BACHELOR UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE

Ressource R2-04 : OUTILS MATHEMATIQUES ET LOGICIELS

Chapitre 9 : EDLCC du premier et du second ordre

Circuit RLC :

q est la charge du condensateur, C la capacité et L l'inductance de la bobine.

On a : $i = \frac{dq}{dt}$, $u_{MN} = \frac{q}{C}$ et $u_{NM} = L\frac{di}{dt} + Ri = -\frac{q}{C}$ donc q vérifie l'équation différentielle :

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \text{ ou encore } \boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0}$$

avec les notations : $\lambda = \frac{L}{2R}$ constante d'amortissement, et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsation propre du circuit.

Freinage d'un disque :

La vitesse angulaire d'un disque, notée v, vérifie : $\boxed{v" = kv}$

Mouvement d'un pendule de torsion :

Moment d'inertie J, élongation angulaire θ, constante de torsion C, couple de freinage $-B\frac{d\theta}{dt}$.

θ vérifie : $\boxed{J\frac{d^2\theta}{dt^2} + B\frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0}$

Mouvement d'un ressort :

Objet de masse m accroché à un ressort de masse négligeable. k raideur du ressort.

$x(t)$ longueur du ressort à l'instant t. x vérifie : $\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0}$.

Mouvement d'un pendule pesant :

$$J\alpha" + mga\sin(\alpha) = 0$$

Lorsque les oscillations sont de faible amplitude, c'est-à-dire α « petit », on remplace $\sin(\alpha)$ par α et l'équation devient alors : $\boxed{J\alpha" + mga \times \alpha = 0}$

Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr
Bureau A042 - 04 94 14 21 15
http://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=527

TP10 - Partie A : Rappels sur les EDLCC du premier ordre

On appelle équation différentielle <u>linéaire à coefficients constants du premier ordre</u> toute équation de la forme :
$a.y'(t) + y(t) = f(t)$ (E)
où $a \neq 0$, b sont des constantes réelles, y une fonction inconnue (que l'on cherche à déterminer) et f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On note aussi cette équation :
$a.\frac{dy}{dt} + y = f$ (E)
La fonction $t \mapsto f(t)$ est appelée <u>second membre</u> de l'équation (E).
L'équation : $a.\frac{dy}{dt} + y = 0$ (E_0) est appelée <u>équation différentielle sans second membre</u> associée à (E).

<u>Théorème</u> : Les solutions de l'EDLCC du premier ordre $a.\frac{dy}{dt} + y = f$ (E) sont obtenues de la façon suivante :
a) On résout l'équation sans second membre associée, les solutions sont : $y_0(t) = K.e^{-\frac{t}{a}}$
b) On cherche une solution particulière de l'équation (E), on la note y_P
c) Les solutions de (E) sont alors $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$. Ces solutions sont aussi appelées "solution générale" de l'équation (E).

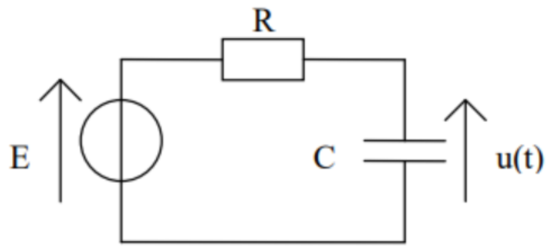
Recherche d'une solution particulière

Forme du second membre $t \mapsto f(t)$	Forme de la solution particulière cherchée $t \mapsto y_p(t)$
$f(t) = \text{constante}$	$y_p(t) = \text{constante}$
$f(t) = \text{polynôme}$	$y_p(t) = \text{polynôme de même degré}$
$f(t) = \alpha.\cos(mt) + \beta.\sin(mt)$ où α, β et m sont des réels	$y_p(t) = A.\cos(mt) + B.\sin(mt)$ où A et B sont des constantes.
$f(t) = g(t).e^{m.t}$ où m est un réel.	$y_p(t) = z(t).e^{m.t}$

<u>Théorème de superposition</u> (lorsque le second membre de (E) est une somme de fonctions)
Soit l'équation à résoudre : $a.\frac{dy}{dt} + y = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$ (E),
Si $t \mapsto y_1(t)$ est une solution particulière de l'équation $a.\frac{dy}{dt} + y = f_1(t)$,
Si $t \mapsto y_2(t)$ est une solution particulière de l'équation $a.\frac{dy}{dt} + y = f_2(t)$,
Et si $t \mapsto y_3(t)$ est une solution particulière de l'équation $a.\frac{dy}{dt} + y = f_3(t)$,
Alors la fonction $t \mapsto y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$ est une solution particulière de (E) .
<u>Définition / Théorème</u> L'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) $a.y'(t) + y(t) = f(t)$ possède une infinité de solutions sur I notées : $y_G(t)=y_0(t)+y_P(t)$.
<u>Condition initiale</u> : il existe une unique solution y de (E) sur I, vérifiant la condition initiale : $y(t_0)=y_0$, où t_0 et y_0 sont des valeurs données dans l'énoncé du problème.

EXERCICES

1) <u>Résoudre l'EDLCC ci-dessous, sachant que le circuit est initialement au repos.</u>



$$RCu' + u = E.$$

2) Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$: $3\frac{dy}{dt} - 2y = 2t + 1$ (on cherchera une solution particulière y_p sous la forme d'un polynôme de degré 1.), avec la condition initiale : $y(0) = 1$.
3) Résoudre : $5y' - 2y = t^2$
4) <u>Pour les poursuites d'études</u> :_Résoudre les EDLCC du premier ordre suivantes :

$2y' - y = x^3 - x + 2$; $2.y' - 3.y = \cos x - 2\sin x$; $y' - 2y = e^{2x}(x^2 - 3)$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………...

Partie B : EDLCC du second ordre

Cette deuxième partie est consacrée à l'étude des Equations Différentielles Linéaires à Coefficients Constants du second ordre. Ces équations différentielles se rencontrent par exemple dans l'étude des régimes transitoires pour des dipôles R, L, C

I. Définition / Résolution

Introduction Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : $y'' + y' - 2y = 0$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

<u>Théorème/ Définition</u> : On appelle <u>équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre</u> toute équation de la forme : (E) $a.y''(t)+b.y'(t)+c.y(t)=f(t)$ (où $a\neq 0$, b et c sont des réels et f est une fonction continue sur I).

On note aussi : $a.\frac{d^2y}{dt^2}+b.\frac{dy}{dt}+c.y(t)=f(t)$ (E)

Résoudre l'équation (E), c'est rechercher toutes les fonctions y deux fois dérivables sur I et vérifiant (E). Pour cela :

a) On résout l'équation sans second membre associée :

$$(E_0)\quad a.y''(t)+b.y'(t)+c.y(t)=0$$

On résout l'équation caractéristique : $a.r^2+b.r+c=0$

- si $\Delta>0$, r_1 et r_2 sont les solutions réelles de l'équation caractéristique et les solutions de (E_0) sont alors $y_0(t)=K_1e^{r_1t}+K_2e^{r_2t}$ où K_1 et K_2 sont des constantes réelles

- si $\Delta=0$, r_1 est solution double de l'équation caractéristique et les solutions de (E_0) sont alors $y_0(t)=e^{r_1t}(K_1+K_2t)$ où K_1 et K_2 sont des constantes réelles.

- si $\Delta<0$, $r_1=\alpha+i\beta$ et $r_2=\overline{r_1}$ sont les solutions complexes de l'équation caractéristique et les solutions de (E_0) sont alors

$y_0(t)=e^{\alpha t}(K_1\cos(\beta t)+K_2\sin(\beta t))$ où K_1 et K_2 sont des constantes réelles.

b) On recherche une solution particulière de (E), que l'on note y_p.

c) Les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme : $y_G(t)=y_0(t)+y_p(t)$, appelées solutions générales de (E).

<u>Recherche d'une solution particulière</u> :

Dans les cas les plus courants, on cherchera une solution particulière de l'équation $a.\frac{d^2y}{dt^2}+b.\frac{dy}{dt}+c.y(t)=f(t)$ (E), du même type que la fonction f apparaissant au second membre de (E).

Forme du second membre $t\mapsto f(t)$	Forme de la solution particulière cherchée $t\mapsto y_p(t)$
$f(t)=\text{constante}$	$y_p(t)=\text{constante}$
$f(t)=\text{polynôme}$	$y_p(t)=\text{polynôme de même degré}$
$f(t)=\alpha.\cos(mt)+\beta.\sin(mt)$ où α,β et m sont des réels	$y_p(t)=A.\cos(mt)+B.\sin(mt)$ où A et B sont des constantes.
$f(t)=g(t).e^{m.t}$ où m est un réel.	$y_p(t)=z(t).e^{m.t}$

<u>Théorème de superposition</u> (lorsque le second membre de (E) est une somme de fonctions)

Soit l'équation à résoudre : $a.\frac{d^2y}{dt^2}+b.\frac{dy}{dt}+cy(t)=f_1(t)+f_2(t)+f_3(t)$ (E),

Si $t\mapsto y_1(t)$ est une solution particulière de l'équation $a.\frac{d^2y}{dt^2}+b.\frac{dy}{dt}+cy(t)=f_1(t)$,

Si $t\mapsto y_2(t)$ est une solution particulière de l'équation $a.\frac{d^2y}{dt^2}+b.\frac{dy}{dt}+cy(t)=f_2(t)$,

Et si $t\mapsto y_3(t)$ est une solution particulière de l'équation $a.\frac{d^2y}{dt^2}+b.\frac{dy}{dt}+cy(t)=f_3(t)$,

Alors la fonction $t\mapsto y_1(t)+y_2(t)+y_3(t)$ est une solution particulière de (E).

Remarque Ce résultat s'étend au cas où f, le second membre de (E) est la somme d'un nombre quelconque de fonctions.

II. Etude d'exemples

Exemples Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

- ✓ $y''+y'-2y = x^2 - 4$ (E)

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

- ✓ $L\frac{d^2i}{dt^2}+R.\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=E\,(E)$ où R, L, C et E sont des constantes réelles non nulles telles que : $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

<u>Equation différentielle du second ordre avec conditions initiales</u>

L'équation différentielle linéaire du second ordre (E) $a.\frac{d^2y}{dt^2}+b.\frac{dy}{dt}+cy(t)=f(t)$ possède une infinité de solutions sur I notées : $y_0(t)=y_0(t)+y_p(t)$. Il existe une unique solution y de (E) sur I, vérifiant les conditions initiales : $y(t_0)=y_0$ et $y'(t_0)=y_1$ où t_0, y_0 et y_1 sont des valeurs données dans l'énoncé du problème.

<u>Exemples</u>

Résoudre l'équation différentielle (E) sur ℝ : $\begin{cases} y''-2y'+y=x.e^x \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

Exercices du chapitre 4 :

Exercice 1 EDLCC du 2nd ordre

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y''-y'-2.y=6.x^2$
2) $y''+2.y'+5.y=\cos(2x)+2.\sin(2x)$
3) $\begin{cases} y''-4.y'+3.y=-\frac{4}{5}.x.e^{-x} \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$
4) $\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2}-\omega^2 y(t)=0 \\ y(0)=0,\ y'(0)=A \end{cases}$ où ω est une constante réelle non nulle.
5) $\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2 y(t)=0 \\ y(0)=1,\ y'(0)=0 \end{cases}$ où ω est une constante réelle non nulle.
6) Pour les poursuites d'études : (extrait épreuves ITII)

Question 5 On considère l'équation différentielle $y''-6y'+10y=f(t)$.

L'équation caractéristique associée est :

Pour $f(t)=0$ la solution générale est :

$y(t) =$

Pour $f(t)=10t^2-2t+6$ la solution telle que $y(0)=y'(0)=0$ est :

$y(t) =$

Retrouver les solutions en appliquant la transformation de Laplace.

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………………………...