GEII
IUT DE TOULON

UNIVERSITÉ DE TOULON

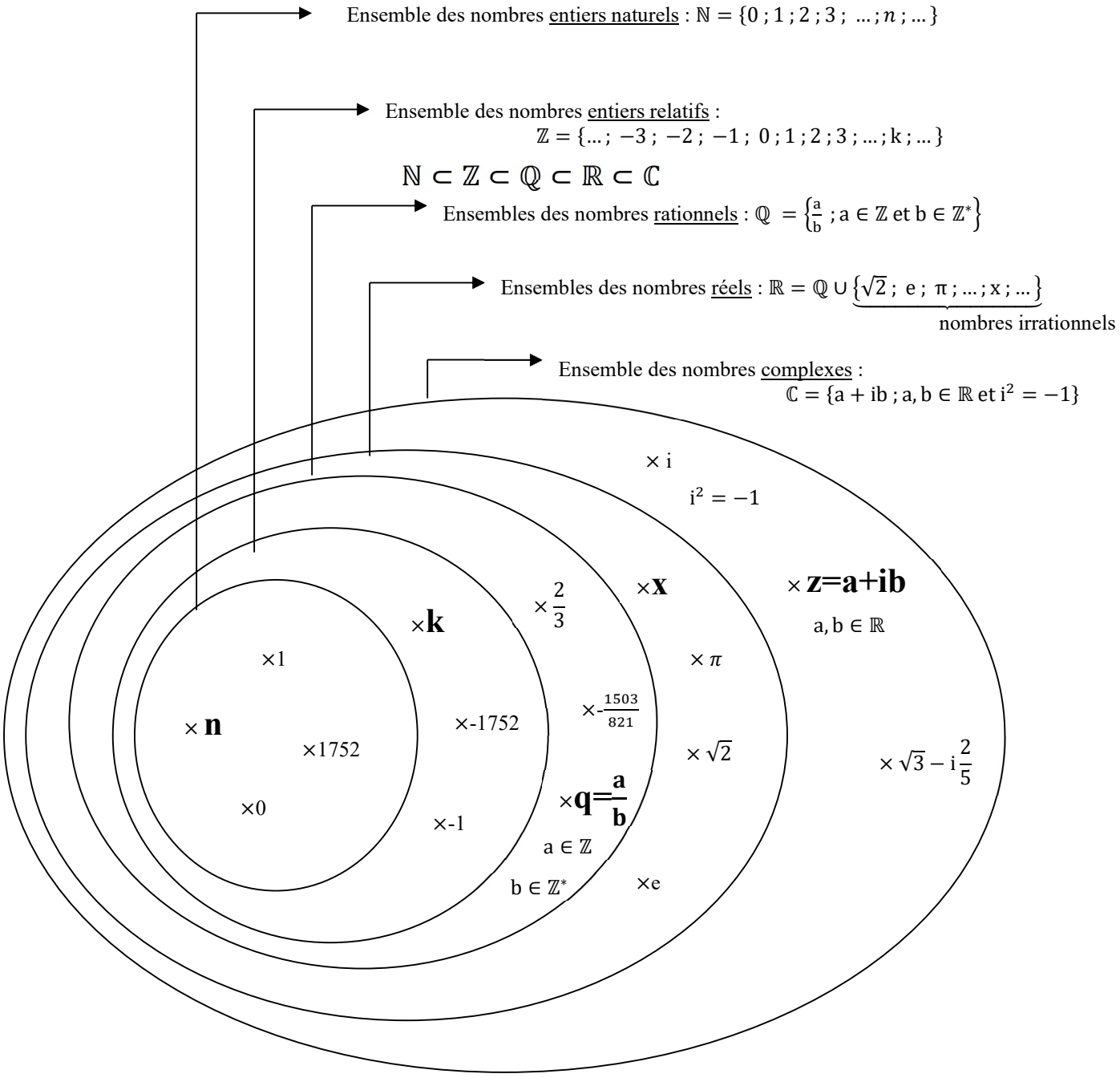
BUT GEII 2/3

Formulaire de mathématiques

Formation par alternance

Sylvia LE BEUX

Les ensembles de nombres



Ensemble des entiers naturels pairs : $\{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; \ldots ; 2n \text{ où } n \in \mathbb{N} ; \ldots\}$

Ensemble des entiers naturels impairs : $\{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; \ldots ; 2n + 1 \text{ où } n \in \mathbb{N} ; \ldots\}$

Ensemble des entiers relatifs pairs : $\{\ldots ; -6 ; -4 ; -2 ; 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; \ldots ; 2k \text{ où } k \in \mathbb{Z} ; \ldots\}$

Ensemble des entiers relatifs impairs : $\{\ldots ; -5 ; -3 ; -1 ; 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; \ldots ; 2k + 1 \text{ où } k \in \mathbb{Z} ; \ldots\}$

Calculs de base $\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n facteurs}} = a^n$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ $a \neq 0$	$a^0 = 1$	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
$(a^m)^n = a^{m \times n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $a \neq 0$	$(ab)^n = a^n b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $b \neq 0$
$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ $b \neq 0$	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $b \neq 0$ et $d \neq 0$	$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ $b \neq 0$ et $a \neq 0$	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$ $b \neq 0$ et $d \neq 0$	$\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}$ $b \neq 0$, $c \neq 0$	$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$ $a \neq 0$	$ax + b \leq 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{b}{a} \text{ si } a > 0 \\ x \geq -\frac{b}{a} \text{ si } a < 0 \end{cases}$
Soit $x \geq 0$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	Soit $x \geq 0$, $\left(\sqrt{x}\right)^2 = \sqrt{x}\sqrt{x} = x$	Soit $a \geq 0$, $\sqrt{a^2} = a$	Soit $a \leq 0$, $\sqrt{a^2} = -a$
$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a \leq 0 \end{cases} = \lvert a \rvert$	Soit $a>0$, $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$	$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = x+2\sqrt{x}.\sqrt{y} + y$ $x \geq 0$, $y \geq 0$	$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = x-2\sqrt{x}.\sqrt{y} + y$ Si $x \geq 0$, $y \geq 0$
$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = x-y$ $x \geq 0$, $y \geq 0$	$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$ $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \neq y$	$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ $a \geq 0$, $b \geq 0$	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $a \geq 0$, $b>0$
Soit x, un nombre positif et n un entier naturel non nul, la racine $n^{ième}$ de x, notée $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ est le nombre réel positif y tel que $y^n = x$			
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $\overrightarrow{\text{on factorise}}$ $\overleftarrow{\text{on développe}}$	$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ $\overrightarrow{\text{on factorise}}$ $\overleftarrow{\text{on développe}}$	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ $\overrightarrow{\text{on factorise}}$ $\overleftarrow{\text{on développe}}$	$a^2 + b^2 = (a-ib)(a+ib)$ $\overrightarrow{\text{on factorise}}$ $\overleftarrow{\text{on développe}}$ ($i^2 = -1$)
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$		$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$	

Factorisation et signe de $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$: on résout $P(x) = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$, *P possède deux racines réelles* : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, alors $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ est la factorisation de P. "P(x) est du signe de -a entre les racines ".
- Si $\Delta = 0$, P possède une racine réelle double : $x_1 = \frac{-b}{2a}$, alors $P(x) = a(x-x_1)^2$ est la factorisation de P. P(x) est du signe de a.
- Si $\Delta < 0$, *P possède deux racines complexes conjuguées* : $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$, alors $P(x) = a(x-z_1)(x-z_2)$ est la factorisation de P dans $\mathbb{C}$. P est du signe de a.

Remarque : Soit $P(x) = x^2 - s.x + p$. x_1 et x_2, les racines de P vérifient alors le système suivant : $\begin{cases} s = x_1 + x_2 \\ p = x_1 \times x_2 \end{cases}$

Factoriel d'un entier naturel Soit n, un entier naturel non nul, on appelle factoriel de n et on note n!, le produit des n premiers entiers naturels : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ Par convention 0! = 1.
Exemple : 1! = 1 ; 2! = 2 ; 3! = 6 ; 4!=24 ; 5! = 120 etc...
On remarque que $4! = 4 \times 3!$ ou encore que $5! = 5 \times 4!$, plus généralement : $n! = n \times (n-1)!$

Proportionnalité Deux grandeurs X et Y non nulles sont proportionnelles, lorsqu'il existe un réel k non nul tel que :

Valeurs de X	Valeurs de Y
x_1	y_1
x_2	y_2
...	...
x_n	y_n

× k

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = k.x_1 \\ y_2 = k.x_2 \\ \quad ... \\ y_n = k.x_n \end{array}\right\} \text{ se note aussi } \forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\}\ y_i = k.x_i$$

On a donc aussi : $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n}{x_n} = k$

Ou encore : $x_1 y_2 = x_2 y_1$ etc...

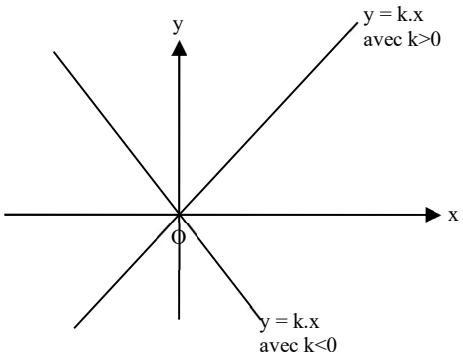
En pratique, sachant que X et Y sont deux grandeurs proportionnelles, ne connaissant pas k, le coefficient de proportionnalité,

Valeurs de X	Valeurs de Y
x_1	y_1
x inconnu	y connu
...	...

× ?

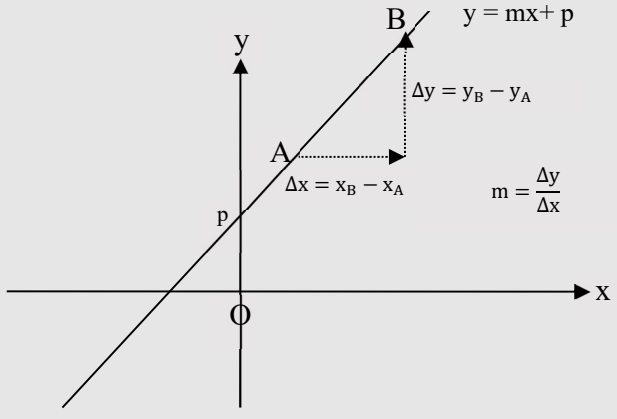
On obtient x en résolvant l'équation :

$$x_1 y = x y_1 \Leftrightarrow x = \frac{x_1 y}{y_1}$$



La fonction f, définie par : f(x) = k.x est appelée **fonction linéaire**. Sa représentation graphique est la droite passant par O, l'origine du repère et ayant pour coefficient directeur (pente) k.

Equation (réduite) de la droite (AB)_ y = m.x + p où m est le coefficient directeur (la pente) de (AB) et p est l'ordonnée à l'origine.



Calcul de la pente m :

Si on connaît les coordonnées de A et B : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (A \neq B)$

Calcul de l'ordonnée à l'origine p :

Si on connaît le point Q, intersection de (AB) et de l'axe des ordonnées, on en déduit facilement $p = y_Q$,

Si non, on résout l'équation : $y_A = m.x_A + p$ (en effet, A∈ (AB)), et on obtient : $p = y_A - m.x_A$

Remarques : - Δy et Δx sont proportionnels, puisque $\Delta y = m.\Delta x$

- La fonction f, définie par : f(x) = m.x +p est appelée **fonction affine**. Sa représentation graphique est la droite passant par le point (0 ; p), et ayant pour coefficient directeur (pente) m.

Implication et équivalence par l'exemple

Implication : $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$, mais la réciproque est fausse : $x = 3 \not\Leftarrow x^2 = 9$

Equivalence : $x = 3$ ou $-3 \Rightarrow x^2 = 9$, et la réciproque est vraie : $x = 3$ ou $-3 \Leftarrow x^2 = 9$.

On écrit alors : $x = 3$ ou $-3 \Leftrightarrow x^2 = 9$ ou encore : $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou -3 qui est une équivalence.

Le système métrique

× 10

	kilomètre	hectomètre	décamètre	mètre	décimètre	centimètre	millimètre
Longueur	**km**	**hm**	**dam**	**m**	**dm**	**cm**	**mm**
	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000
	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^{2}	10^{3}

1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm ; 1 mm = 10^{-3} m

× 100

	kilomètre carré	hectomètre carré	décamètre carré	mètre carré	décimètre carré	centimètre carré	millimètre carré
Surface	**km²**	**hm²**	**dam²**	**m²**	**dm²**	**cm²**	**mm²**
	0,000001	0,0001	0,01	1	100	10000	1000000
	10^{-6}	10^{-4}	10^{-2}	1	10^{2}	10^{4}	10^{6}

1 m² = 100 dm² = 10000 cm² = 1000000 mm² ; 2 m² = 200 dm²

× 1000

	kilomètre cube	hectomètre cube	décamètre cube	mètre cube	décimètre cube	centimètre cube	millimètre cube
Volume	**km³**	**hm³**	**dam³**	**m³**	**dm³**	**cm³**	**mm³**
	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	1	10^{3}	10^{6}	10^{9}

1 m^3 = 1000 dm^3 = 1000000 cm^3 = 1000000000 mm^3 ; 5 mm^3 = 5.10^{-3} m^3 ; 1 l = 1dm^3

Préfixes multiples et sous-multiples de 1000

E exa	P peta	T téra	G giga	M méga	k kilo		m milli	µ micro	n nano	p pico	f femto
10^{18}	10^{15}	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}
						unité					

Unités de base et unités dérivés du SI (Système international)

Le système international (SI) définit toutes les unités à partir de sept unités de base : Le mètre **m** (unité de longueur), le kilogramme **kg** (unité de masse), la seconde **s** (unité de temps), l'Ampère **A** (unité de courant électrique), le Kelvin K (unité de température), la molle **mol** (unité de quantité de matière), la candela **cd** (unité d'intensité lumineuse).

Toutes les autres unités sont dérivées de ces sept unités de base. Elles s'obtiennent en les multipliant ou en les divisant les unes par les autres, en suivant les formules de physique associées.
exples Le **kilowatt-heure** (noté kWh ou kW.h) utilisé pour mesurer la consommation d'électricité est le produit d'une puissance et d'un temps. L'**ampère heure** (noté Ah ou A.h) est le produit de deux unités : l'Ampère et l'heure.
Le **kilomètre par heure** (noté km/h ou km.h^{-1}) ou le **mètre par seconde** (noté m/s ou m.s^{-1}) sont utilisés pour mesurer la vitesse (dont la formule est : $\frac{distance}{temps}$). Ainsi 36 km/h = 36.1000 m / 3600 s soit : 36 km/h = 10 m/s . L'accélération qui est la variation de la vitesse, s'exprime en « (mètres par seconde) par seconde », soit en (m/s)/s = m/s^2 « **mètre par seconde au carré** ».

Certaines grandeurs bien que dérivées des unités de base auront un nom particulier.
Exples La quantité d'électricité est donnée en ampère heure (A.h), si le temps est compté en heure. Mais on exprime aussi la quantité d'électricité en Coulomb (C), produit de l'intensité en A par le temps en s : 1 C = 1 A.s.

Les unités de mesure - http://www.metrologie-francaise.fr/fr/si/unites-mesure.asp
Bureau International des Poids et Mesures - http://www.bipm.org/fr/measurement-units/

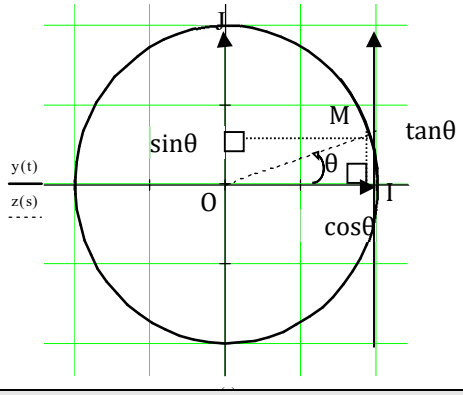
Formulaire de trigonométrie

$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \quad \forall\ \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

tan (θ) est la pente de la droite (OM)

$1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)} \quad \forall\ \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$



$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$ $\quad$ $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$ $\quad$ $\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$ $\quad$ $\sin(2a) = 2.\sin a.\cos a$

Formules de linéarisation : (Transformation d'un produit en somme)

$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$

$\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

$\sin(a).\cos(b) = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$

$\sin(a).\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$

$\cos(a).\cos(b) = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$

$\tan(a+b) = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$ $\quad$ $\tan(a-b) = \frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$ $\quad$ $\tan(2a) = \frac{2.\tan a}{1-\tan^2 a}$

Dérivées :

$(\cos(x))' = -\sin(x)$ $\quad$ $(\cos(ax+b))' = -a.\sin(ax+b)$ $\quad$ $(\cos(U))' = -U'.\sin(u)$

$(\sin(x))' = \cos(x)$ $\quad$ $(\sin(ax+b))' = a.\cos(ax+b)$ $\quad$ $(\sin(U))' = U'.\cos(u)$

$(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \forall\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$(\tan(ax+b))' = a.\left(1 + \tan^2(ax+b)\right) = \frac{a}{\cos^2(ax+b)} \quad \forall\ ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

Primitives de $\sin(ax+b)$: $-\frac{1}{a}\cos(ax+b) + Cte\ (a \neq 0)$ $\quad$ Primitives de $U'.\sin(U)$: $-\cos(U) + Cte$

Primitives de $\cos(ax+b)$: $\frac{1}{a}\sin(ax+b) + Cte\ (a \neq 0)$ $\quad$ Primitives de $U'.\cos(U)$: $\sin(U) + Cte$

Primitives de $\frac{1}{\cos^2(ax+b)} = 1 + \tan^2(ax+b)$: $\frac{1}{a}\tan(ax+b) + Cte\ (a \neq 0)$

Primitives de $\frac{U'}{\cos^2(U)} = U'.\left(1 + \tan^2(U)\right)$: $\tan(u) + Cte$

Les nombres complexes

$\underline{Z} = x + j.y$ où $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $j^2 = -1$

x est la partie réelle de $\underline{Z}$
On note : $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$
On note : $y = Im(\underline{Z})$

Le module de $\underline{Z}$ est noté Z ou encore $|\underline{Z}|$, c'est la distance de O à M, donc $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$

L'argument de $\underline{Z}$ est noté $\arg(\underline{Z})$, c'est la mesure en radians de l'angle de vecteur orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$, déterminée à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$). On note $\theta = \arg(\underline{Z})$, on a alors :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{Z} = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{Re(\underline{Z})}{Z} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{Z} = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{Im(\underline{Z})}{Z} \end{cases} \quad \text{si } Z \neq 0.$$

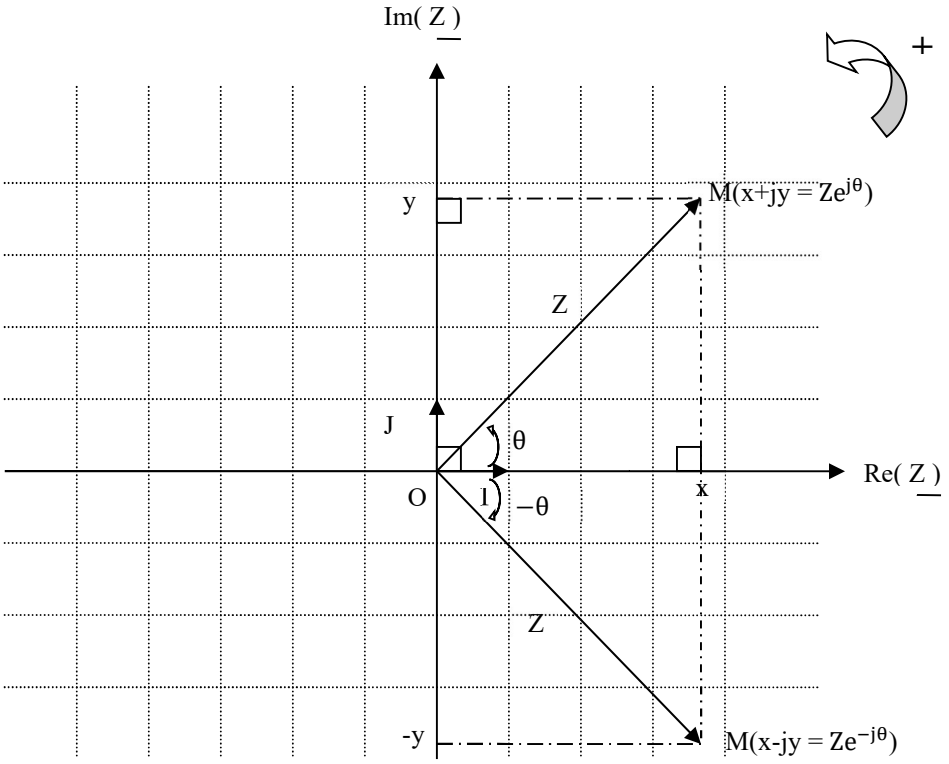
Le plan complexe est muni d'un RON $(O ; \vec{OI}, \vec{OJ})$ orienté dans le sens direct.

$\underline{Z} = x + j.y$ où $x,y \in \mathbb{R}$

Le point M(x,y) est appelé image de $\underline{Z}$.

$\underline{Z}$ est appelé l'affixe du point M.

$\underline{Z}$ est aussi appelé l'affixe du vecteur $\vec{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$



Calcul d'un argument
Si x est non nul, alors :

$$\arg(x + jy) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \text{ si } x > 0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \pm \pi \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Forme algébrique de $\underline{Z}$:

$\underline{Z} = x + j.y$ **(coordonnées cartésiennes)**

Forme trigonométrique de $\underline{Z}$:

$\underline{Z} = Z.\cos(\theta) + j.Z.\sin(\theta) = Z.(\cos(\theta) + j.\sin(\theta))$ **(coordonnées polaires)**

Forme exponentielle, géométrique ou polaire : Euler a noté $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j.\sin(\theta)$

$\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$

Nombre complexe conjugué de $\underline{Z}$: Soit $\underline{Z} = x + j.y$, on appelle conjugué de $\underline{Z}$, et on note $\underline{Z}^*$, le nombre complexe défini par : $\underline{Z}^* = x - j.y$. Si $\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$, alors $\underline{Z}^* = Z.e^{-j\theta}$

$$\underline{Z} = \underline{Z}' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(\underline{Z}) = \mathrm{Re}(\underline{Z}') \\ \mathrm{Im}(\underline{Z}) = \mathrm{Im}(\underline{Z}') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\underline{Z}| = |\underline{Z}'| \\ \theta = \theta' + 2.k.\pi \end{cases}$$

$\arg(\underline{Z}.\underline{Z}') = \arg(\underline{Z}) + \arg(\underline{Z}') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et $|\underline{Z}.\underline{Z}'| = |\underline{Z}|.|\underline{Z}'|$

$\arg\left(\dfrac{\underline{Z}}{\underline{Z}'}\right) = \arg(\underline{Z}) - \arg(\underline{Z}') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et $\left|\dfrac{\underline{Z}}{\underline{Z}'}\right| = \dfrac{|\underline{Z}|}{|\underline{Z}'|}$

$\arg\left(\dfrac{1}{\underline{Z}}\right) = -\arg(\underline{Z}') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et $\left|\dfrac{1}{\underline{Z}}\right| = \dfrac{1}{|\underline{Z}|}$

$\arg(\underline{Z}^n) = n \times \arg(\underline{Z}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et $|\underline{Z}^n| = |\underline{Z}|^n$

$\dfrac{d}{d\theta}(\underline{Z}) = \dfrac{d}{d\theta}(Ze^{j.\theta}) = j.Z.e^{j.\theta} = j.\underline{Z}$ « Dériver par rapport à θ c'est multiplier par j »

Une primitive de $\underline{Z}$ par rapport à θ est $\dfrac{\underline{Z}}{j} = -j.\underline{Z}$ « Intégrer par rapport à θ c'est multiplier par –j »

$\underline{Z} + \underline{Z}^* = 2.\mathrm{Re}(\underline{Z})$; $\underline{Z} - \underline{Z}^* = 2.j.\mathrm{Im}(\underline{Z})$; $\underline{Z}.\underline{Z}^* = Z^2$

Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$

Formule de Moivre : $(\cos(\theta) + j\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$

Dérivabilité

Soit f, une fonction définie en a, on dit que f est dérivable en a lorsque : la limite suivante $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On la note alors $f'(a)$ et on l'appelle nombre dérivé de f en a.

Soit f, une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que f est dérivable sur I, lorsque f est dérivable en tout point a de I. On appelle alors fonction dérivée de f et on note f ', la fonction qui à tout élément a de I, associe son nombre dérivé $f'(a)$.

Si f et g sont dérivables sur I, alors : αf, $f+g$, $f\times g$ et f/g (avec $g\neq 0$) sont dérivables sur I. (α est un nombre réel) et

$(\alpha f)' = \alpha f'$, $(f+g)' = f'+g'$, $(fg)' = f'g+fg'$ et $(f/g)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.

Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur f(I), alors $g\circ f$ est dérivable sur I et :
$(g\circ f)' = (g'\circ f)\times f'$ **(voir colonne de droite du tableau ci-dessous)**

Soit U, une fonction dérivable sur I :

$(x^n)' = n.x^{n-1}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}-\{1\}$	$(\mathbf{U^n})' = \mathbf{n.U'.U^{n-1}}$, $\mathbf{U(I)}\subseteq\mathbb{R}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\forall x\in\mathbb{R}_+^*=]0;+\infty[$	$(\sqrt{\mathbf{U}})' = \frac{\mathbf{U'}}{2\sqrt{\mathbf{U}}}$, $\mathbf{U(I)}\subseteq\mathbb{R}_+^*$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$	$\left(\frac{1}{\mathbf{U}}\right)' = \frac{-\mathbf{U'}}{\mathbf{U^2}}$, $\mathbf{U(I)}\subseteq\mathbb{R}^*$
$(e^x)' = e^x$ $\forall x\in\mathbb{R}$	$(\mathbf{e^U})' = \mathbf{U'.e^U}$, $\mathbf{U(I)}\subseteq\mathbb{R}$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$	$(\mathbf{\ln(U)})' = \frac{\mathbf{U'}}{\mathbf{U}}$, $\mathbf{U(I)}\subseteq\mathbb{R}_+^*$
$(\sin(x))' = \cos(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$	$(\mathbf{\sin(U)})' = \mathbf{U'.\cos(U)}$, $\mathbf{U(I)}\subseteq\mathbb{R}$
$(\cos(x))' = -\sin(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$	$(\mathbf{\cos(U)})' = \mathbf{-U'.\sin(U)}$, $\mathbf{U(I)}\subseteq\mathbb{R}$
$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z}\right\}$	$(\mathbf{\tan(U)})' = \frac{\mathbf{U'}}{\mathbf{\cos^2(U)}} = \left(\mathbf{1+\tan^2(U)}\right).\mathbf{U'}$ $\mathbf{U(I)}\subseteq\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z}\right\}$

Calcul intégral

1) Toute fonction continue sur [a,b] est intégrable sur [a,b]
2) Soit f, une fonction intégrable sur [a,b]. On appelle fonction primitive de f sur [a,b] toute fonction notée F, définie par : F'(x) = f(x) $\forall x \in [a,b]$.

3) On note $\int f(x)dx$ **toutes les fonctions primitives de f, on a donc :** $\int f(x)dx = F(x) + cte$

4) Soit f, une fonction continue sur [a,b], soit F, une fonction primitive de f. On a alors :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Propriétés

1) Soit f, g deux fonctions continues sur [a,b]. Soit α **et** β **deux nombres réels. On a alors :**

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

2) Relation de Chasles : Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé I. Soit a,b,c trois réels de I. On a alors : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

3) $\boxed{\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt}$

4) Soit f et g, deux fonctions continues sur [a,b] telles que $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$**, on a alors :**

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Parité et périodicité

1) Si f est une fonction paire et continue sur [-a,a], alors : $\int_{-a}^a f(x)dx = 2.\int_0^a f(x)dx$

2) Si f est une fonction impaire et continue sur [-a,a], alors : $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

3) Si f est une fonction T-périodique, continue sur tout intervalle [a,a+T], alors : $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$

Intégration par parties **Soit u et v deux fonctions dérivables sur [a,b] telles que u' et v' sont continues sur [a,b].**
On a alors : $\int_a^b u(t).v'(t)dt = [u(t).v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t).v(t)dt$

Changement de variables

Soit f, une fonction continue sur [a,b]. Soit $I = \int_a^b f(x)dx$ **. On pose** $x = \varphi(t)$ **, où** φ **est une fonction telle que :**

$a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$ **,** φ **est bijective et dérivable sur** $[\alpha,\beta]$ **si** φ **est croissante (et** $[\beta,\alpha]$ **sinon).**

On a alors : $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ **donc** $dx = \varphi'(t)dt$ **, et :** $I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

$\int x^{\alpha}.dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \ ; \ \alpha \neq -1$	$\int U'.U^{\alpha} dx = \frac{U^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \ ; \ \alpha \neq -1$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + cte$	$\int \frac{U'}{2\sqrt{U}} dx = \sqrt{U} + cte$
$\int e^{x}.dx = e^{x} + cte$	$\int U'.e^{U}.dx = e^{U} + cte$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln(\lvert x \rvert) + cte$	$\int \frac{U'}{U} dx = \ln(\lvert U \rvert) + cte$
$\int \cos(x).dx = \sin(x) + cte$	$\int U'.\cos(U).dx = \sin(U) + cte$
$\int \sin(x).dx = -\cos(x) + cte$	$\int U'.\sin(U).dx = -\cos(U) + cte$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)}.dx = \tan(x) + cte$	$\int \frac{U'}{\cos^2(U)}.dx = \tan(U) + cte$
$\int (1 + \tan^2(x)).dx = \tan(x) + cte$	$\int U'.(1 + \tan^2(U)).dx = \tan(U) + cte$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx = \arcsin(x) + cte$	$\int \frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}.dx = \arcsin(U) + cte$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.dx = \arccos(x) + cte$	$\int \frac{-U'}{\sqrt{1-U^2}}.dx = \arccos(U) + cte$
$\int \frac{1}{1+x^2}.dx = \arctan(x) + cte$	$\int \frac{U'}{1+U^2}.dx = \arctan(U) + cte$
$\int ch(x).dx = sh(x) + cte$	$\int U'.ch(U).dx = sh(U) + cte$
$\int sh(x).dx = ch(x) + cte$	$\int U'.sh(U).dx = ch(U) + cte$
$\int \frac{1}{ch^2(x)}.dx = th(x) + cte$	$\int \frac{U'}{ch^2(U)}.dx = th(U) + cte$
$\int (1 - th^2(x)).dx = th(x) + cte$	$\int U'.(1 - th^2(U)).dx = th(U) + cte$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.dx = \arg ch(x) + cte$	$\int \frac{U'}{\sqrt{U^2-1}}.dx = \arg ch(U) + cte$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.dx = \arg sh(x) + cte$	$\int \frac{U'}{\sqrt{U^2+1}}.dx = \arg sh(U) + cte$
$\int \frac{1}{1-x^2}.dx = \arg th(x) + cte$	$\int \frac{U'}{1-U^2}.dx = \arg th(U) + cte$

Equations différentielles linéaires à coefficients constants du premier ordre

Résolution Résoudre l'EDLCC : (E) $\mathbf{a.y'(x)+b.y(x)=f(x)}$ (où $\mathbf{a \neq 0}$, b sont des constantes et f une fonction continue sur I), c'est rechercher toutes les fonctions y(x) solutions dérivables dans I. Pour cela,
Etape 1 : On résout l'équation homogène (ou sans second membre) associée : (E_0) $\mathbf{a.y'(x)+b.y(x)=0}$
Les solutions de (E_0) sont : $y_0(x)= \boldsymbol{\lambda.e^{-\frac{b}{a}x}}$ où $\boldsymbol{\lambda}$ est une constante réelle.
Etape 2 : On recherche une solution particulière de (E), que l'on note y_p.
Etape 3 : Les solutions de (E) sont alors toutes les fonctions de la forme : $\mathbf{y(x)=y_0(x)+y_P(x)}$ (on les appelle aussi solutions générales de (E))

Aide pour l'étape 2 : recherche d'une solution particulière de l'EDLCC : $\mathbf{a.y'(x)+b.y(x)=f(x)}$ (E)
- Si f est un polynôme, on cherchera alors y_p sous forme d'un polynôme de même degré
- Si $\mathbf{f(x)=\alpha.cos(mx)+\beta.sin(mx)}$ **où α, β et m sont des réels**, on cherchera alors y_p sous la même forme : $\mathbf{y_p(x)=A.cos(mx)+B.sin(mx)}$ où A et B sont des constantes à déterminer
- Si $\mathbf{f(x)=g(x).e^{m.x}}$ où g est une fonction continue sur I, et m un réel, on cherchera alors y_p sous la même forme : $\mathbf{y_p(x)=z(x).e^{m.x}}$ **où z est une fonction à déterminer.**
- Si $\mathbf{f(x)=f_1(x)+f_2(x)}$ où f_1 et f_2 sont des fonctions, comme celles citées précédemment, on cherchera alors y_p sous la même forme : $\mathbf{f(x)=y_{p1}(x)+y_{p2}(x)}$ où y_{p1} est une solution particulière de l'équation $\mathbf{a.y'(x)+b.y(x)=f_1(x)}$ et y_{p2}, une solution particulière de l'équation $\mathbf{a.y'(x)+b.y(x)=f_2(x)}$**.** On appelle ce dernier point le théorème de superposition

EDLCC du premier ordre avec condition initiale L'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) $\mathbf{a(x).y'(x)+b(x).y(x)=f(x)}$ possède une infinité de solutions sur I notées : $y_G(x)=y_H(x)+y_p(x)$. Il existe une unique solution y de (E) sur I, vérifiant la condition initiale : $\mathbf{y(x_0)=y_0}$, où x_0 et y_0 sont des valeurs données dans l'énoncé du problème.

Equations différentielles linéaires à coefficients constants du second ordre

Résolution On appelle équation différentielle linéaire à coefficients constants toute équation de la forme : (E) $\mathbf{a.y''(x)+b.y'(x)+c.y(x)=f(x)}$ (où $\mathbf{a \neq 0}$, b et c sont des réels et f est une fonction continue sur I).
Résoudre l'équation (E), c'est rechercher toutes les fonctions y deux fois dérivables sur I et vérifiant (E). Pour cela, on procède en deux étapes :
Etape 1 : On résout l'équation sans second membre associée : (E0) $\mathbf{a.y''(x)+b.y'(x)+c.y(x)=0}$
On résout l'équation caractéristique : $\mathbf{a.r^2+b.r+c=0}$
- si $\boldsymbol{\Delta > 0}$, r_1 et r_2 sont les solutions réelles de l'équation caractéristique et les solutions de (E0) sont alors $\mathbf{y0(x)=\lambda_1 e^{r_1 x}+\lambda_2 e^{r_2 x}}$ **où λ_1 et λ_2 sont des constantes réelles.**
- si $\boldsymbol{\Delta = 0}$, r_1 est solution double de l'équation caractéristique et les solutions de (E0) sont alors $\mathbf{y0(x)=e^{r_1 x}(\lambda_1+\lambda_2 x)}$ **où λ_1 et λ_2 sont des constantes réelles.**
- si $\boldsymbol{\Delta < 0}$, $\mathbf{r_1=\alpha+i\beta}$ et $\mathbf{r_2=\overline{r_1}}$ sont les solutions complexes de l'équation caractéristique et les solutions de (E0) sont alors $\mathbf{y_0(x)=e^{\alpha x}(\lambda_1 cos(\beta x)+\lambda_2 sin(\beta x))}$ **où λ_1 et λ_2 sont des constantes réelles**.
Etape 2 : On recherche une solution particulière de (E), que l'on note y_p.(voir EDLCC du premier ordre)
Etape 3 : Les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme : $\mathbf{y_G(x)=y0(x)+y_p(x)}$**,** appelées solutions générales de (E).

Résolution d'une équation différentielle du second ordre avec conditions initiales L'équation différentielle linéaire du second ordre (E) $\mathbf{a.y''(x)+b.y'(x)+c.y(x)=f(x)}$ possède une infinité de solutions sur I notées : $y_G(x)=y_H(x)+y_p(x)$. Il existe une unique solution y de (E) sur I, vérifiant les conditions initiales : $\mathbf{y(x_0)=y_0}$ **et** $\mathbf{y'(x_0)=y_1}$ où x_0, y_0 et y_1 sont des valeurs données dans l'énoncé du problème.

TABLEAU DE TRANSFORMEES DE LAPLACE

Définition $\mathcal{L}[f(t).U(t)]=F(p)=\int_0^{+\infty} f(t).e^{-pt}.dt$ **Notation abusive** : $\mathcal{L}[f(t)]=F(p)=\int_0^{+\infty} f(t).e^{-pt}.dt$

Signaux usuels

f(t).U(t)* ou f(t) en notation abusive *Sauf pour $\delta(t)$ qui est déjà causale.	$\mathcal{L}[f(t).U(t)]$ ou $\mathcal{L}[f(t)]$ ou F(p)
Impulsion de Dirac : $\delta(t)$	1
U(t) ou 1	$\frac{1}{p}$
$t^n.U(t)$ ou t^n (n est un entier naturel non nul)	$\frac{n!}{p^{n+1}} = \frac{1\times2\times3\times\ldots\times(n-1)\times n}{p^{n+1}}$ n ! se dit « factorielle de n »
cos(ωt).U(t) ou cos(ωt)	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
sin(ωt).U(t) ou sin(ωt)	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
e^{-at}.U(t) ou e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
e^{-at}. t^n .U(t) ou e^{-at}. t^n	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
cos(ωt).e^{-at}.U(t) ou cos(ωt).e^{-at}	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
sin(ωt).e^{-at}.U(t) ou sin(ωt).e^{-at}	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$

Propriétés

g, fonction causale	$\mathcal{L}[g(t)]$ ou G(p)
$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$	$\alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p)$
Signal retardé de a : f(t-a).U(t-a) où a>0	$e^{-ap}.F(p)$
Signal dérivé : f '(t).U(t)	$pF(p)-f(o^+)$
Signal dérivé deux fois : f ''(t).U(t)	$p^2F(p)-pf(0^+)- f'(0^+)$
$f^{(n)}(t).U(t)$	$p^nF(p)-p^{n-1}f(0^+)-p^{n-2}f'(0^+)-\ldots-pf^{(n-2)}(0^+)-f^{(n-1)}(0^+)$.
$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{F(p)}{p}$
t.f(t).U(t)	-F'(p)

Théorème de la valeur initiale : $\lim_{p\to\infty} p.F(p) = f(0^+)$

Théorème de la valeur finale : $\lim_{p\to 0} p.F(p) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$

Séries de Fourier réelles

Soit x une fonction de période T, intégrable sur tout intervalle $[t_0, t_0+T]$.
On appelle série de Fourier réelle de x la série suivante :

$S(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t))$, **où les suites réelles $(a_p)_p$ et $(b_p)_p$ sont définies de la façon suivante :**

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt \;\; ; \;\; a_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\cos(p\omega t).dt \;\; ; \;\; b_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\sin(p\omega t).dt \;\; \text{pour } p \geq 1,$$

$$\text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

a_0 est la valeur moyenne du signal x.
L'harmonique de rang p du signal x est le signal : $H_p(t) = a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)$
L'harmonique de rang 1 est appelé le fondamental du signal x

Série de Fourier complexes

On appelle série de Fourier complexe d'un signal x, T-périodique la série : $S(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t}$ **où :**

$c_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).e^{-ik\omega t}dt$ **pour** $k \neq 0$ **et** $c_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt$ **avec** $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
On a alors les correspondances suivantes : $c_0 = a_0$ **et** $c_k = \frac{a_k - i.b_k}{2}$ **pour** $k \neq 0$.

Théorème de Dirichlet

Soit x un signal de période T, intégrable sur tout intervalle $[\alpha, \alpha+T]$.

- Si x est continue sur $[\alpha, \alpha+T[$, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle admet une limite finie à gauche et à droite.
- x est dérivable sur $[\alpha, \alpha+T[$, sauf éventuellement en un nombre fini de points où sa dérivée admet une limite finie à gauche et à droite.

Alors la série de Fourier de x converge en tout point t et sa fonction somme est alors :

$$a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)) = \begin{cases} x(t) \text{ pour t où x est continue} \\ \frac{x(t_+)+x(t_-)}{2} \text{ pour t où x est discontinue} \end{cases}$$

On dit alors que x est développable en série de Fourier.

Egalité de Bessel-Parseval

Soit x une fonction T-périodique ($T = \frac{2\pi}{\omega}$) développable en série de Fourier :

$$x(t) = \sum_{p\geq 0}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t))$$

On a alors la formule suivante : $\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)dt = {a_0}^2 + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{{a_p}^2+{b_p}^2}{2}$

Ou encore, en utilisant les coefficients de Fourier complexes : $\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$

……Notes……..…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....