Exercice 1 Linéarisation à l'aide des formules d'Euler et calcul intégral (6 pts)

1) A l'aide des formules d'Euler, linéariser : $f(t) = \sin(2t).\cos(3t)$

$$f(t) = \frac{e^{2jt} - e^{-2jt}}{2j} \cdot \frac{e^{3jt} + e^{-3jt}}{2}$$

$$= \frac{1}{4j}\left(e^{2jt} - e^{-2jt}\right) \cdot \left(e^{3jt} + e^{-3jt}\right)$$

$$= \frac{1}{4j}\left(e^{5jt} + e^{-jt} - e^{jt} - e^{-5jt}\right)$$

$$= \frac{1}{4j}\left[e^{5jt} - e^{-5jt} - \left(e^{jt} - e^{-jt}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4j}\left(2j\sin(5t) - 2j\sin t\right)$$

$$= \frac{2j}{4j}\left(\sin(5t) - \sin t\right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(\sin(5t) - \sin t\right)$$

2) Calculer la valeur de l'intégrale suivante : (on pourra récupérer les résultats de la question 1))

$K = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(t)dt =$ 0, en effet : $f(t) = \sin(2t) \cdot \cos(3t)$

f est le produit d'une fonction impaire $(\sin(2t))$ et d'une fonction paire $(\cos(3t))$. f est donc impaire.

K est l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0 : $[-\pi/6 ; \pi/6]$, donc $K = 0$.

3) Montrer à l'aide de deux méthodes différentes que l'intégrale ci-dessous est nulle :

$I = \int_0^{\frac{2\pi}{5}} g(t)dt$ où $g(t) = \sin(5t).cos^2(5t)$

Méthode 1 $t \mapsto \sin(5t)$ est impaire

$t \mapsto \cos(5t)$ est paire donc $t \mapsto \cos^2(5t)$ est paire

+ g étant le produit d'une fonction paire par une fonction impaire, g est impaire

+ de plus g est $\frac{2\pi}{5}$ - périodique, en effet :

$$g\left(t+\frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(5\left(t+\frac{2\pi}{5}\right)\right).\cos^2\left(5\left(t+\frac{2\pi}{5}\right)\right)$$

$$= \sin(5t+2\pi).\cos^2(5t+2\pi)$$

$$g\left(t+\frac{2\pi}{5}\right) = \sin(5t).\cos^2(5t) = g(t)$$

Comme l'intervalle $[0; \frac{2\pi}{5}]$ est de longueur la période de g, alors on a : $I = \int_{-\pi/5}^{\pi/5} g(t)\,dt = 0$, puisqu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0.

Méthode 2 $I = \int_0^{2\pi/5} \sin(5t).\cos^2(5t)\,dt$

On applique la formule $\int u'u^2\,dt = \frac{u^3}{3} + cte$ avec $u = \cos(5t)$ et $u' = -5\sin(5t)$. Donc :

$$I = -\frac{1}{5}\int_0^{2\pi/5} -5\sin(5t).\cos^2(5t)\,dt = -\frac{1}{5}\left[\frac{\cos^3(5t)}{3}\right]_0^{2\pi/5} = \frac{-1}{15}\Big(\underbrace{\cos^3(2\pi)}_{1} - \underbrace{\cos^3 0}_{1}\Big)$$

$$= 0$$

<u>Exercice 2</u> Calcul d'intégrales – suivez bien les instructions ! (5 pts)

1) Quelle est la formule permettant de calculer une intégrale par intégration par parties ?

$$\int_a^b U.V'\,dt = [U.V]_a^b - \int_a^b U'V\,dt$$

2) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que l'intégrale ci-dessous est égale à la valeur indiquée :

$K = \int_0^{\pi/2} \cos(3x).(2x+1)dx = -\frac{3\pi+5}{9}$

On pose $\begin{cases} U = 2x+1 \\ V' = \cos(3x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = 2 \\ V = \frac{\sin(3x)}{3} \end{cases}$

$K = \left[(2x+1)\frac{\sin(3x)}{3} \right]_0^{\pi/2} - \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \sin(3x)\,dx$

$= (\pi+1)\frac{\overbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}^{=-1}}{3} - 0 - \frac{2}{3}\left[-\frac{\cos(3x)}{3} \right]_0^{\pi/2}$

$= -\frac{\pi+1}{3} + \frac{2}{9}\left(\underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{0} - \underbrace{\cos 0}_{1} \right)$

$= -\frac{\pi+1}{3} - \frac{2}{9} = -\frac{3(\pi+1)}{9} - \frac{2}{9}$

$= \frac{-3\pi-5}{9}$

$K = -\frac{3\pi+5}{9}$

3) a) Montrer que $1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$

$1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que l'intégrale ci-dessous est égale à la valeur indiquée :

$L = \int_0^1 2x.\arctan(x)dx = \frac{\pi}{2} - 1$ (*Rappel* : $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$)

$\begin{cases} U = \arctan x \\ V' = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = \frac{1}{1+x^2} \\ V = x^2 \end{cases}$

$L = \left[x^2.\arctan x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

$$I = \arctan 1 - 0 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left[x - \arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Exercice 3 : Factorisation de polynômes, DSES de fraction et calcul intégral
On justifiera le résultat obtenu à chaque question. (9 pts)

1) Factoriser dans $\mathbb{R}$: $B(x) = x^5+4x^4+6x^3+6x^2+5x+2$ (Indication : on montrera que B a une racine multiple et que $B(j) = 0$).

$B(-1) = -1+4-6+6-5+2 = 0$

$B'(x) = 5x^4+16x^3+18x^2+12x+5 \Rightarrow B'(-1) = 5-16+18-12+5 = 0$

$B''(x) = 20x^3+48x^2+36x+12 \Rightarrow B''(-1) = -20+48-36+12 \neq 0$

-1 est donc une racine double de B, et B est divisible par $(x+1)^2$

De plus, $B(j) = j^5+4j^4+6j^3+6j^2+5j+2 = j^2+4j-6j-6+5j+2$

$B(j) = 0$ et comme $B \in \mathbb{R}[X]$, alors $B(-j) = 0$

B est donc aussi divisible par $(x-j)(x+j) = x^2+1$

B est donc factorisable par $(x+1)^2(x^2+1) = (x^2+2x+1)(x^2+1)$

$= x^4+2x^3+2x^2+2x+1$

$$\begin{array}{r|l} x^5+4x^4+6x^3+6x^2+5x+2 & x^4+2x^3+2x^2+2x+1 \\ \hline -(x^5+2x^4+2x^3+2x^2+x) & x+2 \\ 2x^4+4x^3+4x^2+4x+2 & \\ -(2x^4+4x^3+4x^2+4x+2) & \\ 0 & \end{array}$$

La factorisation de B dans $\mathbb{R}$ est donc :

$B(x) = (x+1)^2(x^2+1)(x+2)$

2) Montrer que la fraction F ci-dessous n'a pas de partie entière, puis réduire la fraction F si besoin est :

$$F(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{2x+4}{x^5+4x^4+6x^3+6x^2+5x+2}$$

Comme deg A = 1 < deg B = 5, alors F n'a pas de partie entière

$$F(x) = \frac{2(x+2)}{(x+1)^2(x^2+1)(x+2)} = \frac{2}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

3) Ecrire la forme de la DSES dans l'ensemble des réels de la fraction irréductible et sans partie entière ci-dessous. Calculer les coefficients.

$$G(x) = \frac{1}{(x+1)^2.(x^2+1)}$$

$$G(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}.$$

$$a = \left[(x+1)^2 G(x)\right]_{x=-1} = \left[\frac{1}{x^2+1}\right]_{x=-1} = \frac{1}{2}$$

$$cj+d = \left[(x^2+1)G(x)\right]_{x=j} = \left[\frac{1}{(x+1)^2}\right]_{x=j} = \frac{1}{(j+1)^2} = \frac{1}{j^2+2j+1} = \frac{1}{2j}$$

$$cj+d = -\frac{1}{2}j \iff \begin{cases} c = -\frac{1}{2} \\ d = 0 \end{cases}$$

Calcul de b : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,G(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{ax}{x^2} + \frac{bx}{x} + \frac{cx^2}{x^2}\right)$

$$\iff 0 = 0 + b + c \iff b = -c = \frac{1}{2}$$

Conclusion

$$G(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1}$$

4) En déduire les primitives de la fraction F.

$$F(x) = 2G(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+1}$$

$$\int F(x)\,dx = -\frac{1}{x+1} + \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + cte \quad \forall x \neq -1$$