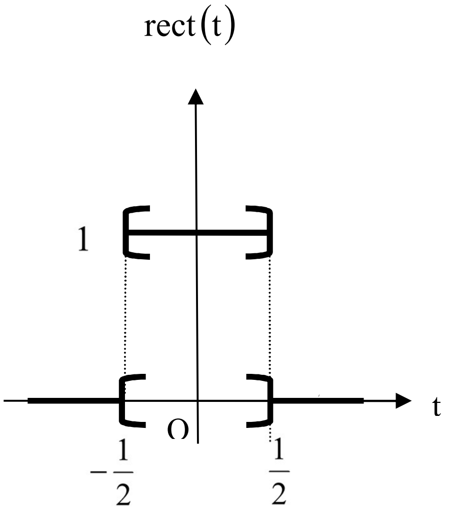
………………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………...............

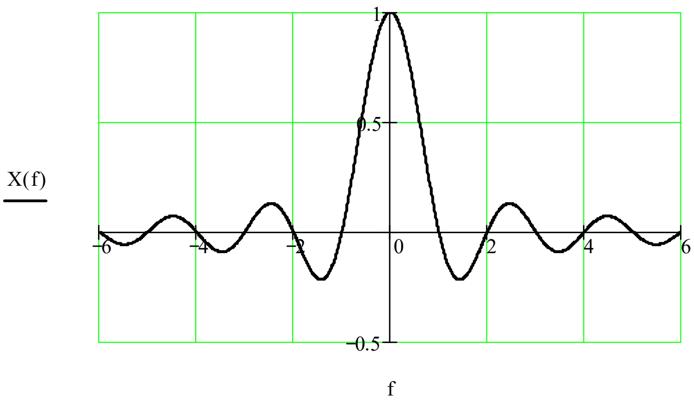
……………………………………………………………………………………………...............

On obtient donc : $\boxed{\mathbf{T_F(rect(t)) = sinc(f)}}$

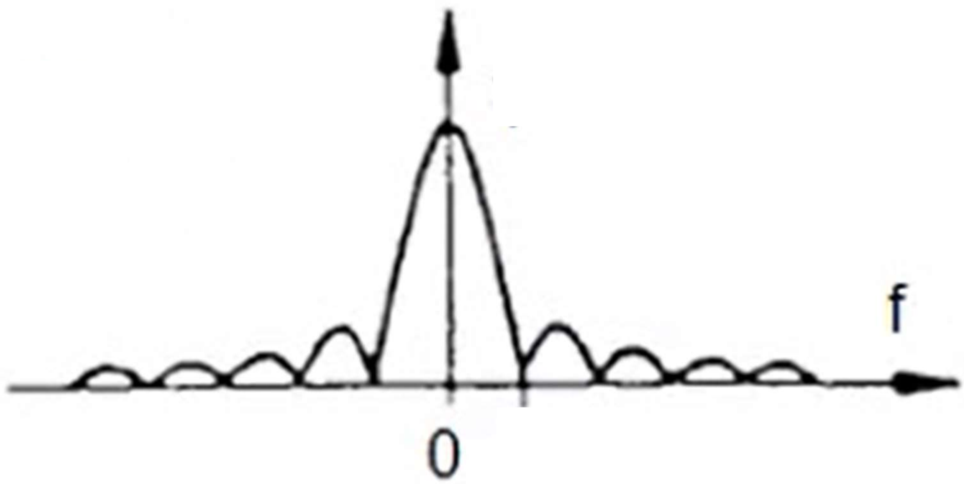
Espace temporel



Espace fréquentiel

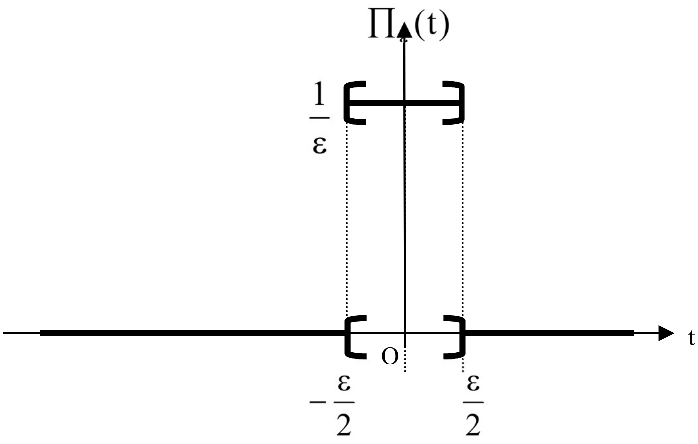


Spectre d'amplitude Tracer dans l'espace fréquentiel le spectre d'amplitude du signal rectangle. Il s'agit d'un spectre symétrique par rapport à la fréquence nulle.



2) Porte de largeur ε

$$\Pi_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \text{ si } |t| \le \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 \text{ si } |t| > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$



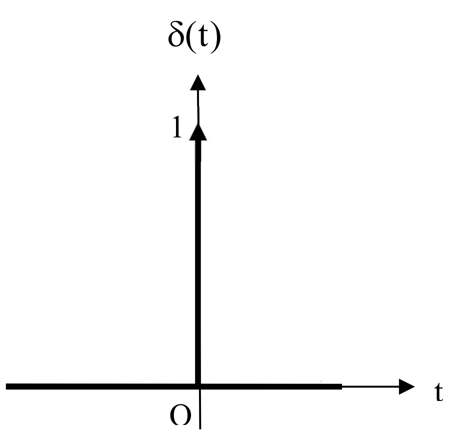
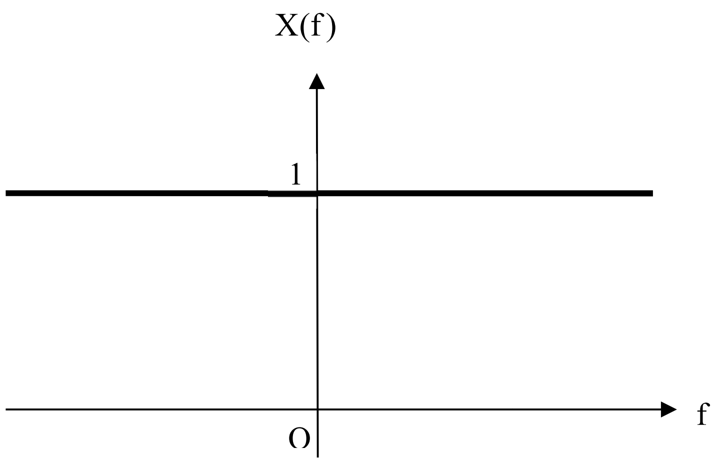
On remarque que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_\varepsilon(t)dt =$..

Impulsion de Dirac $\delta = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \Pi_\varepsilon(t)$ où $\varepsilon > 0$ et $\Pi_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \text{ si } |t| \le \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 \text{ si } |t| > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

Après calcul, on obtient : $T_F[\Pi_\varepsilon(t)] = \sin c(f\varepsilon) = \frac{\sin(\pi f\varepsilon)}{\pi f\varepsilon}$.

On admet que : $T_F[\delta(t)] = T_F\left[\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \Pi_\varepsilon(t)\right] = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} T_F[\Pi_\varepsilon(t)] = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sin c(f\varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin(\pi f\varepsilon)}{\pi f\varepsilon} = 1$

$$\boxed{\mathbf{T_F[\delta(t)] = 1}}$$

Espace temporel	Espace fréquentiel
	

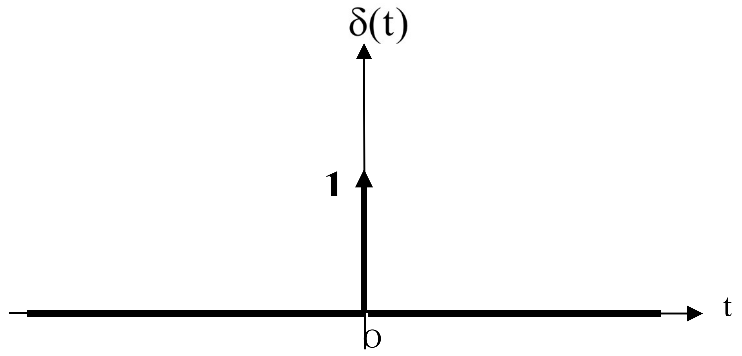
Compléments sur l'impulsion ou la distribution de Dirac

On appelle impulsion de Dirac : $\delta = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \prod_\varepsilon(t)$ où $\varepsilon > 0$

On définit parfois δ abusivement par : $\boxed{\boldsymbol{\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases}, \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1}}$

δ n'est pas une fonction, c'est une distribution, c'est pourquoi on l'appelle aussi distribution de Dirac.

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_\varepsilon(x)dx = 1$, par convention, on note donc : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$, et par convention sa représentation graphique est :



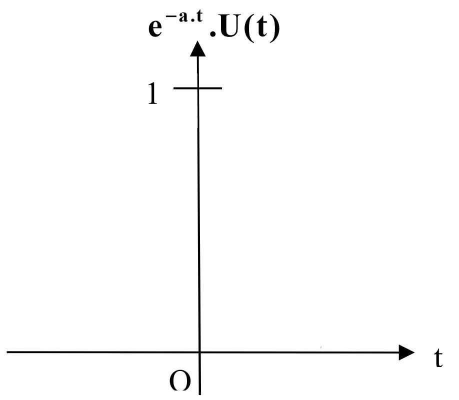
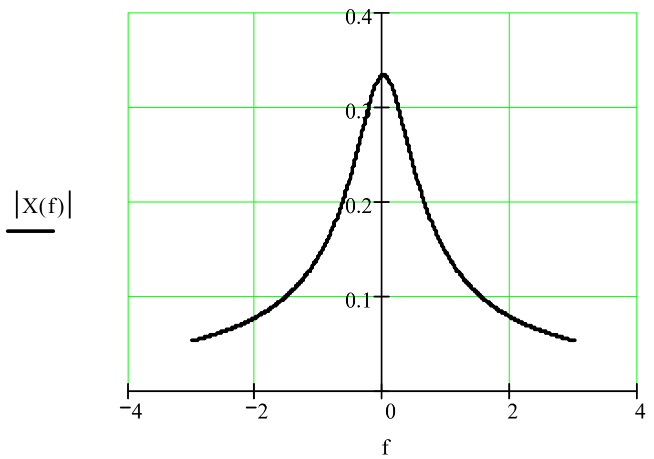
Remarque De nombreux théorèmes (convergence d'intégrales, de séries, inversion de limites en général…) reposent sur des hypothèses souvent très fortes portant sur les fonctions. Dans la majeure partie des cas, celles-ci ne sont pas vérifiées.

Le recours aux distributions permet d'élargir le champ d'application de ces théorèmes.

Une distribution est un concept plus général que celui de fonction. Il permet, entre autre, la formulation et donc le traitement de signaux discrets. Tous les calculs sur les fonctions s'appliquent aussi aux distributions.

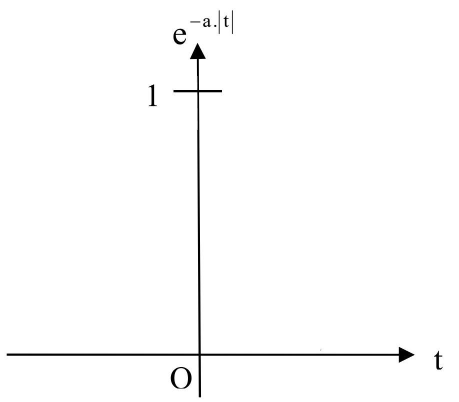
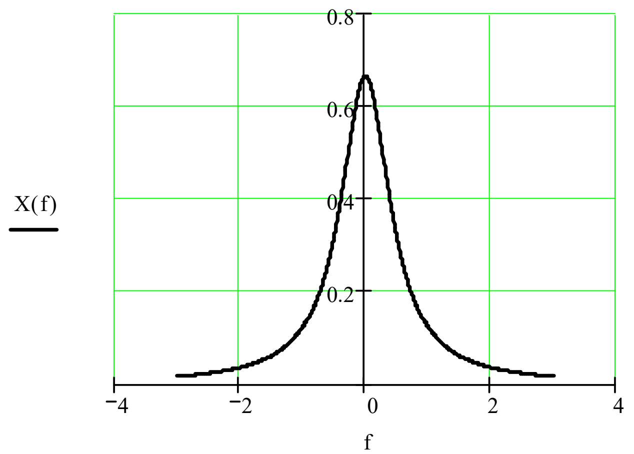
3) Signal exponentiel décroissant $\mathbf{x(t) = e^{-at}.U(t)}$ **où a>0.**

$$\boxed{\mathbf{T_F\left[e^{-a.t}.U(t)\right] = \frac{1}{a + 2j\pi f}}}$$

Espace temporel	Espace fréquentiel (a=3)
	

4) Signal exponentiel symétrique $\mathbf{x(t) = e^{-a.|t|}}$ **où a>0.**

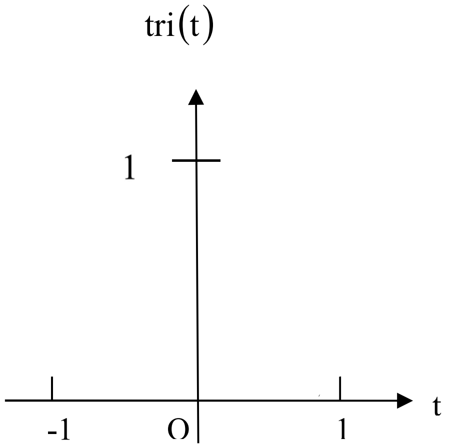
$$\boxed{\mathbf{T_F\left[e^{-a.|t|}\right] = \frac{2.a}{a^2 + (2.\pi.f)^2}}}$$

Espace temporel	Espace fréquentiel (a=3)
	

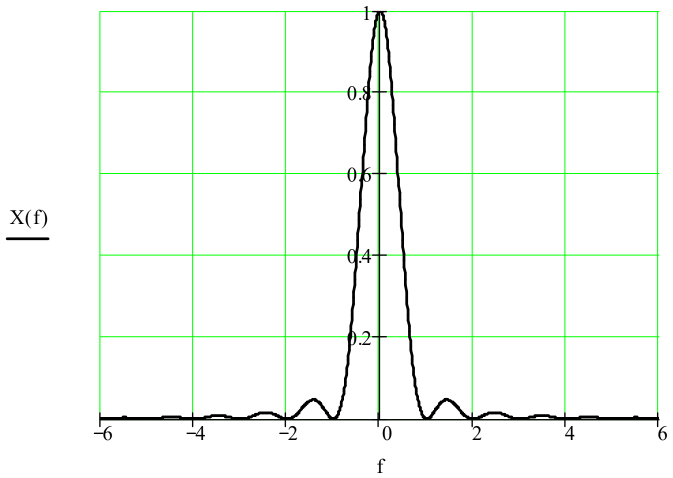
5) Signal fenêtre triangulaire $\mathbf{tri(t)} = \begin{cases} \mathbf{1 - |t| \ \ si \ \ |t| \le 1} \\ \mathbf{0 \ \ sinon} \end{cases}$

$$\boxed{\mathbf{T_F[tri(t)] = \sin^2 c(f)}}$$

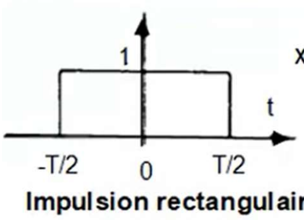
Espace temporel



Espace fréquentiel

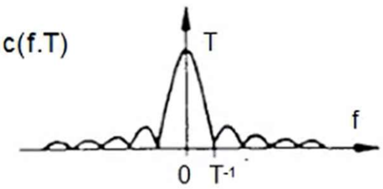


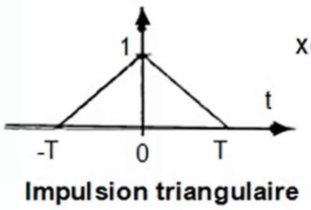
Pour résumer : spectre d'amplitude de signaux non périodiques



$x(t) = rect(\frac{t}{T})$

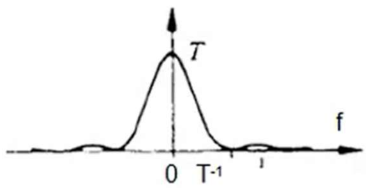
$X(j.f) = T.\frac{\sin(\pi.f.T)}{\pi.f.T} = T.sinc(f.T)$

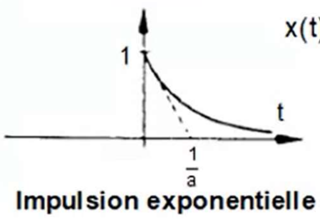




$x(t) = tri(\frac{t}{T})$

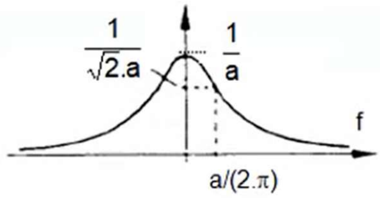
$X(j.f) = T.sinc^2(f.T)$





$x(t) = e^{-a.t}.\epsilon(t)$

$X(j.f) = \frac{1}{a + j.2.\pi.f}$



III. Propriétés de la transformation de Fourier

1) Linéarité

Si $X_1 = T_F\,[x_1]$ et $X_2 = T_F\,[x_2]$, alors $\boxed{\mathbf{T_F\,[\lambda\, x_1 + \mu\, x_2] = \lambda\ T_F\,[x_1] + \mu\ T_F\,[x_2] = \lambda . X_1 + \mu\ . X_2}}$
(λ, μ sont des nombres complexes).

✓ Exemple : $T_F\,[3\mathrm{tri}(t) + \mathrm{rect}(t)] =$……………………………………………………………….....................

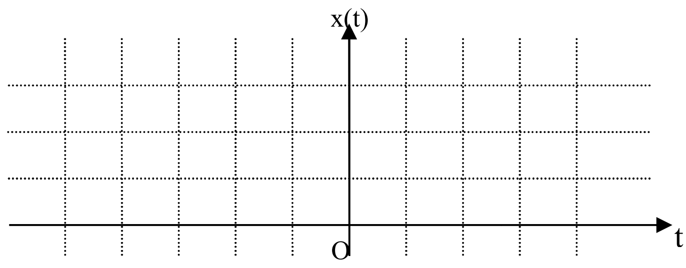
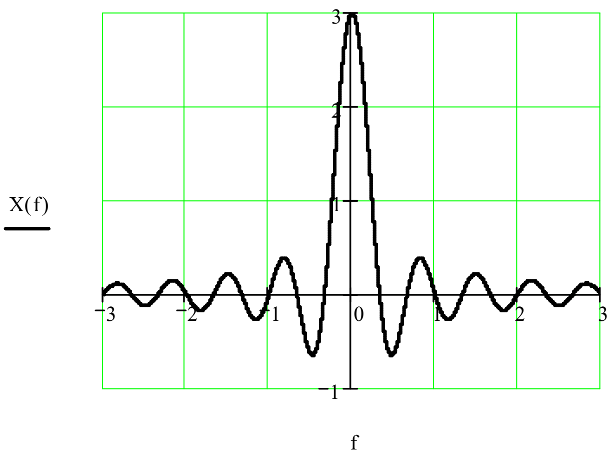
…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………….........

2) Transformée de Fourier de x(a.t) (Homothétie)

$$\boxed{\mathbf{T_F\,[x(a.t)] = \frac{1}{|a|} . X\left(\frac{f}{a}\right)} \text{ où } \mathbf{X(f) = T_F\,[x(t)].}}$$

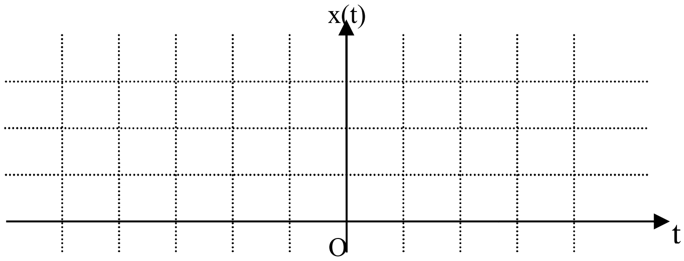
Exemples

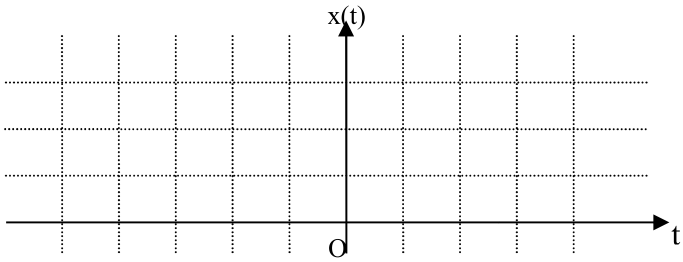
x(t)=rect(t/3) ……………………………...…......... ………………………………………... ………………………………………... ………………………………………...	Espace temporel 
……………………………...…......... ………………………………………... ………………………………………... ………………………………………... ……………………………...…......... ………………………………………... ………………………………………...	Espace fréquentiel 

3) Transformée de Fourier d'un signal décalé $x(t-t_0)$

$$\boxed{\mathbf{T_F\,[x(t-t_0)] = e^{-2j\pi.f.t_0}\,.X(f)\ \text{où}\ X(f) = T_F\,[x(t)]}}$$

Exemples

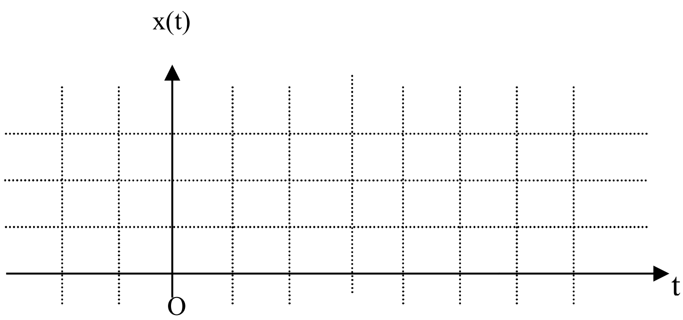
x(t)=rect(t-2) ……………………………………..….......... ……………………………………………….. ……………………………………………….. ………………………………………………..	

x(t)=tri(t+2) ……………………………………..….......... ……………………………………………….. ……………………………………………….. ………………………………………………..	

4) Transformée de Fourier d'un changement affine d'échelle x(at+b)

$$\boxed{\mathbf{T_F\,[x(at+b)] = e^{2j\pi.f.b/a}\,.\,\frac{1}{|a|}\,.\,X\left(\frac{f}{a}\right)\ \text{où}\ X(f) = T_F\,[x(t)]}}$$

Exemple

x(t)=tri(t/3-1) ……………………………………..….......... ……………………………………………….. ……………………………………………….. ……………………………………………….. ……………………………………………….. ………………………………………………..	

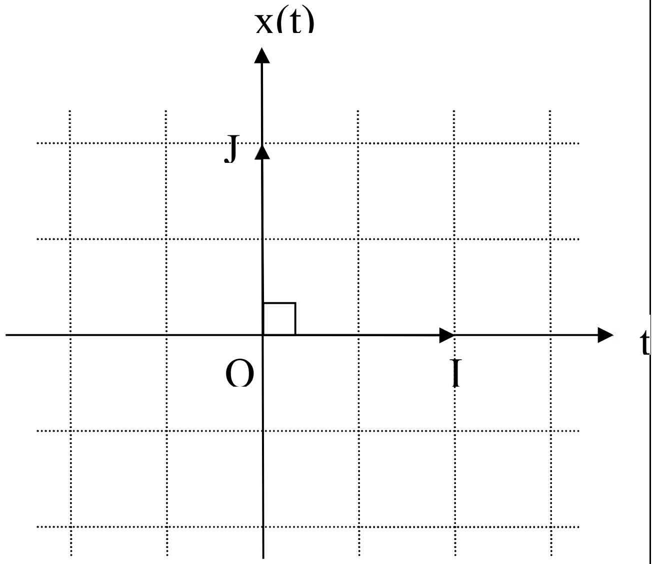
5) Transformée de Fourier de dérivées successives

$$\boxed{T_F\,[x'(t)] = 2j\pi.f.X(f) \quad \text{où} \quad X(f) = T_F\,[x(t)]}$$

Application

Retrouver la transformation de Fourier de : x(t)=tri(t) en calculant d'abord la transformation de Fourier de x'(t).

……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………



……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………

Généralisation

$T_F\,[x'(t)] = 2j\pi.f.X(f)$ où $X(f)= T_F\,[x(t)]$

donc $T_F\,[x''(t)]$=……………………………………………………………

donc $T_F\,[x^{(3)}(t)]$=……………………………………………………………

donc $T_F\,[x^{(n)}(t)]$=……………………………………………………………

IV. Produit de convolution et Transformation de Fourier

1) Définition

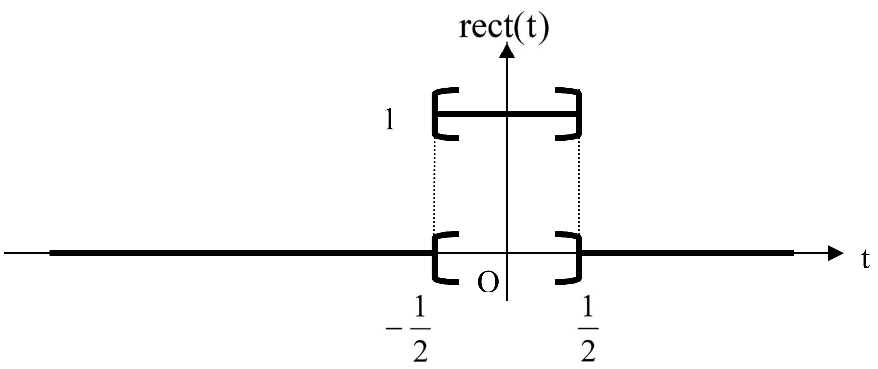
Soit f et g, deux fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$. On appelle produit de convolution de f par g, la fonction notée : $f * g$, définie par l'intégrale suivante :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du .$$

On peut aussi noter : $(f * g)(t) = f(t) * g(t)$

Exemples

- ✓ Déterminer le produit de convolution suivant : $\mathrm{rect}(t) * e^{-t}$, où $\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$



…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

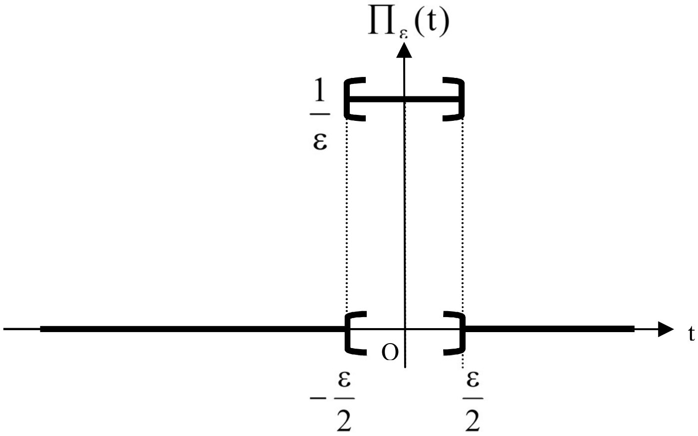
2) Propriétés Les fonctions f, g, g_1, g_2, h sont intégrables sur $\mathbb{R}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{1.\ f * g = g * f}$$
$$\mathbf{2.\ f * (g_1 + \lambda . g_2) = f * g_1 + \lambda . f * g_2}$$
$$\mathbf{3.\ (f_1 + \lambda f_2) * g = f_1 * g + \lambda . f_2 * g}$$
$$\mathbf{4.\ (f * g) * h = f * (g * h)}$$
$$\mathbf{5.\ (f * g)' = f' * g + f * g'}$$

3) Exemples

✓ Convolution par une porte de largeur *ε*

$$\prod_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} \text{ si } |t| \le \dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0 \text{ si } |t| > \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$



On remarque que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_\varepsilon(t)dt =$ ....

$(f * \prod_\varepsilon)(t) =$ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

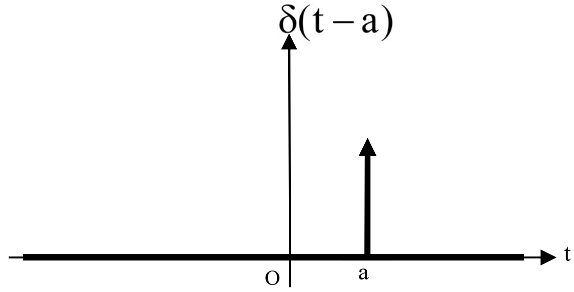
La convolution par une porte de largeur ε représente donc la valeur moyenne de f sur $\left[t - \frac{\varepsilon}{2}, t + \frac{\varepsilon}{2}\right]$.

Si f est continue alors : $\boxed{(f * \delta)(t) = f(t)}$

On dit que **l'impulsion de Dirac est l'élément neutre pour le produit de convolution.**

4) Convolution par une impulsion de Dirac décalée de a

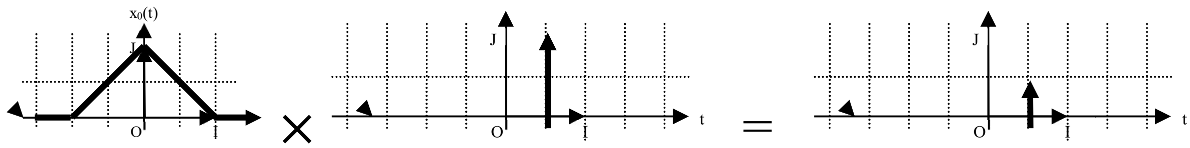
$$\delta(t-a) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq a \\ +\infty \text{ si } t = a \end{cases}$$



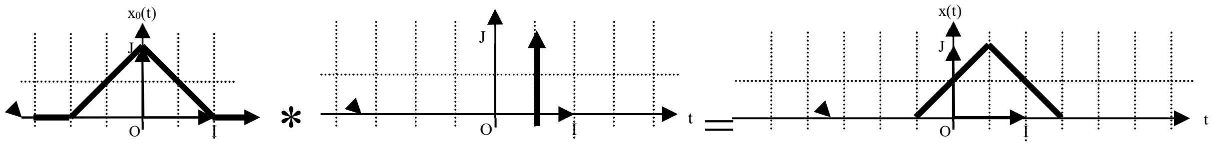
Produit de convolution   Si f est continue alors : $\boxed{f(t) * \delta(t-a) = f(t-a)}$

Attention Ne pas confondre avec le produit classique : $f(t) \times \delta(t - a) = f(a) \times \delta(t - a)$

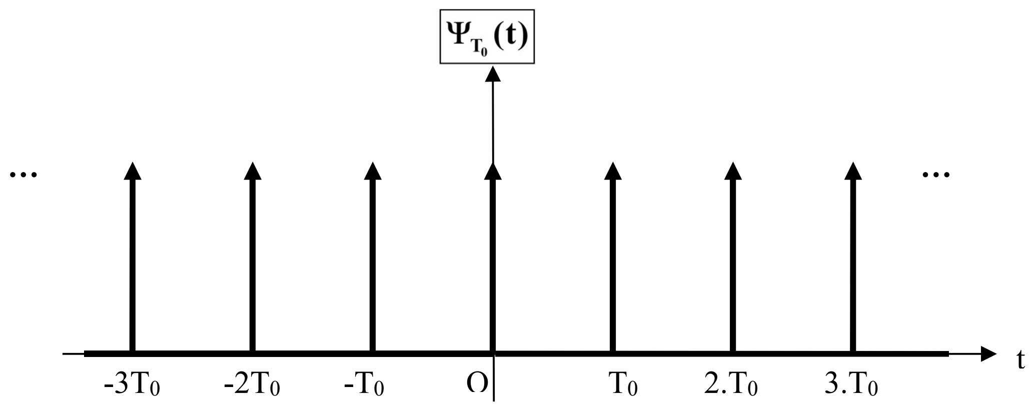
exemple : $\operatorname{tri}(t) \times \delta(t - 1/2) = \operatorname{tri}(1/2).\delta(t - 1/2)$



$\operatorname{tri}(t) * \delta(t - 1/2) = \operatorname{tri}(t - 1/2)$



5) Distribution en peigne de Dirac de période T_0 $\Psi_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k.T_0)$



Produit de convolution par un peigne de Dirac

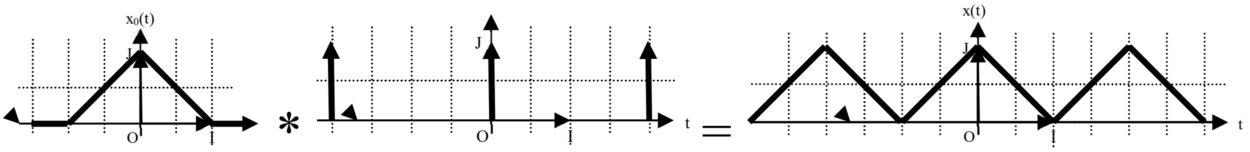
On admet que :

$$(\mathbf{f} * \Psi_{\mathbf{T_0}})(t) = \left(f * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k.T_0)\right)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t) * \delta(t - k.T_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t - k.T_0)$$

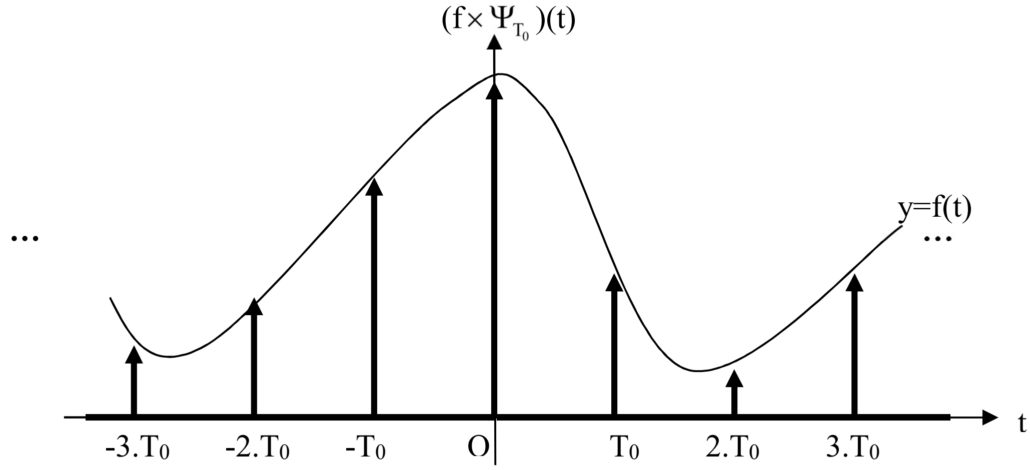
Si f est continue alors : $\boxed{\mathbf{(f * \Psi_{T_0})(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t - k.T_0)}}$

On obtient la somme des translatés du signal f, on dit que le signal f est "périodisé".

exemple : $\mathrm{tri}(t) * \Psi_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}(t - 2k)$



Remarque Ne pas confondre avec le produit « classique » d'une fonction par le peigne de Dirac de période T_0, et représenté graphiquement par :



On obtient ici l'échantillonnage du signal f à la période T_0.

5) Transformée de Fourier et produit de convolution

On admet que : $\boxed{\mathbf{T_F[x_1 * x_2] = X_1 \times X_2 \quad où \quad X_1 = T_F[x_1] \ et \ X_2 = T_F[x_2]}}$

Exemples

✓ $T_F(x * \delta) =$ ……………………………………………………………………………......

- ✓ $T_F\left(x(t) * \delta(t-a)\right) =$ ……………………………………………………………………………..........

- ✓ $T_F\left(\text{rect}(t) * \text{rect}(t)\right) =$ …………………………………………………………………………..........

V. Transformation de Fourier inverse

1) Définition / Théorème

On admet que le transformation de Fourier possède une transformation réciproque notée T_F^{-1}. On a alors :

$$\mathbf{X(f) = T_F\left(x(t)\right) \Leftrightarrow x(t) = T_F^{-1}\left(X(f)\right) \text{ ou encore : } X = T_F(x) \Leftrightarrow x = T_F^{-1}(X)}$$

Exemples

- ✓ $T_F^{-1}\left(\sin c(f)\right) =$ ……………… ; $T_F^{-1}\left(\sin c^2(f)\right) =$ .... ; $T_F^{-1}(1) =$ ………………

- ✓ En appliquant la transformation inverse aux exemples du §III.5, on peut alors retrouver les résultats du chapitre 1 :
  $(x * \delta)(t) = x(t)$; $x(t) * \delta(t-a) = x(t-a)$; $\text{rect}(t) * \text{rect}(t) = \text{tri}(t)$

2) Propriétés

La transformation de Fourier inverse possède donc des propriétés similaires à celles de la transformation de Fourier.

- ✓ Si $x_1 = T_F^{-1}[X_1]$ et $x_2 = T_F^{-1}[X_2]$, alors :
$$T_F^{-1}[\lambda X_1 + \mu X_2] = \lambda T_F^{-1}[X_1] + \mu T_F^{-1}[X_2]$$
- ✓ On note $x = T_F^{-1}[X]$: $T_F^{-1}[X(af)] = \frac{1}{|a|}.x\left(\frac{t}{a}\right)$ avec $a \neq 0$.
- ✓ On note $x = T_F^{-1}[X]$: $T_F^{-1}\left[e^{-2j\pi f t_0}.X(f)\right] = x(t-t_0)$
- ✓ On note $x = T_F^{-1}[X]$: $T_F^{-1}\left[(2j\pi f)^n.X(f)\right] = x^{(n)}(t)$

3) Exemples

- ✓ $T_F^{-1}\left[e^{-3j\pi f}.\sin c(f)\right] =$ ……………………………………………………………..

- ✓ $T_F^{-1}\left[\sin c(2f)\right] =$ …………………………………………………………………………

- ✓ $T_F^{-1}\left[\dfrac{1}{5+2j\pi f}\right] =$ ……………………………………………………………………...

- ✓ $T_F^{-1}\left[\dfrac{e^{-4j\pi f}}{5+2j\pi f}\right] =$ ……………………………………………………………………

4) Formule de réciprocité

Soit : $\mathbf{X(f) = T_F(x(t)) \Leftrightarrow x(t) = T_F^{-1}(X(f))}$.
On admet la formule dite de réciprocité suivante :

$$\mathbf{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-2j\pi ft}dt \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} X(f).e^{2j\pi ft}df = \frac{x(t^+) + x(t^-)}{2}}$$

- ✓ Cas particulier : Si x est continue en t, alors $x(t^+) = x(t^-) = x(t)$ et on a alors :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-2j\pi ft}dt \Leftrightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f).e^{2j\pi ft}df$$

- ✓ Conséquences : Si x est continue sur ℝ, on alors :

$$T_F[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-2j\pi ft}dt \Leftrightarrow T_F^{-1}[X(f)] = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f).e^{2j\pi ft}df \quad \forall t \in IR$$

On obtient donc des propriétés et formules de TF supplémentaires en échangeant :
T_F et T_F^{-1} ; f et t ; j et –j.

Formules supplémentaires

- ✓ $T_F\left[\text{tri}\left(\dfrac{t}{T}\right)\right] =$ ……………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………………...

- ✓ a>0 , $T_F\left(e^{-a|t|}\right) =$ ……………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………………...

- ✓ $T_F(\delta(t)) =$ ……………………………………………………………………..

- ✓ $T_F(\delta(t-t_0)) =$ ……………………………………………………………………...

  ………………………………………………………………………………………...

Propriétés supplémentaires

- ✓ $T_F(x(t-t_0))$=……………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

- ✓ $T_F(x'(t))$=…………………..……………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

- ✓ $T_F(x_1 * x_2)$=…………………..………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

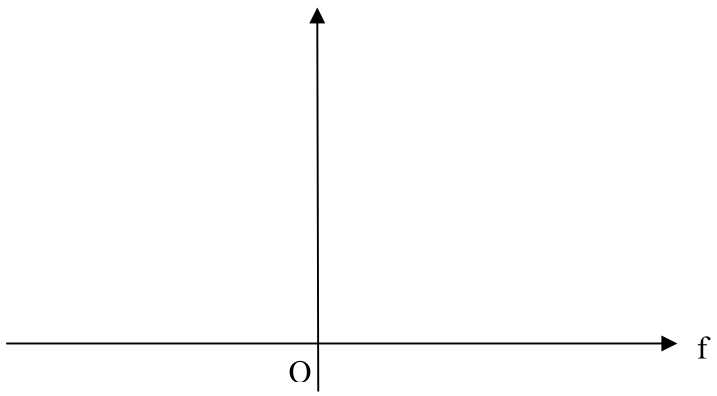
Transformation de Fourier d'un signal sinusoïdal

A l'aide de la formule d'Euler et d'une formule ci-dessus, calculons :

$T_F(\sin(2\pi t))$ = ...

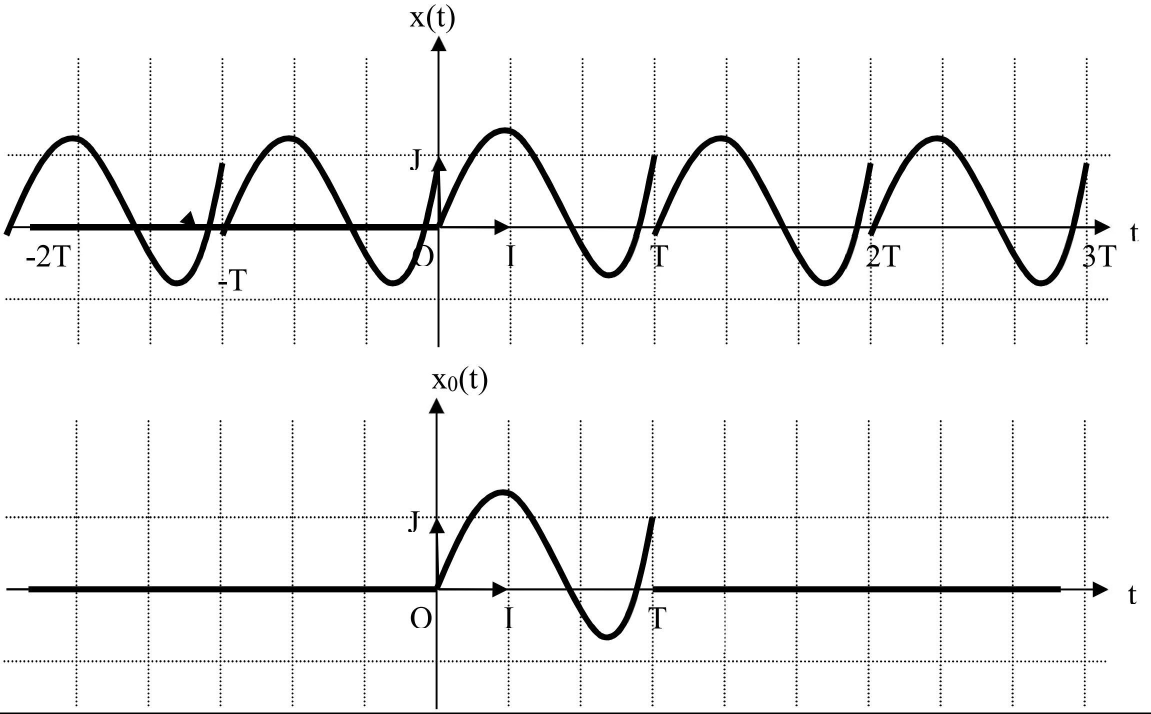
....

Espace fréquentiel



VI. Lien avec la série de Fourier

soit x un signal T-périodique, on considère le motif : $x_0(t) = \begin{cases} x(t) \text{ si } 0 \leq t < T \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$**. Soit X_0, la transformée de Fourier de x_0. Alors la transformée de Fourier de x est :** $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n . \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$**, où** $C_n = \frac{1}{T} . X_0\left(\frac{n}{T}\right)$**, on retrouve alors les formules des séries de Fourier.**



VII. Théorème de Parseval

1) Théorème

$$\textbf{Soit } X(f) = T_F\left[x(t)\right]\textbf{, on admet que : } \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df$$

Interprétation : Si x représente une onde en fonction du temps, $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$ est l'énergie totale de cette onde. La transformation de Fourier conserve donc l'énergie totale.

2) Exemple Appliquons cette formule au signal x(t)=rect(t), nous pourrons alors en déduire la valeur de l'intégrale : $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………….................

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

TABLEAU DE TRANSFORMEES DE FOURIER

Définitions

$$\mathrm{TF}[x(t)]=X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-2j\pi ft}.dt = \begin{cases} 2\int_{0}^{+\infty} x(t).\cos(2\pi ft).dt & \text{si x est paire} \\ -2j\int_{0}^{+\infty} x(t).\sin(2\pi ft).dt & \text{si x est impaire} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f).e^{2j\pi ft}.df = \begin{cases} x(t) \ \text{ si x est continue en t} \\ \dfrac{x(t^-)+x(t^+)}{2} \ \text{ si x n'est pas continue en t.} \end{cases}$$

Transformée de Fourier de fonctions usuelles

x(t) **ou** **TF^{-1} [X(f)]**	**TF[x(t)]** **ou** **X(f)**
Distribution de Dirac : $\delta(t)$	1
Fonction rectangle : $\mathrm{rect}(\frac{t}{T}) = \begin{cases} 1 \text{ si } \lvert t\rvert \le \frac{T}{2} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$	$T\dfrac{\sin \pi f}{\pi f} = T\sin c(Tf) = \dfrac{T\sin(\pi Tf)}{\pi Tf}$
Fonction exponentielle : $e^{-a\lvert t\rvert}$, où $a > 0$.	$\dfrac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
Fonction exponentielle : $e^{-at}.U(t)$, où $a > 0$.	$\dfrac{1}{a+2j\pi f}$
Signal triangulaire : $\mathrm{tri}(t) = \begin{cases} 1-\lvert t\rvert \ \text{ si } \lvert t\rvert \le 1 \\ 0 \ \text{ sinon} \end{cases}$	$\left(\dfrac{\sin \pi f}{\pi f}\right)^2 = \sin c^2(f)$

Propriétés de la transformation de Fourier

x(t) **ou** **TF^{-1} [X(f)]**	**TF[x(t)]** **ou** **X(f)**
$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(f)+bX_2(f)$
$x(t-t_0)$ « décalage temporel »	$e^{-2j\pi f t_0}X(f)$
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}.X(\frac{f}{a})$
$x(at+b)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}.e^{2j\pi\frac{b}{a}f}X(\frac{f}{a})$
$x'(t)$ « dérivation temporelle »	$2j\pi f.X(f)$
$x^{(n)}(t)$	$(2i\pi f)^n.X(f)$
$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(u)x_2(t-u)du$	$X_1(f).X_2(f)$
$e^{2j\pi t f_0}.x(t)$	$X(f-f_0)$ « décalage fréquentiel »
$-2j\pi t.x(t)$	$X'(f)$ « dérivation fréquentielle »
$(-2j\pi t)^n g(t)$	$X^{(n)}(f)$
$x_1(t).x_2(t)$	$(X_1 * X_2)(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(u)X_2(f-u)du$

On obtiendra des <u>propriétés supplémentaires</u> en échangeant dans les formules précédentes : TF en TF $^{-1}$ et $\begin{cases}\textbf{x en X}\\ \textbf{t en f}\\ \textbf{j en - j}\end{cases}$

<u>Formule de Parseval</u> $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$

Exercices de la partie B

Exercice 1 : Soit x, la fonction définie par : $x(t)=\begin{cases}1 \text{ si } -3<t<-2\\ t-6 \text{ si } 6<t<7\\ -t+8 \text{ si } 7<t<8\\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$.

Tracer la représentation graphique de x. Exprimer x à l'aide des fonction rectangle et triangle, et en déduire la transformée de Fourier de x.

Exercice 2 : Dans un circuit RC en série, on a l'équation différentielle suivante : $\tau\dfrac{ds}{dt}+s(t)=e(t)$ où e(t) et s(t) sont les signaux respectivement d'entrée et de sortie et $\tau = RC$.

1) Appliquer la transformation de Fourier à cette équation et en déduire la fonction de transfert du circuit : $H(f)=\dfrac{S(f)}{E(f)}$ où E et S sont les transformées de Fourier respectives de e et s.
2) On note h, la transformée inverse de H, exprimer s en fonction de e et h. Que se passe-t-il si e est une impulsion de Dirac ? On dit alors que s est la réponse impulsionnelle.
3) Calculer h.
4) Calculer s lorsque e est une porte : $e(t)=\begin{cases}E \text{ si } 0\le t\le T\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$ où T>0 et E>0.

Exercice 3 : On considère la fonction x, définie par : x(t) =1 si $|t|\le 1$; x(t)=$2-|t|$ si $1\le|t|\le 2$; x(t)=0 sinon.

1) Représenter la fonction x(t)
2) Calculer sa transformée de Fourier par le calcul intégral
3) Calculer sa transformée en écrivant x(t) comme somme de fonctions triangle
4) Calculer sa transformée de Fourier en utilisant la dérivée de x(t).

Exercice 4 :

Déterminer h(t)=sin(3t)*rect(t) et $e^{-x}.U(x)*x.U(x)$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

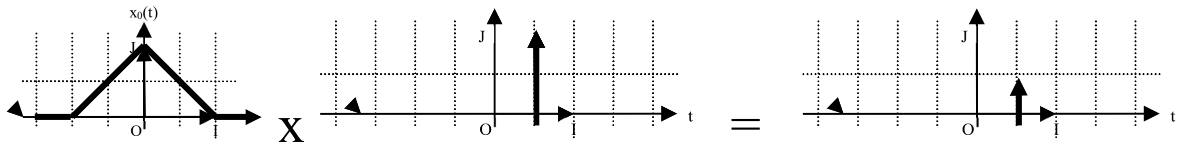
....

....

Ne pas confondre les quatre opérations …

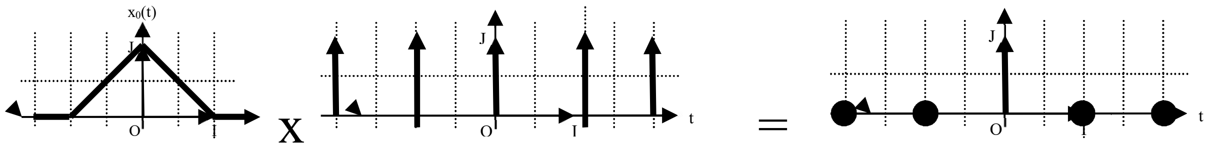
✓ **Le prélèvement** $\mathbf{f(t)\times\delta(t-a)=f(a).\delta(t-a)}$

exemple : $\mathrm{tri}(t)\times\delta(t-1/2)=\mathrm{tri}(1/2).\delta(t-1/2)$



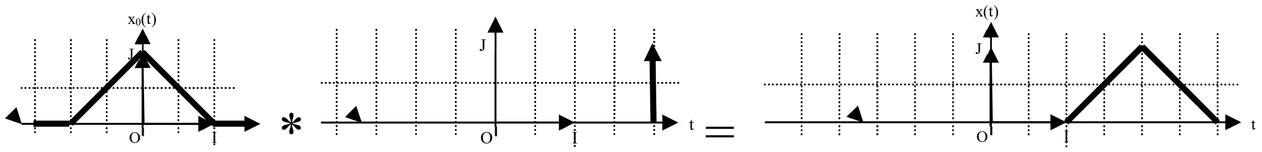
✓ **Le prélèvement multiple** $\mathbf{f(t)\times\Psi_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(kT).\delta(t-kT)}$

exemple : $\mathrm{tri}(t)\times\Psi_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{tri}(k).\delta(t-k)$



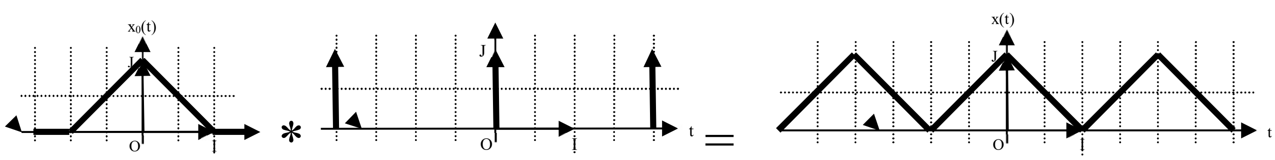
✓ **La translation** $\mathbf{f(t)*\delta(t-a)=f(t-a)}$

exemple : $\mathrm{tri}(t)*\delta(t-2)=\mathrm{tri}(t-2)$



✓ **La translation multiple ou périodisation** $\mathbf{f(t)*\Psi_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(t-kT)}$

exemple : $\mathrm{tri}(t)*\Psi_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{tri}(t-2k)$

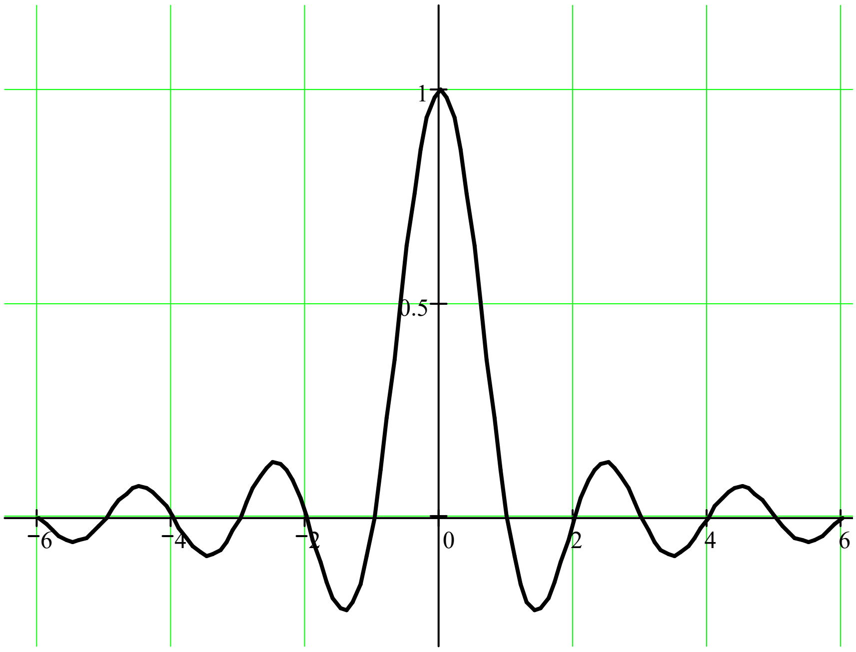


III. Sinus cardinal (sinusoïde amortie)

1) Définition

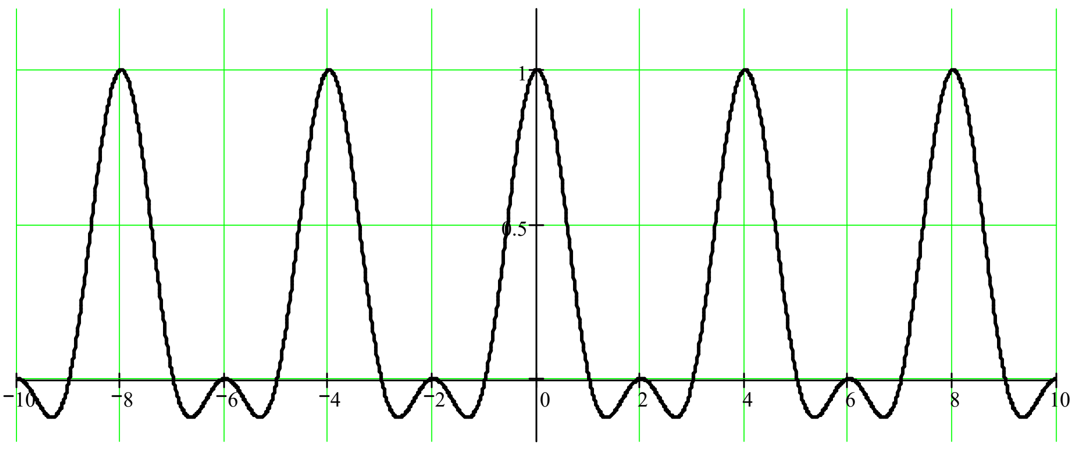
On appelle sinus cardinal, la fonction notée sinc, définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\mathbf{sinc(t) = \dfrac{sin(\pi t)}{\pi t}}$

2) Représentation graphique (voir cours de première année)

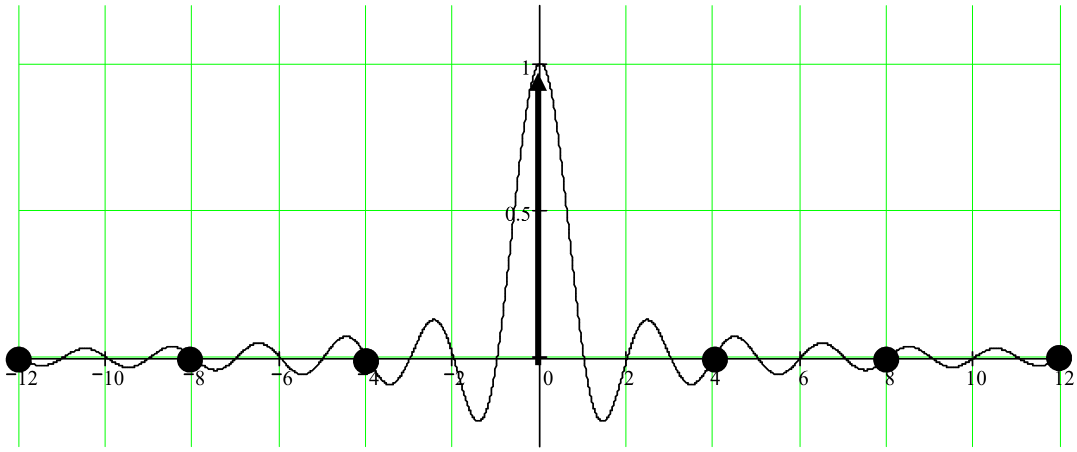


3) Produit de convolution avec le peigne de Dirac

Périodisation du sinus cardinal à la période 4 : $(\mathrm{sinc} * \Psi_4)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dfrac{\sin \pi(t-4k)}{\pi(t-4k)}$



<u>Remarque</u> : A ne pas confondre avec $(\sin c \times \Psi_4)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi 4k}{\pi 4k}.\delta(t-4k)$ qui est l'échantillonnage du sinus cardinal à la période 4 :



……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………