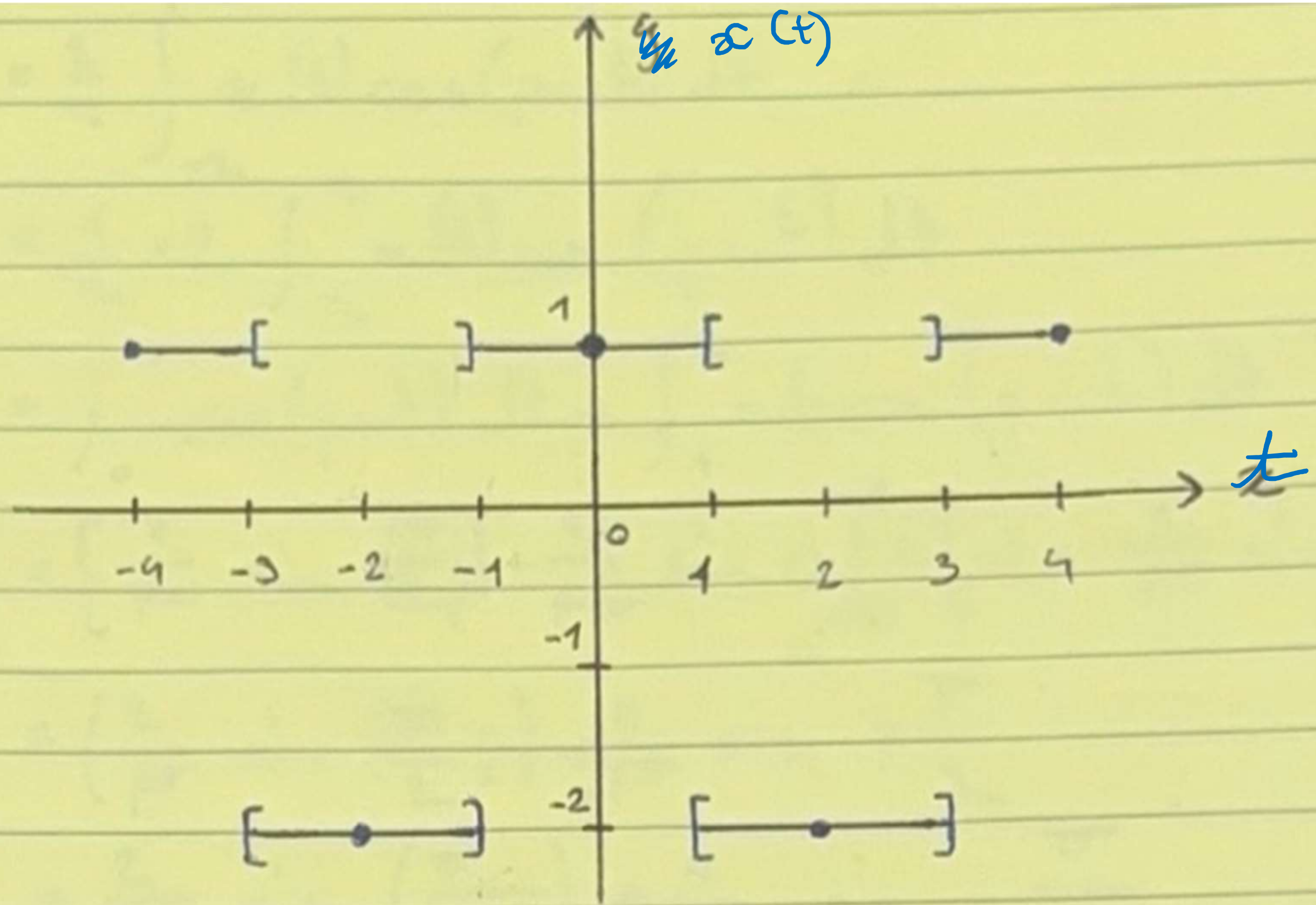
# DM15
# Séries de Fourier
# Changement de variable

## Exercice 1

Soit x, le signal 4-périodique, pair, et défini par : $x(t) = \begin{cases} 1 \text{ pour } t \in [0;1[ \\ -2 \text{ pour } t \in [1;2[ \end{cases}$

1) Représenter x sur l'intervalle [-4,4].
2) Calculer les coefficients de Fourier de x.
3) Ecrire la série de Fourier de x.
4) Appliquer le théorème de Dirichlet afin de déterminer la somme de cette série.
5) Tracer le spectre d'amplitude.

1




2 x est 4 - périodique et pair

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

- Calcul de $a_0$ :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-2}^{-2+4} x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-2}^{2} x(t)\,dt$$

$x$ est paire :

$$= \frac{1}{T}2\int_{0}^{2} x(t)\,dt = \frac{1}{4}\times 2\int_{0}^{2} x(t)\,dt \overset{\text{chasles}}{=} \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{1} x(t)\,dt + \int_{1}^{2} x(t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{1} 1\,dt + \int_{1}^{2} -2\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left([t]_{0}^{1} + [-2t]_{1}^{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((1-0) + (-4+2)\right)$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}}$$

par lecture graphique, $a_0 = -\frac{1}{2}$

Calcul de $a_p \, (p \geq 1)$ :

$$a_p = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos(p\omega t)\, dt$$

$x \longmapsto x(t) \cos(p\omega t)$ est paire.

$$a_p = \frac{2}{4} \int_{-2}^{2} x(t) \cos(p\omega t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \int_{0}^{2} x(t) \cos(p\omega t)\, dt$$

Charles

$$= \int_0^1 \cos(p\omega t)\, dt + \int_1^2 -2 \cos(p\omega t)\, dt$$

$\omega = \frac{\pi}{2}$

$$= \left[ \underbrace{\frac{1}{p\omega}}_{= \frac{2}{p\pi}} \sin\left(\frac{\pi}{2} p \cdot t\right) \right]_0^1 + \left[ -2 \times \underbrace{\frac{1}{p\omega}}_{= \frac{2}{p\pi}} \sin(p\omega t) \right]_1^2$$

$$= \left( \frac{2}{p\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}p\right) + \frac{4}{p\pi} \sin p\frac{\pi}{2} \right.$$

$$= \frac{2}{p\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}p\right) + \frac{4}{p\pi} \sin p\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{a_p = \frac{6}{p\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}p\right)} = \frac{6}{p\pi} \cdot \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)$$

– Calcul de $b_p$ $(p \geq 1)$

$$b_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\sin(p\omega t)\,dt$$

$x \longmapsto x(t)\sin(p\omega t)$ est impaire

on aura $b_p = \frac{2}{T}\int_{-2}^{2} x(t)\sin(p\omega t)\,dt = 0$

$x$ est pair donc $b_p = 0 \ \forall p \geq 1$

③ $$S_x(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \cos(p\omega t) + b_p \sin(p\omega t)$$

$$= a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \cos(p\omega t) + b_p \sin(p\omega t)$$

$$\boxed{S_x(t) = -\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{6}{p\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} p\right) \cos\left(p \frac{\pi t}{2}\right)}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} p\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p=1 \\ 0 & \text{si } p=2 \\ -1 & \text{si } p=3 \\ 0 & \text{si } p=4 \\ 1 & \text{si } p=5 \\ \text{etc...} \end{cases}$$

alors les termes pairs de la série de Fourier sont tous nuls :

$$S_x(t) = -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6}{(2k+1)\pi} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)\right)}_{= \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k} \cdot \cos\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right)$$

Donc : $$S_x(t) = -\frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2} t\right)$$

④ Hypothèse 1 : sur $[0;4[$, $x$ est continu

sauf en 1 et 3 où : $x(1^-)=1$ et $x(1^+)=-2$

$x(3^-)=-2$ et $x(3^+)=1$

Hypothèse 2 : sur $[0;4[$, $x$ est dérivable

sauf en 1 et 3 où $x'(1^-)=0$ et $x'(1^+)=0$

$x'(3^-)=x'(3^+)=0$

Conclusion :

La fonction somme est alors

* $S_x(t)=-\frac{1}{2}+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{6}{p\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}p\right)\cos(p\omega t)=x(t)$

partout où $x$ est continue

c.à.d pour tout $t\neq 1+2k$ $(k\in\mathbb{Z})$

* $S_x(t)=-\frac{1}{2}+\sum^{+\infty}\frac{6}{p\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}p\right)\cos(p\omega t)=\frac{1+(-2)}{2}=-\frac{1}{2}$ Sinon

(5) Spectre de $x$

| $p$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_p$ | $1/4$ | $1/2$ | $3/4$ | 1 | $5/4$ |
| $A_p$ | $6/\pi$ | 0 | $2/\pi$ | 0 | $6/5\pi$ |

avec $f_p = \dfrac{p\omega}{2\pi} = p.f_1$ et $A_p = \sqrt{a_p^2 + b_p^2}$

$f_1 = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{\pi/2}{2\pi} = \dfrac{\cancel{\pi}}{2} \times \dfrac{1}{2\cancel{\pi}} = \dfrac{1}{4}$

$2f_1 = f_2 = \dfrac{2 \times \pi/2}{2\pi} = \dfrac{1}{2}$

$3f_1 = f_3 = \dfrac{3\pi/2}{2\pi} = \dfrac{3\cancel{\pi}}{2} \times \dfrac{1}{2\cancel{\pi}}$

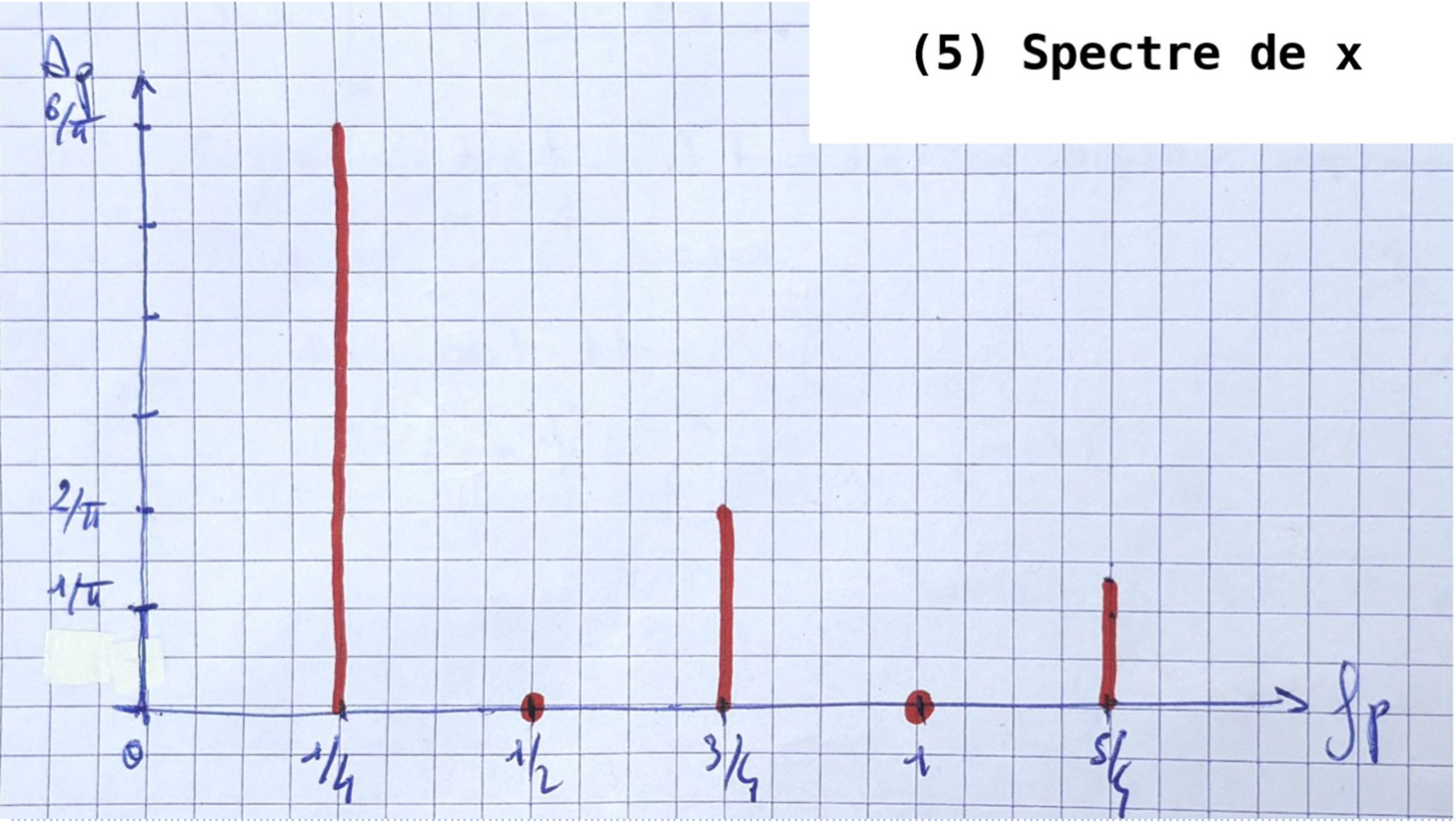
$4f_1 = f_4 = \dfrac{4 \times \pi/2}{2\pi} = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$

$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$
$= \sqrt{\left(\frac{6}{\pi}\right)^2 + 0^2} = \dfrac{6}{\pi}$

$A_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$
$= \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$

$A_3 = \sqrt{\left(\frac{-2}{\pi}\right)^2 + 0} = \dfrac{2}{\pi}$

# (5) Spectre de x



$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \boxed{\frac{\cos(t)}{(1+\sin(t))^2}\,dt}$$

On pose $x = \sin(t) + 1$

$$\left\{\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2 \\ t = 0 \Rightarrow x = 1 \end{array}\right.$$

$$\frac{dx}{dt} = (\sin(t) + 1)' = \cos(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{dx = \cos t \cdot dt}$$

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$K = \int_1^e \frac{\ln^3(t) + \ln^2(t) + 1}{t} \, dt$$

* On pose $x = \ln(t) \Longleftrightarrow t = e^x$

$$\begin{cases} t = e \Rightarrow x = 1 \\ t = 1 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

* $\dfrac{dx}{dt} = (\ln(t))' = \dfrac{1}{t} \Longleftrightarrow \boxed{dx = \dfrac{dt}{t}}$ ou $dx = \dfrac{dt}{e^x}$

$dt = e^x dx$

$$K = \int_0^1 \frac{x^3 + x^2 + 1}{e^x} e^x \, dx = \int_0^1 (x^3 + x^2 + 1) \, dx$$

$$K = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = \frac{1^4}{4} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{19}{12}$$

$$L = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

* On pose $x = \tan(t) \Leftrightarrow t = \arctan(x)$

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = \pi/4 \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

* $\dfrac{dx}{dt} = (\tan(t))' = 1 + \tan^2(t)$

$$dx = (1 + \tan^2(t))\,dt$$

$$L = \int_0^{\pi/4} \frac{1+\tan^2(t)}{(\tan^2(t)+1)^2}\,dt = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/4} \underbrace{\cos^2 t}_{\frac{1+\cos(2t)}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/4}$$

$$L = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$$

$$P = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2 + 1}$$

(i) on pose $t = x - 2$

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = -1 \\ x = 0 \Rightarrow t = -2 \end{cases}$$

(ii) $\frac{dx}{dt} = (x-2)' = 1$

$\Rightarrow dx = dt$

$$P = \int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t^2+1} = \left[ \arctan(t) \right]_{-2}^{-1} = \arctan(-1) - \arctan(-2)$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \arctan(2)$$