UE 731 - Informations et Rappels

M1 Informatique - 1ère année

G. Faccanoni

A.A. 2025-2026

UNIVERSITÉ DE TOULON

PLAN

1. Syllabus

Remise à niveau en **mathématiques** et en **informatique**

- Deux parties distinctes : **mathématiques** et en **informatique**
- Deux notes distinctes : CC_M et CC_I

$$\text{Note finale} = \max\{0.4\,CC_M + 0.6\,CC_I\ ;\ 0.6\,CC_M + 0.4\,CC_I\}$$

Partie "Informatique"

- 4 enseignants-chercheurs impliqués, responsable : Mme Valérie Gillot
- Contenu et modalités de calcul de la note CC_I présentées à la première séance

Partie "Mathématiques"

17 séances de 2h chacune dont

- 1 CC_{Final} de 2h : évaluation écrite individuelle
- 4 CC_i de 45' : contrôles par équipes (1 copie/équipe)

$$\text{Note } CC_M = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{4} CC_i + \frac{1}{2} CC_{\text{Final}}$$

Remise à niveau en **mathématiques** et en **informatique**

- Deux parties distinctes : **mathématiques** et en **informatique**
- Deux notes distinctes : $\mathrm{CC_M}$ et $\mathrm{CC_I}$

$$\text{Note finale} = \max\{0.4\,\mathrm{CC_M} + 0.6\,\mathrm{CC_I}\ ;\ 0.6\,\mathrm{CC_M} + 0.4\,\mathrm{CC_I}\}$$

Partie "Informatique"

- 4 enseignants-chercheurs impliqués, responsable : Mme Valérie Gillot
- Contenu et modalités de calcul de la note $\mathrm{CC_I}$ présentées à la première séance

Partie "Mathématiques"

17 séances de 2h chacune dont

- 1 $\mathrm{CC_{Final}}$ de 2h : évaluation écrite individuelle
- 4 $\mathrm{CC_i}$ de 45' : contrôles par équipes (1 copie/équipe)

$$\text{Note } \mathrm{CC_M} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{4}\mathrm{CC_i} + \frac{1}{2}\mathrm{CC_{Final}}$$

Remise à niveau en **mathématiques** et en **informatique**

- Deux parties distinctes : **mathématiques** et en **informatique**
- Deux notes distinctes : CC_M et CC_I

$$\text{Note finale} = \max\{0.4\,CC_M + 0.6\,CC_I \; ; \; 0.6\,CC_M + 0.4\,CC_I\}$$

Partie "Informatique"

- 4 enseignants-chercheurs impliqués, responsable : Mme Valérie Gillot
- Contenu et modalités de calcul de la note CC_I présentées à la première séance

Partie "Mathématiques"

17 séances de 2h chacune dont

- 1 CC_{Final} de 2h : évaluation écrite individuelle
- 4 CC_i de 45' : contrôles par équipes (1 copie/équipe)

$$\text{Note } CC_M = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{4} CC_i + \frac{1}{2} CC_{\mathsf{Final}}$$

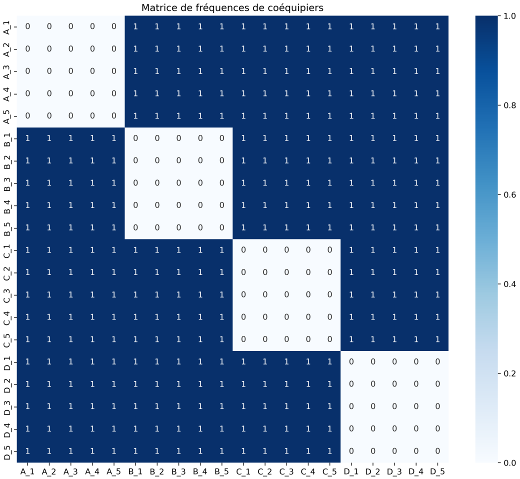
Composition des équipes

- 20 étudiants répartis en 4 groupes de 5 étudiants chaque : A, B, C, D
- 5 équipes de 4 étudiants (1 étudiant de chaque groupe)
- Composition des équipes imposée et **change** à chaque chapitre (*cf.* polycopié)

	Chapitre 1	Chapitre 2	Chapitre 3	Chapitre 4	TP Info
Equipe α	A_1, B_1, C_1, D_1	A_1, B_2, C_3, D_4	A_1, B_3, C_5, D_2	A_1, B_4, C_2, D_5	A_1, B_5, C_4, D_3
Equipe β	A_2, B_2, C_2, D_2	A_2, B_3, C_4, D_5	A_2, B_4, C_1, D_3	A_2, B_5, C_3, D_1	A_2, B_1, C_5, D_4
Equipe γ	A_3, B_3, C_3, D_3	A_3, B_4, C_5, D_1	A_3, B_5, C_2, D_4	A_3, B_1, C_4, D_2	A_3, B_2, C_1, D_5
Equipe δ	A_4, B_4, C_4, D_4	A_4, B_5, C_1, D_2	A_4, B_1, C_3, D_5	A_4, B_2, C_5, D_3	A_4, B_3, C_2, D_1
Equipe ε	A_5, B_5, C_5, D_5	A_5, B_1, C_2, D_3	A_5, B_2, C_4, D_1	A_5, B_3, C_1, D_4	A_5, B_4, C_3, D_2

Pourquoi ?

Un étudiant n'est en équipe avec un autre étudiant qu'une et une seule fois (et jamais avec un étudiant de son groupe) :



Partie “Mathématiques”

- Polycopié avec notions essentielles et **exercices corrigés**
- Annales des CC par équipe corrigés
- Tests interactifs sur Moodle

Contenu :

1. **Optimisation sans contrainte dans $\mathbb{R}^2$**
   Courbes de niveau, dérivées partielles, gradient, hessienne, intégrales doubles [a]
2. **Interpolation**
   Polynomiale (bases canonique, de Lagrange, de Newton), généralisation à tout autre espace vectoriel (*e.g.* Fourier)
3. **Approximation au sens des moindres carrés**
   Ajustement (*fitting*) polynomial, généralisation à tout autre espace vectoriel
4. **Réseaux de neurones** [a]
   Neurone simple, rétro-propagation, lien avec fitting

a. NEW 2026.

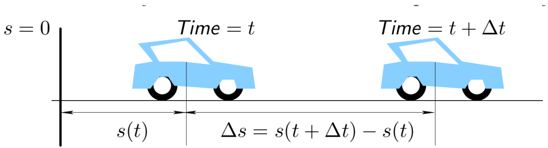
Planning

Date	Heure	Séance n°	Contenu	Déroulement
lundi 8/9	10h-12h	1	Syllabus / Rappels	2h de CM/TD
lundi 8/9	14h-16h	2	Chapitre 1	2h de CM
mardi 9/9	14h-16h	3		2h de TD
jeudi 11/9	10h-12h	4		1h de TD + 45' CC_1 + 15' corrections
lundi 15/9	10h-12h	5	Chapitre 2	2h de CM
mardi 16/9	10h15-12h15	6		2h de TD
mardi 16/9	14h-16h	7		1h de TD + 45' CC_2 + 15' corrections
lundi 22/9	10h-12h	8	-	2h de TP (Jupyter)
lundi 22/9	14h-16h	9	Chapitre 3	2h de CM
mardi 23/9	10h15-12h15	10		2h de TD
mardi 23/9	14h-16h	11		1h de TD + 45' CC_3 + 15' corrections
lundi 29/9	10h15-12h15	12	Chapitre 4	2h de CM
mardi 30/9	10h15-12h15	13		2h de TD
mardi 30/9	14h-16h	14		1h de TD + 45' CC_4 + 15' corrections
vendredi 3/10	14h-16h	15	-	2h de TP (Jupyter)
lundi 6/10	10h-12h	16	-	2h de TD
lundi 6/10	14h-16h	17	-	2h CC_{Final}

Moodle

Page Moodle :
`https://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=8899`

2. Dérivées



Nous savons tous ce qu'est la vitesse moyenne. Par exemple, si on a besoin de deux heures pour parcourir 100 km, la vitesse moyenne est

$$\frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps pour la parcourir}} = 50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$$

In "real life"

Lorsque on conduit une voiture, le tachymètre indique la vitesse à laquelle la voiture roule, *i.e.* la vitesse au moment où on regarde le tachymètre. Mais au moment où on regarde le compteur de vitesse, aucun temps ne s'écoule (c'est une vitesse *instantanée*) et on ne parcoure aucune distance. La vitesse à ce moment est donc $\frac{0}{0}$, c'est-à-dire **indéfinie**. Mais alors qu'est-ce qu'il indique le tachymètre ? Formellement l'indicateur de vitesse donne

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

ayant noté s la position en fonction du temps t.
On verra que la vitesse est la dérivée du déplacement et que l'accélération est la dérivée de la vitesse :

$$v(t) = s'(t), \qquad a(t) = v'(t) = s''(t).$$

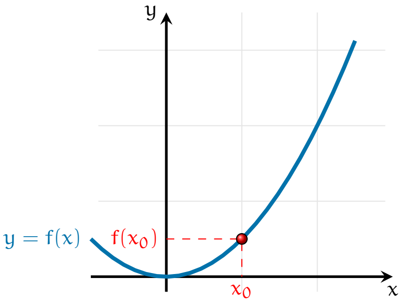
2. Dérivées

Définition de dérivées

Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction. La dérivée de f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$, si elle existe, est le nombre

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \overset{x=x_0+h}{=} \boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

On notera ce nombre $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ indifféremment.



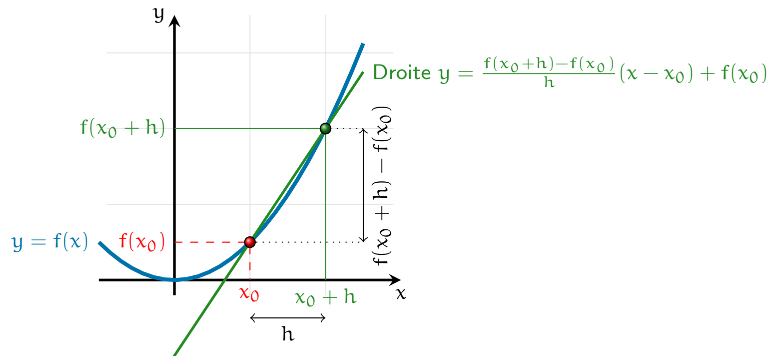
C'est la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0.

Définition de dérivées

Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction. La dérivée de f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$, si elle existe, est le nombre

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \overset{x=x_0+h}{=} \boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

On notera ce nombre $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ indifféremment.



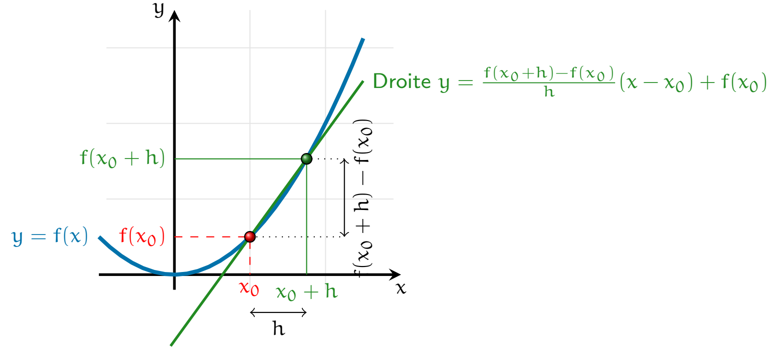
C'est la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0.

Définition de dérivées

Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction. La dérivée de f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$, si elle existe, est le nombre

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}} \overset{x = x_0 + h}{=} \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

On notera ce nombre $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ indifféremment.



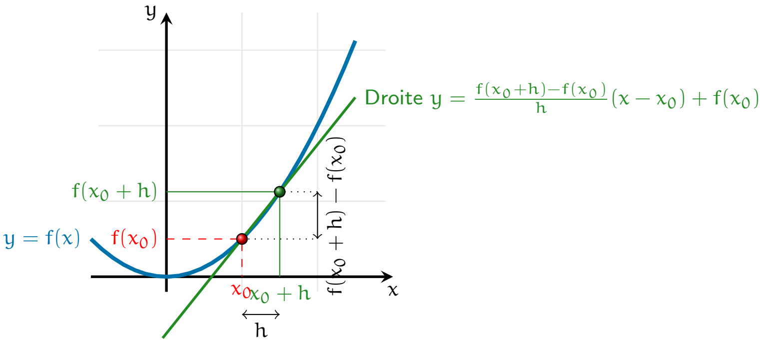
C'est la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0.

Définition de dérivées

Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction. La dérivée de f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$, si elle existe, est le nombre

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}} \overset{x=x_0+h}{=} \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

On notera ce nombre $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ indifféremment.



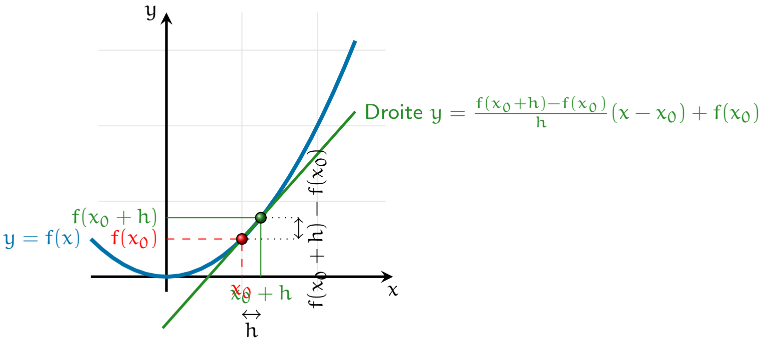
C'est la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0.

Définition de dérivées

Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction. La dérivée de f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$, si elle existe, est le nombre

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \overset{x=x_0+h}{=} \boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

On notera ce nombre $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ indifféremment.



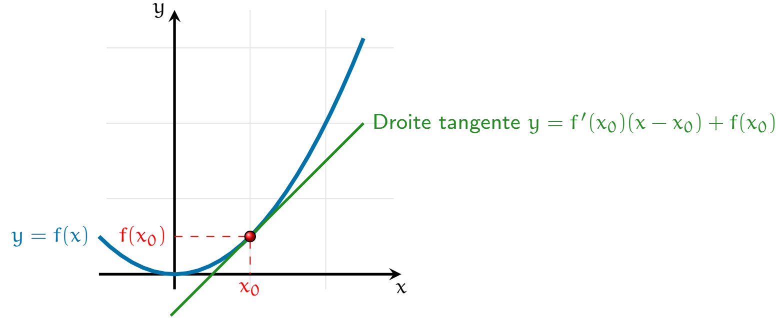
C'est la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0.

Définition de dérivées

Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction. La dérivée de f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$, si elle existe, est le nombre

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \overset{x=x_0+h}{=} \boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

On notera ce nombre $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ indifféremment.



C'est la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0.

Définition de dérivées

Pour chaque x_0 en lequel la fonction f est dérivable, on associe un nombre $f'(x_0)$, ce qui nous permet de définir une nouvelle fonction : la fonction dérivée de f.
On la notera de l'une des façons suivantes :

$$x \mapsto f'(x) \qquad \text{ou} \qquad f' \qquad \text{ou} \qquad \frac{df}{dx}.$$

Exemple

Soit $f(x) = x^2$ alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0 + h \xrightarrow[h\to 0]{} 2x_0 = f'(x_0).$$

Donc $f'(x) = 2x$ est la fonction dérivée de f.

Définition de dérivées

Une dérivée n'existe pas toujours.

Exemple

Définition de dérivées

Une dérivée n'existe pas toujours.

Exemple

Soit $f(x) = |x|$ alors

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \\
&\text{n'existe pas}
\end{aligned}
$$

f n'est pas dérivable en $x = 0$

Définition de dérivées

Une dérivée n'existe pas toujours.

Exemple

Soit $f(x) = |x|$ alors

$$f'(0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

n'existe pas

f n'est pas dérivable en $x = 0$

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ alors

$$f'(0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0}$$
$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$= +\infty$$

f n'est pas dérivable en $x = 0$

Définition de dérivées

Théorème

$$f \text{ } \textit{dérivable en } x_0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ } \textit{continue en } x_0$$

La réciproque est fausse

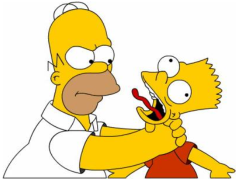
Exemples :

- $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais non dérivables en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0}$ n'existe pas
- $g(x) = \sqrt{x}$ est continue en 0 mais non dérivables en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = +\infty$

Définition de dérivées

Théorème

$$f \textit{ dérivable en } x_0 \implies f \textit{ continue en } x_0$$



La réciproque est fausse

Exemples :

- $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais non dérivables en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0}$ n'existe pas
- $g(x) = \sqrt{x}$ est continue en 0 mais non dérivables en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = +\infty$

2. Dérivées

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Astuce mnémotechnique :

- le sin, qui commence par “**s**”, est “**s**ympa” (= ne change pas de signe) ;
- le cos, qui commence par “**c**”, est “**c**asse-pieds” (= change de signe).

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Astuce mnémotechnique :

- le sin, qui commence par "**s**", est "**s**ympa" (= ne change pas de signe) ;
- le cos, qui commence par "**c**", est "**c**asse-pieds" (= change de signe).

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Astuce mnémotechnique :

- le sin, qui commence par "**s**", est "**s**ympa" (= ne change pas de signe) ;
- le cos, qui commence par "**c**", est "**c**asse-pieds" (= change de signe).

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Astuce mnémotechnique :

- le sin, qui commence par "**s**", est "**s**ympa" (= ne change pas de signe) ;
- le cos, qui commence par "**c**", est "**c**asse-pieds" (= change de signe).

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Astuce mnémotechnique :

- le sin, qui commence par “**s**”, est “**s**ympa” (= ne change pas de signe) ;
- le cos, qui commence par “**c**”, est “**c**asse-pieds” (= change de signe).

Calcul de dérivées

Linéarité : $\big(f(x)+g(x)\big)' = f'(x)+g'(x)$ et $\big(cf(x)\big)' = cf'(x)$

Produit : $\big(f(x)\times g(x)\big)' = f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)$

Quotient : $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\times g(x)-f(x)\times g'(x)}{\big(g(x)\big)^2} = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\frac{g'(x)}{g(x)}$$

Exemple

Linéarité : $\big(3\sin(x)+e^x\big)' = 3\big(\sin(x)\big)' + \big(e^x\big)' = 3\cos(x)+e^x$

Produit : $\big(x^4\sin(x)\big)' = \big(x^4\big)'\times\sin(x)+x^4\times\big(\sin(x)\big)' = 4x^3\sin(x)+x^4\cos(x)$

Quotient : $$\left(\frac{x^2}{\sin(x)}\right)' = \frac{2x\sin(x)-x^2\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

Calcul de dérivées

Linéarité : $\big(f(x)+g(x)\big)' = f'(x)+g'(x)$ et $\big(cf(x)\big)' = cf'(x)$

Produit : $\big(f(x)\times g(x)\big)' = f'(x)\times g(x) + f(x)\times g'(x)$

Quotient : $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\times g(x) - f(x)\times g'(x)}{\big(g(x)\big)^2} = \dfrac{f'(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

Exemple

Linéarité : $\Big(3\sin(x)+e^x\Big)' = 3\Big(\sin(x)\Big)' + \Big(e^x\Big)' = 3\cos(x)+e^x$

Produit : $\big(x^4\sin(x)\big)' = \big(x^4\big)' \times \sin(x) + x^4 \times \big(\sin(x)\big)' = 4x^3\sin(x) + x^4\cos(x)$

Quotient : $\left(\dfrac{x^2}{\sin(x)}\right)' = \dfrac{2x\sin(x) - x^2\cos(x)}{\sin^2(x)}$

Calcul de dérivées

Linéarité : $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ et $(cf(x))' = cf'(x)$

Produit : $(f(x)\times g(x))' = f'(x)\times g(x) + f(x)\times g'(x)$

Quotient : $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\times g(x) - f(x)\times g'(x)}{(g(x))^2} = \dfrac{f'(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

Exemple

Linéarité : $\left(3\sin(x)+e^x\right)' = 3\left(\sin(x)\right)' + \left(e^x\right)' = 3\cos(x)+e^x$

Produit : $(x^4\sin(x))' = (x^4)'\times\sin(x) + x^4\times\left(\sin(x)\right)' = 4x^3\sin(x)+x^4\cos(x)$

Quotient : $\left(\dfrac{x^2}{\sin(x)}\right)' = \dfrac{2x\sin(x)-x^2\cos(x)}{\sin^2(x)}$

Calcul de dérivées

Composition : $\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = g'\big(f(x)\big) \times f'(x)$ $\neq g'\big(f'(x)\big)$

$$\bigg(h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)\bigg)' = h'\Big(g\big(f(x)\big)\Big) \times g'\big(f(x)\big) \times f'(x)$$

Exemple

Composition : $\Big(\sin\left(x^2\right)\Big)' = \cos\left(x^2\right) \times 2x$

$$\bigg(\ln\Big(\sin\left(x^2\right)\Big)\bigg)' = \frac{1}{\sin\left(x^2\right)}\cos\left(x^2\right) \times 2x$$

Calcul de dérivées

Composition : $\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = g'\big(f(x)\big) \times f'(x)$ $\neq g'\big(f'(x)\big)$

$$\Bigg(h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)\Bigg)' = h'\Big(g\big(f(x)\big)\Big) \times g'\big(f(x)\big) \times f'(x)$$

Exemple

Composition : $\Big(\sin\left(x^2\right)\Big)' = \cos\left(x^2\right) \times 2x$

$$\Bigg(\ln\Big(\sin\left(x^2\right)\Big)\Bigg)' = \frac{1}{\sin\left(x^2\right)} \cos\left(x^2\right) \times 2x$$

Calcul de dérivées

Testez-vous

Calculer $f'(x)$:

1. $f(x) = 3\sin(x) - 5\cos(x)$
2. $f(x) = 3e^x - x^2$
3. $f(x) = 3\ln(x)$
4. $f(x) = \sin(2x)$
5. $f(x) = \sin(x + x^3)$
6. $f(x) = (x+4)^3$
7. $f(x) = (x + \sin(x))^5$
8. $f(x) = \sin(\ln(x^2))$
9. $f(x) = \exp(\cos^2(x))$
10. $f(x) = xe^x$
11. $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$
12. $f(x) = e^x \sin(x)$
13. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^4}$
14. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$
15. $f(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$
16. $f(x) = x^2 \sin(x)$
17. $f(x) = \frac{e^{1/x}}{x}$

Calcul de dérivées

Testez-vous

Calculer $f'(x)$:

1. $f(x) = 3\sin(x) - 5\cos(x)$
2. $f(x) = 3e^x - x^2$
3. $f(x) = 3\ln(x)$
4. $f(x) = \sin(2x)$
5. $f(x) = \sin(x + x^3)$
6. $f(x) = (x+4)^3$
7. $f(x) = (x + \sin(x))^5$
8. $f(x) = \sin(\ln(x^2))$
9. $f(x) = \exp(\cos^2(x))$
10. $f(x) = xe^x$
11. $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$
12. $f(x) = e^x \sin(x)$
13. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^4}$
14. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$
15. $f(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$
16. $f(x) = x^2 \sin(x)$
17. $f(x) = \frac{e^{1/x}}{x}$

Correction

1. $f'(x) = 3\cos(x) + 5\sin(x)$
2. $f'(x) = 3e^x - 2x$
3. $f'(x) = \frac{3}{x}$
4. $f'(x) = 2\cos(2x)$
5. $f'(x) = (1 + 3x^2)\cos(x + x^3)$
6. $f'(x) = 3(x+4)^2$
7. $f'(x) = 5(x + \sin(x))^4(1 + \cos(x))$
8. $f'(x) = \frac{2}{x}\cos(\ln(x^2))$
9. $f'(x) = -2\cos(x)\sin(x)\exp(\cos^2(x))$
10. $f'(x) = (1+x)e^x$
11. $f'(x) = \frac{-x\sin(x) - 2\cos(x)}{x^3}$
12. $f'(x) = e^x\left(\sin(x) + \cos(x)\right)$
13. $f'(x) = \frac{1 - 4\ln(x)}{x^5}$
14. $f'(x) = -\sin^2(x) + \cos^2(x)$
15. $f'(x) = \frac{1 - x\ln(x)}{xe^x}$
16. $f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$
17. $f(x) = -\frac{1+x}{x^3}e^{1/x}$

Calcul de dérivées

Composition (*chain rule*)

In "real life"

Le volume d'un ballon sphérique est une fonction du rayon : $r \mapsto v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Si on gonfle ce ballon son rayon dépend du temps : $t \mapsto r(t)$.

Le volume aussi dépend donc du temps : $t \mapsto V(t) = v(r(t))$.

Le taux de changement du volume en fonction du temps est

$$V'(t) = v'(r(t)) \times r'(t) = 4\pi(r(t))^2 r'(t).$$

Par exemple, si le rayon du ballon croît de $0.5\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ et si son rayon à l'instant t_0 est de $3\,\mathrm{cm}$ alors le volume croît à la vitesse de

$$V'(t_0) = v'(r(t_0)) \times r'(t_0) = 4\pi \times (3\,\mathrm{cm})^2 \times (0.5\,\mathrm{cm\,s^{-1}}) = \pi \times 18\,\mathrm{cm^3\,s^{-1}}.$$

2. Dérivées

Calcul approché de valeurs

Connaître la dérivée d'une fonction en un point x_0 permet d'approcher les valeurs de la fonction autour de ce point.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{f(x_0+h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)}$$

Testez-vous

Estimer $\sin(0.01)$ sans utiliser la calculatrice.

Correction

$f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$; pour $x_0 = 0$ et $h = 0.01$ on a

$$\sin(0.01) = \sin(x_0 + h) \simeq \sin(x_0) + h\cos(x_0) = 0 + h = 0.01.$$

Calcul approché de valeurs

Connaître la dérivée d'une fonction en un point x_0 permet d'approcher les valeurs de la fonction autour de ce point.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{f(x_0+h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)}$$

Testez-vous

Estimer $\sin(0.01)$ sans utiliser la calculatrice.

Correction

$f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$; pour $x_0 = 0$ et $h = 0.01$ on a

$$\sin(0.01) = \sin(x_0+h) \simeq \sin(x_0) + h\cos(x_0) = 0 + h = 0.01.$$

Calcul approché de valeurs

Connaître la dérivée d'une fonction en un point x_0 permet d'approcher les valeurs de la fonction autour de ce point.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{f(x_0+h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)}$$

Testez-vous

Estimer $\sin(0.01)$ sans utiliser la calculatrice.

Correction

$f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$; pour $x_0 = 0$ et $h = 0.01$ on a

$$\sin(0.01) = \sin(x_0 + h) \simeq \sin(x_0) + h\cos(x_0) = 0 + h = 0.01.$$

Calcul approché de valeurs

Connaître la dérivée d'une fonction en un point x_0 permet d'approcher les valeurs de la fonction autour de ce point.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)}$$

Testez-vous

Estimer $\sin(0.01)$ sans utiliser la calculatrice.

Correction

$f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$; pour $x_0 = 0$ et $h = 0.01$ on a

$$\sin(0.01) = \sin(x_0 + h) \simeq \sin(x_0) + h\cos(x_0) = 0 + h = 0.01.$$

Calcul approché de valeurs

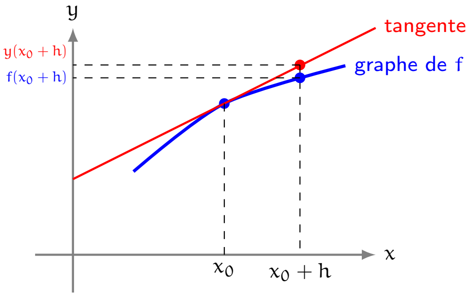
Droite tangente au graphe d'une fonction

Rappels

Si f est dérivable en x_0, alors le graphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente de pente $f'(x_0)$. Son équation est

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

La tangente en x_0 est la droite qui "approche" au mieux le graphe de f autour de x_0. Pour x proche de x_0 ($x = x_0 + h$ avec $h \simeq 0$), au lieu de lire les valeurs $f(x)$ sur le graphe de f, on lit les valeurs approchées $y(x) = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$ sur la tangente en x_0.



Calcul approché de valeurs

Droite tangente au graphe d'une fonction

Testez-vous

Donner l'équation de la droite tangente au point indiqué :

1. $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$
3. $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = 1$
4. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$
5. $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$
6. $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$

Correction

1. $y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$
2. $y = \frac{x+1}{2}$
3. $y = x - 1$
4. $y = x + 1$
5. $y = x$
6. $y = 1$

Calcul approché de valeurs

Droite tangente au graphe d'une fonction

Testez-vous

Donner l'équation de la droite tangente au point indiqué :

1. $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$
3. $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = 1$
4. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$
5. $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$
6. $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$

Correction

1. $y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$
2. $y = \frac{x+1}{2}$
3. $y = x - 1$
4. $y = x + 1$
5. $y = x$
6. $y = 1$

Calcul approché de valeurs

Polynôme de Taylor

Pour aller plus loin : polynôme de Taylor

Pour $x \simeq x_0$ on peut approcher $f(x)$ par le polynôme de degré n suivant :

$$f(x) \simeq p(x) \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\underbrace{f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)}_{\text{Droite tangente}} + (x - x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2!}}_{\text{Parabole osculatrice}} + (x - x_0)^3 \frac{f'''(x_0)}{3!} + \cdots + (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

- n = degré du polynôme p = plus grand ordre de dérivation de f
- Si $n = 1$ alors p est l'équation de la droite tangente à f en x_0
- Si $n = 2$ alors p est l'équation de la parabole osculatrice à f en x_0

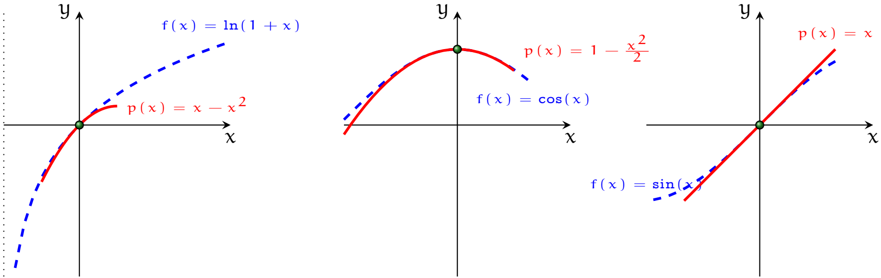
Calcul approché de valeurs

Polynôme de Taylor

Exemple

À l'ordre 2 on a $f(x) \simeq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2}$:

1. $\ln(1+x) \simeq 0 + (x-0)\frac{1}{1+0} + (x-0)^2 \frac{-1}{(1+0)^2} = x - x^2$ lorsque $x \simeq 0$
2. $\cos(x) \simeq 1 + (x-0)(-\sin(0)) + (x-0)^2(-\cos(0)) = 1 - \frac{x^2}{2}$ lorsque $x \simeq 0$
3. $\sin(x) \simeq 0 + (x-0)\cos(0) + (x-0)^2(-\sin(0)) = x$ lorsque $x \simeq 0$



2. Dérivées

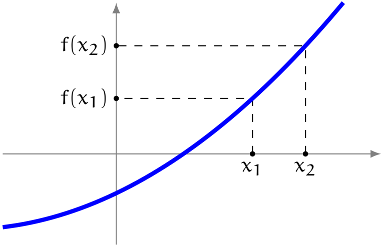
Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

La notion de dérivée joue un rôle clé dans l'étude des fonctions.
Elle permet de déterminer les variations d'une fonction et de trouver ses extremums.

Rappels

Soit une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$. Pour tout x_1 et x_2 de I,

- f est *croissante* si $x_1 \leq x_2$ implique $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- f est *strictement croissante* si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) < f(x_2)$;
- f est *décroissante* si $x_1 \leq x_2$ implique $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- f est *strictement décroissante* si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) > f(x_2)$.



f' et Croissance/décroissance

$f'(x)$ = pente de la droite tangente à f en x = taux instantané de variation de y par rapport à x lorsque $y = f(x)$ donc

1. si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I \stackrel{\text{def}}{=} [a;b]$ alors f est constante sur I ;
2. si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I \stackrel{\text{def}}{=} [a;b]$ alors f est strictement croissante sur I ;
3. $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I \stackrel{\text{def}}{=} [a;b]$ alors f est strictement décroissante sur I.

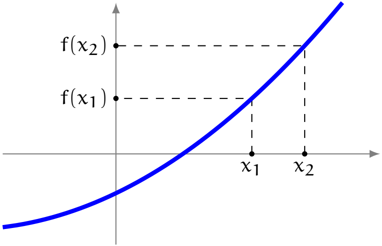
Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

La notion de dérivée joue un rôle clé dans l'étude des fonctions.
Elle permet de déterminer les variations d'une fonction et de trouver ses extremums.

Rappels

Soit une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$. Pour tout x_1 et x_2 de I,

- f est *croissante* si $x_1 \le x_2$ implique $f(x_1) \le f(x_2)$;
- f est *strictement croissante* si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) < f(x_2)$;
- f est *décroissante* si $x_1 \le x_2$ implique $f(x_1) \ge f(x_2)$;
- f est *strictement décroissante* si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) > f(x_2)$.



f' et Croissance/décroissance

$f'(x) =$ pente de la droite tangente à f en $x =$ taux instantané de variation de y par rapport à x lorsque $y = f(x)$ donc

1. si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I \stackrel{\text{def}}{=} [a;b]$ alors f est constante sur I ;
2. si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I \stackrel{\text{def}}{=} [a;b]$ alors f est strictement croissante sur I ;
3. $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I \stackrel{\text{def}}{=} [a;b]$ alors f est strictement décroissante sur I.

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Point stationnaire ou critique

Un point x_0 est stationnaire pour une fonction f si $f'(x_0) = 0$.
En ce point, la droite tangente est horizontale.

Exemple

- La fonction $f(x) = x^2 + 2x + 2$ a un point stationnaire :

$$f'(x) = 2x + 2 = 0 \implies x = -1$$

- La fonction $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ a deux points stationnaires :

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 0 \implies x = 1,\ 2$$

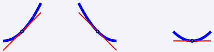
- La fonction $f(x) = xe^{-x}$ a un point stationnaire :

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x} = 0 \implies x = 1$$

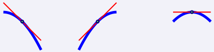
Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Rappels (définition géométrique)

1. f est convexe sur $I \stackrel{\text{def}}{=} [a;b]$ lorsque toutes les cordes reliant deux points du graphe sont au-dessus (= lorsque les droites tangentes au graphe de f en x_0 sont au-dessous pour tout $x_0 \in I$)



2. f est concave sur $I \stackrel{\text{def}}{=} [a;b]$ si $-f$ est convexe



f'' et concavité/convexité

$f''(x) = (f'(x))'$ taux instantané de variation de la pente de la droite tangente à f en x donc

1. si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in I \stackrel{\text{def}}{=} [a;b]$ alors f' est strictement croissante sur I donc la pente de la tangente augmente et f est convexe sur I ;
2. $f''(x) < 0$ pour tout $x \in I \stackrel{\text{def}}{=} [a;b]$ alors f' est strictement décroissante sur I donc la pente de la tangente diminue et f est concave sur I.

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

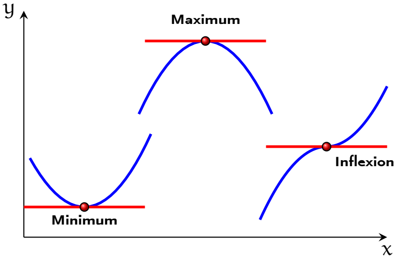
Nature d'un point stationnaire

Soit x_0 un point stationnaire (*i.e.* $f'(x_0) = 0$) pour une fonction f.

Maximum : x_0 est un maximum local si *localement* $f(x) \leq f(x_0)$, *i.e.* si le graphe de f est en dessous de la droite horizontale d'équation $y = f(x_0)$

Minimum : x_0 est un minimum local si *localement* $f(x) \geq f(x_0)$, *i.e.* si le graphe de f est au dessus de la droite horizontale d'équation $y = f(x_0)$

Inflexion : si le graphe de f traverse la droite horizontale d'équation $y = f(x_0)$ alors x_0 n'est ni un minimum ni un maximum. Comme on change de concavité, c'est, de plus, un point d'inflexion.



Proposition

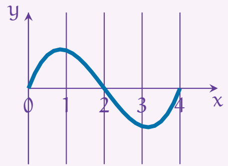
Soit x_0 un point stationnaire (i.e. $f'(x_0) = 0$).

1. *Si $f''(x_0) > 0$, alors x_0 est un minimum.*
2. *Si $f''(x_0) < 0$, alors x_0 est un maximum.*

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Testez-vous

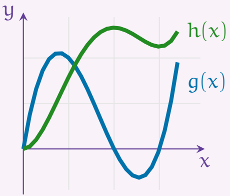
Quels sont les points stationnaires ?
Sur quels intervalles $f'(x) > 0$?
Sur quels intervalles $f''(x) > 0$?



Correction

$x = 1$ et $x = 3$.
Sur $[0; 1[$ et sur $]3; 4]$.
Sur $[2; 4]$.

Testez-vous



$g(x) = h'(x)$
ou
$h(x) = g'(x)$?

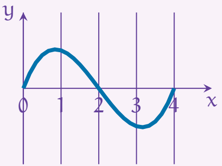
Correction

$g(x) = h'(x)$

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Testez-vous

Quels sont les points stationnaires ?
Sur quels intervalles $f'(x) > 0$?
Sur quels intervalles $f''(x) > 0$?



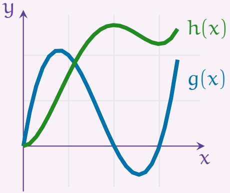
Correction

$x = 1$ et $x = 3$.

Sur $[0; 1[$ et sur $]3; 4]$.

Sur $[2; 4]$.

Testez-vous



$g(x) = h'(x)$
ou
$h(x) = g'(x)$?

Correction

$g(x) = h'(x)$

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Testez-vous

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Calculer les points stationnaires et en établir la nature :

1. $f(x) = (x-2)^2$
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
3. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$
4. $f(x) = xe^{-x}$
5. $f(x) = x^2 \ln(x)$
6. $f(x) = \sin(x) + (1-x)\cos(x)$ pour $x \in [-1;2]$
7. $f(x) = (x-1)^2 e^x$

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

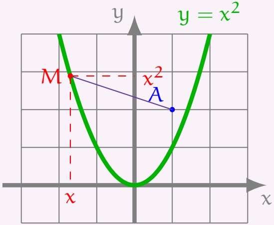
Correction

1. $f'(x) = 2(x-2)$, $f''(x) = 2$ donc $x = 2$ minimum
2. $f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$, $f''(x) = 6(x-2)$ donc $x = 3$ minimum, $x = 1$ maximum
3. $f'(x) = 12(x^3 - 2x^2 + x) = 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(x-1)^2$, $f''(x) = 11(3x^2 - 4x + 1)$ donc $x = 0$ minimum, $x = 1$ inflexion
4. $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, $f''(x) = (-2+x)e^{-x}$ donc $x = 1$ maximum
5. $f'(x) = (1 + 2\ln(x))x$, $f''(x) = 2\ln(x) + x + 1$ donc $x = e^{-1/2}$ minimum
6. $f'(x) = (x-1)\sin(x)$, $f''(x) = \sin(x) + (x-1)\cos(x)$ donc $x = 0$ maximum, $x = 1$ minimum
7. $f'(x) = (x^2 - 1)e^x$, $f'(x) = (x^2 + 2x - 1)e^x$ donc $x = -1$ maximum, $x = 1$ minimum

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Testez-vous

Quel point de la parabole d'équation $y = x^2$ est le plus près du point A de coordonnées $(1, 2)$?



Aide

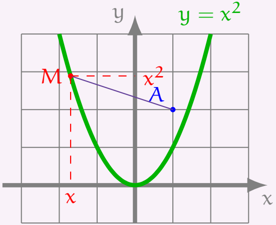
- M appartient à la parabole donc ses coordonnées sont de la forme (x, x^2).
- Distance entre A et M : $AM = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-2)^2}$.
- Trouver le plus petit AM équivaut à trouver le plus petit AM^2. On définit donc comme fonction à minimiser

$$f(x) = (x-1)^2 + (x^2-2)^2 = x^4 - 3x^2 - 2x + 5.$$

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Testez-vous

Quel point de la parabole d'équation $y = x^2$ est le plus près du point A de coordonnées $(1, 2)$?



Aide

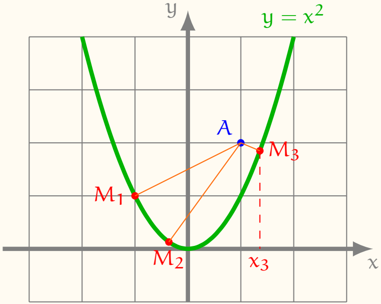
- M appartient à la parabole donc ses coordonnées sont de la forme (x, x^2).
- Distance entre A et M : $AM = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-2)^2}$.
- Trouver le plus petit AM équivaut à trouver le plus petit AM^2. On définit donc comme fonction à minimiser

$$f(x) = (x-1)^2 + (x^2-2)^2 = x^4 - 3x^2 - 2x + 5.$$

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Correction

- $f'(x) = 4x^3 - 6x - 2 = 2(x+1)(2x^2 - 2x - 1)$.
- $f'(x)$ s'annule en $x_1 = -1$, $\quad x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $\quad x_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1.36$.
- $f''(x) = 12x^2 - 6 = 6(2x^2 - 1)$.
- $f''(x_1) > 0$, $f''(x_2) < 0$, $f''(x_3) > 0$.
- Ansi f admet un maximum local en x_2 et un minimum local en x_1 et x_3. L'un des deux est un minimum global, mais lequel ? Il suffit de comparer : $f(x_1) = 5 > f(x_3) = \frac{11-6\sqrt{3}}{4} \approx 0.15$: le minimum global est atteint en x_3.



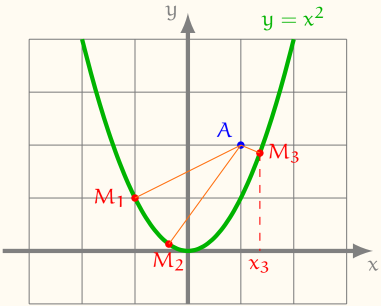
Conclusion : le point de la parabole le plus proche du point A est le point M_3 d'abscisse x_3 et d'ordonnée x_3^2.

Remarque importante : le point M_1 (correspondant à x_1) est moins éloigné de A que ses voisins proches, mais ce n'est pas lui la solution du problème : M_1 correspond à un minimum local, mais pas un minimum global.

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Correction

- $f'(x) = 4x^3 - 6x - 2 = 2(x+1)(2x^2 - 2x - 1)$.
- $f'(x)$ s'annule en $x_1 = -1$, $\quad x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $\quad x_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1.36$.
- $f''(x) = 12x^2 - 6 = 6(2x^2 - 1)$.
- $f''(x_1) > 0$, $f''(x_2) < 0$, $f''(x_3) > 0$.
- Ansi f admet un maximum local en x_2 et un minimum local en x_1 et x_3. L'un des deux est un minimum global, mais lequel ? Il suffit de comparer : $f(x_1) = 5 > f(x_3) = \frac{11-6\sqrt{3}}{4} \approx 0.15$: le minimum global est atteint en x_3.



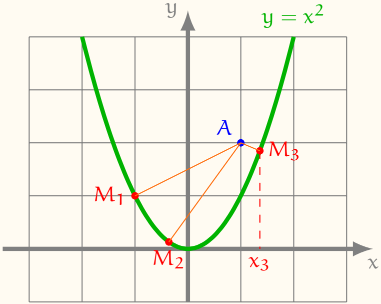
Conclusion : le point de la parabole le plus proche du point A est le point M_3 d'abscisse x_3 et d'ordonnée x_3^2.

Remarque importante : le point M_1 (correspondant à x_1) est moins éloigné de A que ses voisins proches, mais ce n'est pas lui la solution du problème : M_1 correspond à un minimum local, mais pas un minimum global.

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Correction

- $f'(x) = 4x^3 - 6x - 2 = 2(x+1)(2x^2 - 2x - 1)$.
- $f'(x)$ s'annule en $x_1 = -1$, $\quad x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $\quad x_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1.36$.
- $f''(x) = 12x^2 - 6 = 6(2x^2 - 1)$.
- $f''(x_1) > 0$, $f''(x_2) < 0$, $f''(x_3) > 0$.
- Ansi f admet un maximum local en x_2 et un minimum local en x_1 et x_3. L'un des deux est un minimum global, mais lequel ? Il suffit de comparer : $f(x_1) = 5 > f(x_3) = \frac{11-6\sqrt{3}}{4} \approx 0.15$: le minimum global est atteint en x_3.



Conclusion : le point de la parabole le plus proche du point A est le point M_3 d'abscisse x_3 et d'ordonnée x_3^2.

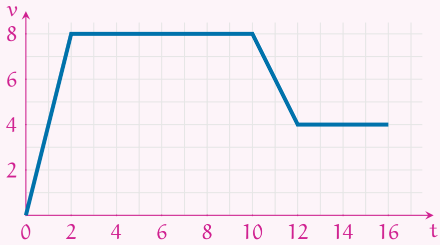
Remarque importante : le point M_1 (correspondant à x_1) est moins éloigné de A que ses voisins proches, mais ce n'est pas lui la solution du problème : M_1 correspond à un minimum local, mais pas un minimum global.

3. Intégrales et calcul d'aires

Vitesse $\rightsquigarrow$ distance parcourue

In "real life"

Celui ci-contre est le graphe de la vitesse d'un coureur en fonction du temps.
Quelle distance a-t-il parcouru en 16 s ?



3. Intégrales et calcul d'aires

Primitives

Intégrale indéfinie ou Primitive

Une fonction $F\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ est une primitive (ou intégrale indéfinie) d'une fonction $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ si

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in [a;b].$$

- Si F existe on dit que f est intégrable.
- F est une primitive de f ssi la fonction $F + c$ l'est pour tout réel c.
- L'ensemble des primitives d'une fonction f est noté $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Primitives

Intégrale indéfinie ou Primitive

Une fonction $F\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive (ou intégrale indéfinie) d'une fonction $f\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ si

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in [a;b].$$

- Si F existe on dit que f est intégrable.
- F est une primitive de f ssi la fonction $F + c$ l'est pour tout réel c.
- L'ensemble des primitives d'une fonction f est noté $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Primitives

Intégrale indéfinie ou Primitive

Une fonction $F\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive (ou intégrale indéfinie) d'une fonction $f\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ si

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in [a;b].$$

- Si F existe on dit que f est intégrable.
- F est une primitive de f ssi la fonction $F + c$ l'est pour tout réel c.
- L'ensemble des primitives d'une fonction f est noté $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Primitives

Intégrale indéfinie ou Primitive

Une fonction $F\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ est une primitive (ou intégrale indéfinie) d'une fonction $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ si

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in [a;b].$$

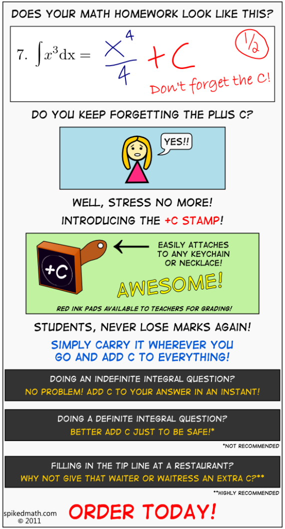
- Si F existe on dit que f est intégrable.
- F est une primitive de f ssi la fonction $F + c$ l'est pour tout réel c.
- L'ensemble des primitives d'une fonction f est noté $\int f(x)dx$:

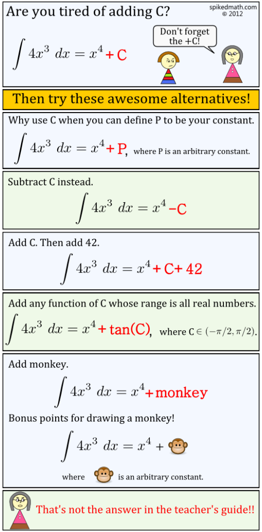
$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Exemple

- $(x^2)' = 2x$ donc $\int 2x dx = x^2 + c$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ donc $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$ donc $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$

Primitives


DOES YOUR MATH HOMEWORK LOOK LIKE THIS?
7. $\int x^3 \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + C$
1/2
Don't forget the C!
DO YOU KEEP FORGETTING THE PLUS C?
YES!!
WELL, STRESS NO MORE!
INTRODUCING THE +C STAMP!
+C
EASILY ATTACHES TO ANY KEYCHAIN OR NECKLACE!
AWESOME!
RED INK PADS AVAILABLE TO TEACHERS FOR GRADING!
STUDENTS, NEVER LOSE MARKS AGAIN!
SIMPLY CARRY IT WHEREVER YOU GO AND ADD C TO EVERYTHING!
DOING AN INDEFINITE INTEGRAL QUESTION? NO PROBLEM! ADD C TO YOUR ANSWER IN AN INSTANT!
DOING A DEFINITE INTEGRAL QUESTION? BETTER ADD C JUST TO BE SAFE!*
*NOT RECOMMENDED
FILLING IN THE TIP LINE AT A RESTAURANT? WHY NOT GIVE THAT WAITER OR WAITRESS AN EXTRA C?**
**HIGHLY RECOMMENDED
spikedmath.com © 2011
ORDER TODAY!


Are you tired of adding C?
spikedmath.com © 2012
$\int 4x^3 \, dx = x^4 + C$
Don't forget the +C!
Then try these awesome alternatives!
Why use C when you can define P to be your constant.
$\int 4x^3 \, dx = x^4 + P$, where P is an arbitrary constant.
Subtract C instead.
$\int 4x^3 \, dx = x^4 - C$
Add C. Then add 42.
$\int 4x^3 \, dx = x^4 + C + 42$
Add any function of C whose range is all real numbers.
$\int 4x^3 \, dx = x^4 + \tan(C)$, where $C \in (-\pi/2, \pi/2)$.
Add monkey.
$\int 4x^3 \, dx = x^4 + \text{monkey}$
Bonus points for drawing a monkey!
$\int 4x^3 \, dx = x^4 +$
where is an arbitrary constant.
That's not the answer in the teacher's guide!!

3. Intégrales et calcul d'aires

Calcul de primitives

Rappels

- $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $\displaystyle\int e^x dx = e^x + c$
- $\displaystyle\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
- $\displaystyle\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{1}{\tan(x)} + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

Calcul de primitives

Rappels

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{1}{\tan(x)} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

Calcul de primitives

Rappels

- $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $\displaystyle\int e^x dx = e^x + c$
- $\displaystyle\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
- $\displaystyle\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{1}{\tan(x)} + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

Calcul de primitives

Rappels

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{1}{\tan(x)} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

Calcul de primitives

Rappels

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{1}{\tan(x)} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

Calcul de primitives

Rappels

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{1}{\tan(x)} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

Calcul de primitives

Rappels

- $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $\displaystyle\int e^x dx = e^x + c$
- $\displaystyle\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
- $\displaystyle\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{1}{\tan(x)} + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

Calcul de primitives

Rappels

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{1}{\tan(x)} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

Calcul de primitives

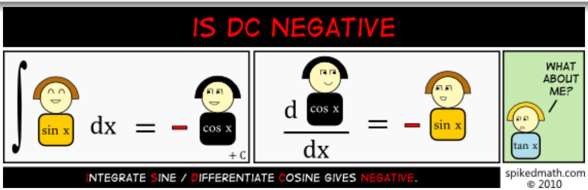
Rappels

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{1}{\tan(x)} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

Calcul de primitives

Rappels

- $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
- $\displaystyle\int e^x dx = e^x + c$
- $\displaystyle\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
- $\displaystyle\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{1}{\tan(x)} + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$



Calcul de primitives

Techniques d'intégration

- Linéarité :

$$\boxed{\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx}, \ k \in \mathbb{R}$$

- Produit (= intégration par parties) :

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

- Composition (=intégration par changement de variable) :
  en posant $u = f(x)$ on obtient $\frac{du}{dx} = f'(x)$, soit encore $du = f'(x)dx$ et donc

$$\boxed{\int g(\underbrace{f(x)}_{=u})\underbrace{f'(x)dx}_{=du} = \int g(u)du = G(u)+c = G(f(x))+c}$$

Calcul de primitives

Techniques d'intégration

- Linéarité :

$$\boxed{\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx}, \quad k \in \mathbb{R}$$

- Produit (= intégration par parties) :

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

- Composition (=intégration par changement de variable) :
en posant $u = f(x)$ on obtient $\frac{du}{dx} = f'(x)$, soit encore $du = f'(x)dx$ et donc

$$\boxed{\int g(\underbrace{f(x)}_{=u})\underbrace{f'(x)dx}_{=du} = \int g(u)du = G(u) + c = G(f(x)) + c}$$

Calcul de primitives

Techniques d'intégration

- Linéarité :

$$\boxed{\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx}, \ k \in \mathbb{R}$$

- Produit (= intégration par parties) :

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Astuce mnémotechnique : $(f(x)\times g(x))' \quad = \quad f'(x)\times g(x) \quad + \quad f(x)\times g'(x)$

- Composition (=intégration par changement de variable) :
en posant $u = f(x)$ on obtient $\frac{du}{dx} = f'(x)$, soit encore $du = f'(x)dx$ et donc

$$\boxed{\int g(\underbrace{f(x)}_{=u})\underbrace{f'(x)dx}_{=du} = \int g(u)du = G(u) + c = G(f(x)) + c}$$

Calcul de primitives

Techniques d'intégration

- Linéarité :

$$\boxed{\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx}, \quad k \in \mathbb{R}$$

- Produit (= intégration par parties) :

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Astuce mnémotechnique : $\int (f(x) \times g(x))'dx = \int f'(x) \times g(x)dx + \int f(x) \times g'(x)dx$

- Composition (=intégration par changement de variable) :
en posant $u = f(x)$ on obtient $\frac{du}{dx} = f'(x)$, soit encore $du = f'(x)dx$ et donc

$$\boxed{\int g(\underbrace{f(x)}_{=u})\underbrace{f'(x)dx}_{=du} = \int g(u)du = G(u) + c = G(f(x)) + c}$$

Calcul de primitives

Techniques d'intégration

- Linéarité :

$$\boxed{\int (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x} \quad \text{et} \quad \boxed{\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x}, \quad k \in \mathbb{R}$$

- Produit (= intégration par parties) :

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x}$$

Astuce mnémotechnique : $f(x) \times g(x) \quad = \int f'(x) \times g(x)\mathrm{d}x + \int f(x) \times g'(x)\mathrm{d}x$

- Composition (=intégration par changement de variable) :
en posant $u = f(x)$ on obtient $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'(x)$, soit encore $\mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x$ et donc

$$\boxed{\int g(\underbrace{f(x)}_{=u})\underbrace{f'(x)\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}u} = \int g(u)\mathrm{d}u = G(u)+c = G(f(x))+c}$$

Calcul de primitives

Techniques d'intégration

- Linéarité :

$$\boxed{\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx}, \quad k \in \mathbb{R}$$

- Produit (= intégration par parties) :

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Astuce mnémotechnique : $f(x) \times g(x) \quad = \int f'(x) \times g(x)dx + \int f(x) \times g'(x)dx$

- Composition (=intégration par changement de variable) :

en posant $u = f(x)$ on obtient $\frac{du}{dx} = f'(x)$, soit encore $du = f'(x)dx$ et donc

$$\boxed{\int g(\underbrace{f(x)}_{=u})\underbrace{f'(x)dx}_{=du} = \int g(u)du = G(u) + c = G(f(x)) + c}$$

Calcul de primitives

Techniques d'intégration

- Linéarité :

$$\boxed{\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx},\ k \in \mathbb{R}$$

- Produit (= intégration par parties) :

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Astuce mnémotechnique : $f(x) \times g(x) = \int f'(x) \times g(x)dx + \int f(x) \times g'(x)dx$

- Composition (=intégration par changement de variable) :

en posant $u = f(x)$ on obtient $\frac{du}{dx} = f'(x)$, soit encore $du = f'(x)dx$ et donc

$$\boxed{\int \underbrace{g(f(x))}_{=u}\underbrace{f'(x)dx}_{=du} = \int g(u)du = G(u) + c = G(f(x)) + c}$$

Astuce mnémotechnique : soit $G' = g$ alors $\Big(G\big(f(x)\big)\Big)' = G'\big(f(x)\big) \times f'(x)$

Calcul de primitives

Techniques d'intégration

- Linéarité :

$$\boxed{\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx}, \quad k \in \mathbb{R}$$

- Produit (= intégration par parties) :

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Astuce mnémotechnique : $f(x) \times g(x) \quad = \int f'(x) \times g(x)dx + \int f(x) \times g'(x)dx$

- Composition (=intégration par changement de variable) :
en posant $u = f(x)$ on obtient $\frac{du}{dx} = f'(x)$, soit encore $du = f'(x)dx$ et donc

$$\boxed{\int g(\underbrace{f(x)}_{=u})\underbrace{f'(x)dx}_{=du} = \int g(u)du = G(u) + c = G(f(x)) + c}$$

Astuce mnémotechnique : soit $G' = g$ alors $\int \Big(G(f(x))\Big)'dx = \int G'(f(x)) \times f'(x)dx$

Calcul de primitives

Techniques d'intégration

- Linéarité :

$$\boxed{\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx},\ k\in\mathbb{R}$$

- Produit (= intégration par parties) :

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Astuce mnémotechnique : $\quad f(x)\times g(x) \quad = \int f'(x)\times g(x)dx + \int f(x)\times g'(x)dx$

- Composition (=intégration par changement de variable) :

en posant $u=f(x)$ on obtient $\frac{du}{dx}=f'(x)$, soit encore $du=f'(x)dx$ et donc

$$\boxed{\int g(\underbrace{f(x)}_{=u})\underbrace{f'(x)dx}_{=du} = \int g(u)du = G(u)+c = G(f(x))+c}$$

Astuce mnémotechnique : soit $G'=g$ alors $\quad G\big(f(x)\big) \quad = \int G'\big(f(x)\big)\times f'(x)dx$

Calcul de primitives

Intégration par changement de variables : Tableau Généralisé

Testez-vous

1. $\int [u(x)]^n u'(x)dx$ pour $n \neq -1$
2. $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx$
3. $\int e^{u(x)} u'(x)dx$
4. $\int \sin(u(x))u'(x)dx$
5. $\int \cos(u(x))u'(x)dx$
6. $\int \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} dx$
7. $\int \frac{u'(x)}{\sin^2(u(x))} dx$
8. $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}} dx$
9. $\int \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2} dx$

Calcul de primitives

Intégration par changement de variables : Tableau Généralisé

Testez-vous

1. $\int [u(x)]^n u'(x)dx$ pour $n \neq -1$
2. $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx$
3. $\int e^{u(x)}u'(x)dx$
4. $\int \sin(u(x))u'(x)dx$
5. $\int \cos(u(x))u'(x)dx$
6. $\int \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}dx$
7. $\int \frac{u'(x)}{\sin^2(u(x))}dx$
8. $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}dx$
9. $\int \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}dx$

Correction

Il suffit de remplacer $u(x)$ par t (ainsi $u'(x)dx = dt$) :

1. $\int t^n dt = \frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + c$
2. $\int \frac{1}{t}dt = \ln(|u(x)|) + c$
3. $\int e^t dt = e^x + c$
4. $\int \sin(t)dt = -\cos(u(x)) + c$
5. $\int \cos(t)dt = \sin(u(x)) + c$
6. $\int \frac{1}{\cos^2(t)}dt = \tan(u(x)) + c$
7. $\int \frac{1}{\sin^2(t)}dt = -\frac{1}{\tan(u(x))} + c$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \arcsin(u(x)) + c = -\arccos(u(x) + c$
9. $\int \frac{1}{1+t)^2}dt = \arctan(u(x)) + c$

Calcul de primitives

Exemple

Exemple

Calculer une primitive de $\frac{\ln(x)}{x}$ avec les trois méthodes.

- Intégration directe :

$$\int \underbrace{\ln(x)}_{u(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)} dx = \int u(x)u'(x)dx = \frac{[u(x)]^2}{2} = \frac{\ln^2(x)}{2} + c$$

- Intégration par changement de variable :

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx \underset{\substack{u=\ln(x)\\ e^u=x\\ e^u du=dx}}{\overset{\uparrow}{=}} = \int \frac{u}{e^u}e^u du = \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\ln^2(x)}{2} + c$$

- Intégration par parties :

$$\int \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} dx \underset{\substack{f(x)=\ln(x) \implies f'(x)=\frac{1}{x}\\ g'(x)=\frac{1}{x} \implies g(x)=\ln(x)}}{\overset{\uparrow}{=}} \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx = \ln^2(x) - \int \frac{\ln(x)}{x}dx$$

i.e. $2\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \ln^2(x) + k$ et finalement $\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{\ln^2(x)}{2} + c$.

Testez-vous

Calculer (et vérifier le calcul en dérivant le résultat) :

1. $\displaystyle\int x(1+x)^3 dx$
2. $\displaystyle\int (x^2+1)^{50} 2x dx$
3. $\displaystyle\int x e^{2x} dx$

Testez-vous

Calculer (et vérifier le calcul en dérivant le résultat) :

1. $\displaystyle\int x(1+x)^3 dx$
2. $\displaystyle\int (x^2+1)^{50} 2x dx$
3. $\displaystyle\int x e^{2x} dx$

Correction

1. $\displaystyle\int x(1+x)^3 dx = \int x(1+3x+3x^2+x^3) dx = \int x+3x^2+3x^3+x^4 dx = \frac{x^2}{2}+3\frac{x^3}{3}+3\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+c$
2. $\displaystyle\int \underbrace{(x^2+1)}_{u}{}^{50}\,\underbrace{2xdx}_{du} = \int u^{50} du = \frac{u^{51}}{51}+c = \frac{(x^2+1)^{51}}{51}+c$
3. $\displaystyle\int \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{e^{2x}}_{g'} dx = \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{\tfrac{1}{2}e^{2x}}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'}\,\underbrace{\tfrac{1}{2}e^{2x}}_{g} dx = \tfrac{1}{2}xe^{2x} - e^{2x} + c = \left(\tfrac{1}{2}x-1\right)e^{2x}+c$

3. Intégrales et calcul d'aires

Intégrale définie et interprétation géométrique

Théorème fondamental du calcul intégral

Intégrale définie

L'intégrale définie sur $[a; b]$ d'une fonction $f\colon [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où $F'(x) = f(x)$ (*i.e.* F est une primitive de f).

Intégrale définie et interprétation géométrique

Théorème fondamental du calcul intégral

Intégrale définie

L'intégrale définie sur $[a;b]$ d'une fonction $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ est

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où $F'(x) = f(x)$ (*i.e.* F est une primitive de f).

Exemple

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1$$

Intégrale définie et interprétation géométrique

Théorème fondamental du calcul intégral

Intégrale définie

L'intégrale définie sur $[a;b]$ d'une fonction $f\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où $F'(x) = f(x)$ (*i.e.* F est une primitive de f).

Exemple

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1$$

Propriétés

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \textit{et} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Intégrale définie et interprétation géométrique

Relation de Chasles

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Intégrale définie et interprétation géométrique

Relation de Chasles

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Exemple

$$\int_{-1}^{2} |x|dx = \int_{-1}^{0} |x|dx + \int_{0}^{2} |x|dx = \int_{-1}^{0} -xdx + \int_{0}^{2} xdx = -\int_{-1}^{0} xdx + \int_{0}^{2} xdx$$

$$= -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = -\left(\frac{0^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) + \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = -\left(0 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{4}{2} - 0\right) = \frac{5}{2}$$

Intégrale définie et interprétation géométrique

Relation de Chasles

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Exemple

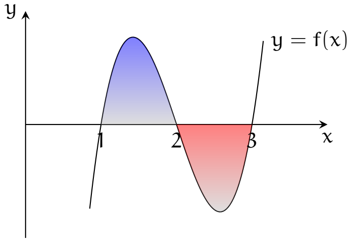
$$\int_{-1}^2 |x|dx = \int_{-1}^0 |x|dx + \int_0^2 |x|dx = \int_{-1}^0 -xdx + \int_0^2 xdx = -\int_{-1}^0 xdx + \int_0^2 xdx$$
$$= -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = -\left(\frac{0^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) + \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = -\left(0 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{4}{2} - 0\right) = \frac{5}{2}$$

Exemple

Si $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 1, \\ x, & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$ alors $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 1dx + \int_1^3 xdx = [x]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = 1 - 0 + \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 5$

Intégrale définie et interprétation géométrique

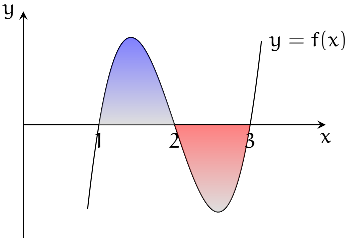
$$\int_a^b f(x)dx = (\text{Aire au-dessus de l'axe des abscisses}) - (\text{Aire en dessous de l'axe des abscisses})$$



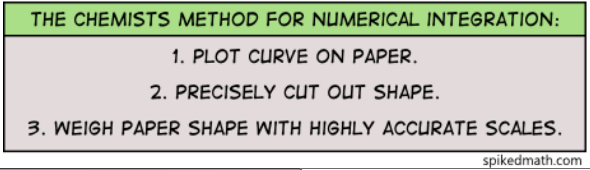
- Aire  $= \int_1^2 f(x)dx$
- Aire  $= -\int_2^3 f(x)dx$

Intégrale définie et interprétation géométrique

$$\int_a^b f(x)dx = (\text{Aire au-dessus de l'axe des abscisses}) - (\text{Aire en dessous de l'axe des abscisses})$$

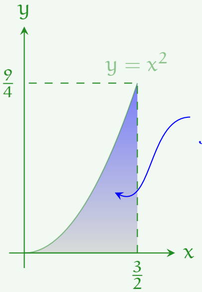


- Aire $= \int_1^2 f(x)dx$
- Aire $= -\int_2^3 f(x)dx$



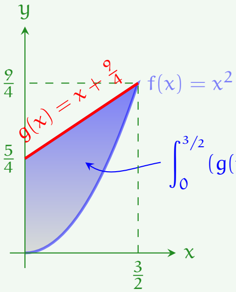
Intégrale définie et interprétation géométrique

Exemple



$$\int_0^{3/2} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{3/2} = \frac{9}{8}$$

Exemple



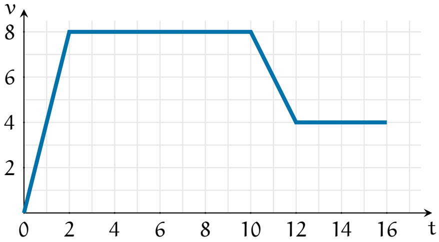
$$\int_0^{3/2} (g(x) - f(x))dx$$

3. Intégrales et calcul d'aires

Déplacement, vitesse, accélération

Testez-vous

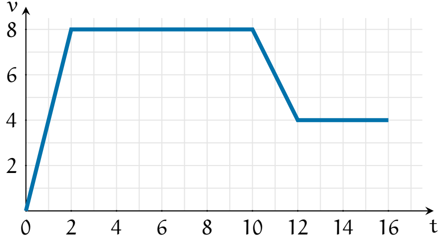
Celui ci-contre est le graphe de la vitesse d'un coureur en fonction du temps.
Quelle distance a-t-il parcouru en 16 s ?



Déplacement, vitesse, accélération

Testez-vous

Celui ci-contre est le graphe de la vitesse d'un coureur en fonction du temps.
Quelle distance a-t-il parcouru en 16 s ?



Correction

La vitesse v en fonction du temps t est la dérivée du déplacement s.
Calculer un déplacement en connaissant la vitesse, signifie chercher une fonction $t \mapsto s(t)$ telle que $s'(t) = v(t)$, autrement dit, s est une primitive de v.

La distance parcourue sera donnée par $s(t_{\text{final}}) - s(t_{\text{initial}})$, autrement dit par $\int_{t_{\text{initial}}}^{t_{\text{final}}} v(t)dt$:

$$\int_0^{16} v(t)dt = \text{Aire sous la courbe} = 100\,\text{m}$$

Déplacement, vitesse, accélération

Testez-vous

1. Un train part de la station A et arrive à la station B en $6\,\text{min}$. Si la vitesse du train en mètres par minute est

$$v(t) = 24t^2(6-t),$$

quelle est la distance entre A et B ?

2. Une particule a une accélération de $a(t) = 2t$. Si sa vitesse à l'instant $t = 1$ est $v(1) = 6$ et la distance parcourue à l'instant $t = 1$ depuis le point initial est $s(1) = 17$, quelle distance aura-t-elle parcourue à l'instant $t = 2$?

Déplacement, vitesse, accélération

Testez-vous

1. Un train part de la station A et arrive à la station B en 6 min. Si la vitesse du train en mètres par minute est
$$v(t) = 24t^2(6-t),$$
quelle est la distance entre A et B ?
2. Une particule a une accélération de $a(t) = 2t$. Si sa vitesse à l'instant $t = 1$ est $v(1) = 6$ et la distance parcourue à l'instant $t = 1$ depuis le point initial est $s(1) = 17$, quelle distance aura-t-elle parcourue à l'instant $t = 2$?

Correction

1. $\displaystyle\int_0^6 v(t)dt = \left[48t^3 - 6t^4\right]_0^6 = 2592\,\text{m}$
2. $a(t) = v'(t) = 2t$ donc $v(t) = t^2 + c_1$. Puisque $v(1) = 6$ alors $c_1 = 5$ et $v(t) = t^2 + 5$.
$v(t) = s'(t)$ donc $s(t) = \frac{t^3}{3} + 5t + c_2$. Puisque $s(1) = 17$ alors $c_2 = \frac{35}{3}$ et $s(t) = \frac{t^3}{3} + 5t + \frac{35}{3}$.
Par conséquent, $s(2) = \frac{73}{3}$.

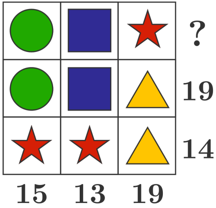
4. Systèmes linéaires

4. Systèmes linéaires

Introduction

Testez-vous

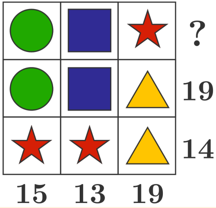
Dans ce puzzle, chaque forme correspond à une valeur.
Le numéro à coté de chaque ligne ou colonne représente la somme des valeurs dans cette ligne ou colonne.
Que vaut le point d'interrogation ?



Introduction

Testez-vous

Dans ce puzzle, chaque forme correspond à une valeur.
Le numéro à coté de chaque ligne ou colonne représente la somme des valeurs dans cette ligne ou colonne.
Que vaut le point d'interrogation ?



Correction

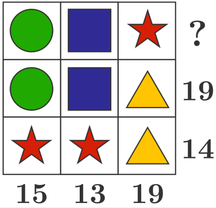
On doit calculer $\bullet + \blacksquare + \bigstar$ sachant que

$$\begin{cases} \bullet + \blacksquare + \blacktriangle = 19 \\ 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ 2\bullet + \bigstar = 15 \\ 2\blacksquare + \bigstar = 13 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$$

Introduction

Testez-vous

Dans ce puzzle, chaque forme correspond à une valeur.
Le numéro à coté de chaque ligne ou colonne représente la somme des valeurs dans cette ligne ou colonne.
Que vaut le point d'interrogation ?



Correction

On doit calculer $\bullet + \blacksquare + \bigstar$ sachant que

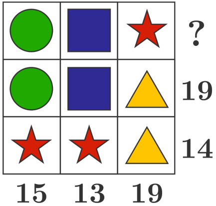
$$\begin{cases} \bullet + \blacksquare + \blacktriangle = 19 \\ 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ 2\bullet + \bigstar = 15 \\ 2\blacksquare + \bigstar = 13 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$$

La deuxième et la dernière équations $\begin{cases} 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$ donnent $\begin{cases} \bigstar = 3 \\ \blacktriangle = 8 \end{cases}$

Introduction

Testez-vous

Dans ce puzzle, chaque forme correspond à une valeur.
Le numéro à coté de chaque ligne ou colonne représente la somme des valeurs dans cette ligne ou colonne.
Que vaut le point d'interrogation ?



Correction

On doit calculer $\bullet + \blacksquare + \bigstar$ sachant que

$$\begin{cases} \bullet + \blacksquare + \blacktriangle = 19 \\ 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ 2\bullet + \bigstar = 15 \\ 2\blacksquare + \bigstar = 13 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$$

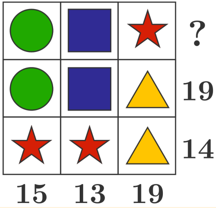
La deuxième et la dernière équations $\begin{cases} 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$ donnent $\begin{cases} \bigstar = 3 \\ \blacktriangle = 8 \end{cases}$

En injectant ces résultats dans la troisième équation on trouve $\bullet = 6$ et dans la quatrième $\blacksquare = 5$.

Introduction

Testez-vous

Dans ce puzzle, chaque forme correspond à une valeur.
Le numéro à coté de chaque ligne ou colonne représente la somme des valeurs dans cette ligne ou colonne.
Que vaut le point d'interrogation ?



Correction

On doit calculer $\bullet + \blacksquare + \bigstar$ sachant que

$$\begin{cases} \bullet + \blacksquare + \blacktriangle = 19 \\ 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ 2\bullet + \bigstar = 15 \\ 2\blacksquare + \bigstar = 13 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$$

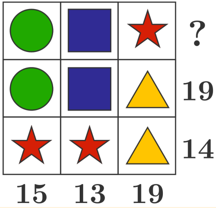
La deuxième et la dernière équations $\begin{cases} 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$ donnent $\begin{cases} \bigstar = 3 \\ \blacktriangle = 8 \end{cases}$

En injectant ces résultats dans la troisième équation on trouve $\bullet = 6$ et dans la quatrième $\blacksquare = 5$.
La première équation est "en trop" : le système est sur-déterminé ! Puisque $\bullet + \blacksquare + \blacktriangle = 6 + 5 + 8 = 19$, elle est vérifiée et on a bien trouvé l'unique solution de ce système linéaire.

Introduction

Testez-vous

Dans ce puzzle, chaque forme correspond à une valeur.
Le numéro à coté de chaque ligne ou colonne représente la somme des valeurs dans cette ligne ou colonne.
Que vaut le point d'interrogation ?



Correction

On doit calculer $\bullet + \blacksquare + \bigstar$ sachant que

$$\begin{cases} \bullet + \blacksquare + \blacktriangle = 19 \\ 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ 2\bullet + \bigstar = 15 \\ 2\blacksquare + \bigstar = 13 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$$

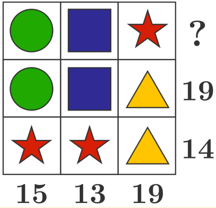
La deuxième et la dernière équations $\begin{cases} 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$ donnent $\begin{cases} \bigstar = 3 \\ \blacktriangle = 8 \end{cases}$

En injectant ces résultats dans la troisième équation on trouve $\bullet = 6$ et dans la quatrième $\blacksquare = 5$.
La première équation est "en trop" : le système est sur-déterminé ! Puisque $\bullet + \blacksquare + \blacktriangle = 6 + 5 + 8 = 19$, elle est vérifiée et on a bien trouvé l'unique solution de ce système linéaire.
Conclusion : $\bullet + \blacksquare + \bigstar = 14$.

Introduction

Testez-vous

Dans ce puzzle, chaque forme correspond à une valeur.
Le numéro à coté de chaque ligne ou colonne représente la somme des valeurs dans cette ligne ou colonne.
Que vaut le point d'interrogation ?



Correction

On doit calculer $\bullet + \blacksquare + \bigstar$ sachant que

$$\begin{cases} \bullet + \blacksquare + \blacktriangle = 19 \\ 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ 2\bullet + \bigstar = 15 \\ 2\blacksquare + \bigstar = 13 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$$

La deuxième et la dernière équations $\begin{cases} 2\bigstar + \blacktriangle = 14 \\ \bigstar + 2\blacktriangle = 19 \end{cases}$ donnent $\begin{cases} \bigstar = 3 \\ \blacktriangle = 8 \end{cases}$

En injectant ces résultats dans la troisième équation on trouve $\bullet = 6$ et dans la quatrième $\blacksquare = 5$.
La première équation est "en trop" : le système est sur-déterminé ! Puisque $\bullet + \blacksquare + \blacktriangle = 6 + 5 + 8 = 19$, elle est vérifiée et on a bien trouvé l'unique solution de ce système linéaire.
Conclusion : $\bullet + \blacksquare + \bigstar = 14$.
Astuce : la somme de toutes les colonne vaut $15 + 13 + 19 = 47$; la somme de toutes les lignes vaut $? + 19 + 14$. Ces deux quantités devant être égale, on obtient $? = 47 - 33 = 14$.

Introduction

Exemple

Si on mélange de la soude caustique et de l'acide sulfurique, on obtient du sulfate de sodium et de l'eau :

$$\underbrace{?\mathrm{NaOH}}_{\text{soude caustique}} + \underbrace{?\mathrm{H_2SO_4}}_{\text{acide sulfurique}} \to \underbrace{?\mathrm{Na_2SO_4}}_{\text{sulfate de sodium}} + ?\mathrm{H_2O}$$

Pour que cette réaction ait lieu, il faut que tous les atomes (par exemple de sodium) qui sont à gauche se retrouvent à droite et vice-versa.

$$\underbrace{x\,\mathrm{NaOH}}_{\text{soude caustique}} + \underbrace{y\,\mathrm{H_2SO_4}}_{\text{acide sulfurique}} \to \underbrace{z\,\mathrm{Na_2SO_4}}_{\text{sulfate de sodium}} + w\,\mathrm{H_2O}$$

On voit bien qu'il nous faut au moins 2 molécules de NaOH à gauche pour tomber sur le $\mathrm{Na_2}$ de droite. On pose alors $x = 2$ (mieux, un multiple de 2) et $z = 1$:

$$2\mathrm{NaOH} + y\mathrm{H_2SO_4} \to \mathrm{Na_2SO_4} + w\mathrm{H_2O}$$

Le 2OH à gauche venant de la soude et la $y\mathrm{H_2}$ venant de l'acide sulfurique se combinent pour donner $w\mathrm{H_2O}$. On peut alors poser $y = 1$ et $w = 2$:

$$2\mathrm{NaOH} + \mathrm{H_2SO_4} \to \mathrm{Na_2SO_4} + 2\mathrm{H_2O}$$

Le $\mathrm{SO_4}$ se trouve bien à gauche et à droite et l'équation est alors équilibrée.

Introduction

Exemple

Si on mélange de la soude caustique et de l'acide sulfurique, on obtient du sulfate de sodium et de l'eau :

$$\underbrace{?\mathrm{NaOH}}_{\text{soude caustique}} + \underbrace{?\mathrm{H_2SO_4}}_{\text{acide sulfurique}} \rightarrow \underbrace{?\mathrm{Na_2SO_4}}_{\text{sulfate de sodium}} + ?\mathrm{H_2O}$$

Pour que cette réaction ait lieu, il faut que tous les atomes (par exemple de sodium) qui sont à gauche se retrouvent à droite et vice-versa.

$$\underbrace{x\,\mathrm{NaOH}}_{\text{soude caustique}} + \underbrace{y\,\mathrm{H_2SO_4}}_{\text{acide sulfurique}} \rightarrow \underbrace{z\,\mathrm{Na_2SO_4}}_{\text{sulfate de sodium}} + w\,\mathrm{H_2O}$$

On voit bien qu'il nous faut au moins 2 molécules de NaOH à gauche pour tomber sur le Na_2 de droite. On pose alors $x = 2$ (mieux, un multiple de 2) et $z = 1$:

$$2\mathrm{NaOH} + y\mathrm{H_2SO_4} \rightarrow \mathrm{Na_2SO_4} + w\mathrm{H_2O}$$

Le $2\mathrm{OH}$ à gauche venant de la soude et la $y\mathrm{H_2}$ venant de l'acide sulfurique se combinent pour donner $w\mathrm{H_2O}$. On peut alors poser $y = 1$ et $w = 2$:

$$2\mathrm{NaOH} + \mathrm{H_2SO_4} \rightarrow \mathrm{Na_2SO_4} + 2\mathrm{H_2O}$$

Le SO_4 se trouve bien à gauche et à droite et l'équation est alors équilibrée.

Introduction

Exemple

Si on mélange de la soude caustique et de l'acide sulfurique, on obtient du sulfate de sodium et de l'eau :

$$\underbrace{?\mathrm{NaOH}}_{\text{soude caustique}} + \underbrace{?\mathrm{H_2SO_4}}_{\text{acide sulfurique}} \to \underbrace{?\mathrm{Na_2SO_4}}_{\text{sulfate de sodium}} + ?\mathrm{H_2O}$$

Pour que cette réaction ait lieu, il faut que tous les atomes (par exemple de sodium) qui sont à gauche se retrouvent à droite et vice-versa.

$$\underbrace{x\,\mathrm{NaOH}}_{\text{soude caustique}} + \underbrace{y\,\mathrm{H_2SO_4}}_{\text{acide sulfurique}} \to \underbrace{z\,\mathrm{Na_2SO_4}}_{\text{sulfate de sodium}} + w\,\mathrm{H_2O}$$

On voit bien qu'il nous faut au moins 2 molécules de NaOH à gauche pour tomber sur le Na_2 de droite. On pose alors $x = 2$ (mieux, un multiple de 2) et $z = 1$:

$$2\mathrm{NaOH} + y\mathrm{H_2SO_4} \to \mathrm{Na_2SO_4} + w\mathrm{H_2O}$$

Le $2\mathrm{OH}$ à gauche venant de la soude et la $y\mathrm{H_2}$ venant de l'acide sulfurique se combinent pour donner $w\mathrm{H_2O}$. On peut alors poser $y = 1$ et $w = 2$:

$$2\mathrm{NaOH} + \mathrm{H_2SO_4} \to \mathrm{Na_2SO_4} + 2\mathrm{H_2O}$$

Le SO_4 se trouve bien à gauche et à droite et l'équation est alors équilibrée.

Introduction

Exemple

Si on mélange de la soude caustique et de l'acide sulfurique, on obtient du sulfate de sodium et de l'eau :

$$\underbrace{?\mathrm{NaOH}}_{\text{soude caustique}} + \underbrace{?\mathrm{H_2SO_4}}_{\text{acide sulfurique}} \to \underbrace{?\mathrm{Na_2SO_4}}_{\text{sulfate de sodium}} + ?\mathrm{H_2O}$$

Pour que cette réaction ait lieu, il faut que tous les atomes (par exemple de sodium) qui sont à gauche se retrouvent à droite et vice-versa.

$$\underbrace{x\,\mathrm{NaOH}}_{\text{soude caustique}} + \underbrace{y\,\mathrm{H_2SO_4}}_{\text{acide sulfurique}} \to \underbrace{z\,\mathrm{Na_2SO_4}}_{\text{sulfate de sodium}} + w\,\mathrm{H_2O}$$

On voit bien qu'il nous faut au moins 2 molécules de NaOH à gauche pour tomber sur le Na_2 de droite. On pose alors $x = 2$ (mieux, un multiple de 2) et $z = 1$:

$$2\mathrm{NaOH} + y\mathrm{H_2SO_4} \to \mathrm{Na_2SO_4} + w\mathrm{H_2O}$$

Le 2OH à gauche venant de la soude et la $y\mathrm{H_2}$ venant de l'acide sulfurique se combinent pour donner $w\mathrm{H_2O}$. On peut alors poser $y = 1$ et $w = 2$:

$$2\mathrm{NaOH} + \mathrm{H_2SO_4} \to \mathrm{Na_2SO_4} + 2\mathrm{H_2O}$$

Le SO_4 se trouve bien à gauche et à droite et l'équation est alors équilibrée.

Introduction

Testez-vous

Équilibrer l'équation

$$x_1\ \mathrm{CuSCN} + x_2\ \mathrm{KIO_3} + x_3\ \mathrm{HCl} \to x_4\ \mathrm{CuSO_4} + x_5\ \mathrm{KCl} + x_6\ \mathrm{HCN} + x_7\ \mathrm{ICl} + x_8\ \mathrm{H_2O}$$

Correction

Chaque élément chimique en jeu fournit une équation :

$$\text{Le sulfure de cuire CuS donne } x_1 = x_4 \tag{1}$$
$$\text{Le cyanure CN donne } x_1 = x_6 \tag{2}$$
$$\text{Le potassium K donne } x_2 = x_5 \tag{3}$$
$$\text{Le iode I donne } x_2 = x_7 \tag{4}$$
$$\text{Le chlore Cl donne } x_3 = x_5 + x_7 \tag{5}$$
$$\text{L'oxygène O donne } 3x_2 = 4x_4 + x_8 \tag{6}$$
$$\text{L'hydrogène H donne } x_3 = x_6 + 2x_8 \tag{7}$$

On a alors

$$x_1 \overset{(1)}{=} x_4 \overset{(2)}{=} x_6, \tag{8}$$
$$x_2 \overset{(3)}{=} x_5 \overset{(4)}{=} x_7, \tag{9}$$
$$x_3 \overset{(5)}{=} x_5 + x_7 \overset{(8)}{=} 2x_2 \tag{10}$$

De plus

$$x_8 \overset{(6)}{=} 3x_2 - 4x_4 \overset{(8)}{=} 3x_2 - 4x_1 \tag{11}$$
$$2x_8 \overset{(7)}{=} x_3 - x_1 \overset{(8)}{=} 2x_2 - x_1 \tag{12}$$

donc

$$2x_2 - x_1 \overset{(12)}{=} 2x_8 \overset{(11)}{=} 2(3x_2 - 4x_1)$$

Cela donne

$$4x_2 = 7x_1 \tag{13}$$

d'où

$$4x_8 \overset{(12)}{=} 2(2x_2 - x_1) = 4x_2 - 2x_1 \overset{(13)}{=} 7x_1 - 2x_1 = 5x_1 \tag{14}$$

Enfin on a

$$2x_3 \overset{(7)}{=} 2(x_6 + 2x_8) \overset{(8)-(14)}{=} 2x_1 + 5x_1 = 7x_1$$

Conclusion :

$$x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_3 = \frac{7}{2}x_1$$
$$x_4 = x_1$$
$$x_5 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_6 = x_1$$
$$x_7 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_8 = \frac{5}{4}x_1$$

On choisit $x_1 = 4$ (pour ne pas avoir de fractions) ainsi

$$4\mathrm{CuSCN} + 7\mathrm{KIO_3} + 14\mathrm{HCl} \to 4\mathrm{CuSO_4} + 7\mathrm{KCl} + 4\mathrm{HCN} + 7\mathrm{ICl} + 5\mathrm{H_2O}$$

Existe-t-il une méthode générale pour résoudre un système linéaire ?

Introduction

Testez-vous

Équilibrer l'équation

$$x_1\ \mathrm{CuSCN} + x_2\ \mathrm{KIO_3} + x_3\ \mathrm{HCl} \longrightarrow x_4\ \mathrm{CuSO_4} + x_5\ \mathrm{KCl} + x_6\ \mathrm{HCN} + x_7\ \mathrm{ICl} + x_8\ \mathrm{H_2O}$$

Correction

Chaque élément chimique en jeu fournit une équation :

$$\text{Le sulfure de cuire CuS donne } x_1 = x_4 \quad (1)$$
$$\text{Le cyanure CN donne } x_1 = x_6 \quad (2)$$
$$\text{Le potassium K donne } x_2 = x_5 \quad (3)$$
$$\text{Le iode I donne } x_2 = x_7 \quad (4)$$
$$\text{Le chlore Cl donne } x_3 = x_5 + x_7 \quad (5)$$
$$\text{L'oxygène O donne } 3x_2 = 4x_4 + x_8 \quad (6)$$
$$\text{L'hydrogène H donne } x_3 = x_6 + 2x_8 \quad (7)$$

On a alors

$$x_1 \overset{(1)}{=} x_4 \overset{(2)}{=} x_6, \quad (8)$$
$$x_2 \overset{(3)}{=} x_5 \overset{(4)}{=} x_7, \quad (9)$$
$$x_3 \overset{(5)}{=} x_5 + x_7 \overset{(8)}{=} 2x_2 \quad (10)$$

De plus

$$x_8 \overset{(6)}{=} 3x_2 - 4x_4 \overset{(8)}{=} 3x_2 - 4x_1 \quad (11)$$
$$2x_8 \overset{(7)}{=} x_3 - x_1 \overset{(8)}{=} 2x_2 - x_1 \quad (12)$$

donc

$$2x_2 - x_1 \overset{(12)}{=} 2x_8 \overset{(11)}{=} 2(3x_2 - 4x_1)$$

Cela donne

$$4x_2 = 7x_1 \quad (13)$$

d'où

$$4x_8 \overset{(12)}{=} 2(2x_2 - x_1) = 4x_2 - 2x_1 \overset{(13)}{=} 7x_1 - 2x_1 = 5x_1 \quad (14)$$

Enfin on a

$$2x_3 \overset{(7)}{=} 2(x_6 + 2x_8) \overset{(8)-(14)}{=} 2x_1 + 5x_1 = 7x_1$$

Conclusion :

$$x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_3 = \frac{7}{2}x_1$$
$$x_4 = x_1$$
$$x_5 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_6 = x_1$$
$$x_7 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_8 = \frac{5}{4}x_1$$

On choisit $x_1 = 4$ (pour ne pas avoir de fractions) ainsi

$$4\mathrm{CuSCN} + 7\mathrm{KIO_3} + 14\mathrm{HCl} \longrightarrow 4\mathrm{CuSO_4} + 7\mathrm{KCl} + 4\mathrm{HCN} + 7\mathrm{ICl} + 5\mathrm{H_2O}$$

Existe-t-il une méthode générale pour résoudre un système linéaire ?

Introduction

Testez-vous

Équilibrer l'équation

$$x_1\,\mathrm{CuSCN} + x_2\,\mathrm{KIO_3} + x_3\,\mathrm{HCl} \to x_4\,\mathrm{CuSO_4} + x_5\,\mathrm{KCl} + x_6\,\mathrm{HCN} + x_7\,\mathrm{ICl} + x_8\,\mathrm{H_2O}$$

Correction

Chaque élément chimique en jeu fournit une équation :

$$\text{Le sulfure de cuire CuS donne } x_1 = x_4 \tag{1}$$
$$\text{Le cyanure CN donne } x_1 = x_6 \tag{2}$$
$$\text{Le potassium K donne } x_2 = x_5 \tag{3}$$
$$\text{Le iode I donne } x_2 = x_7 \tag{4}$$
$$\text{Le chlore Cl donne } x_3 = x_5 + x_7 \tag{5}$$
$$\text{L'oxygène O donne } 3x_2 = 4x_4 + x_8 \tag{6}$$
$$\text{L'hydrogène H donne } x_3 = x_6 + 2x_8 \tag{7}$$

On a alors

$$x_1 \overset{(1)}{=} x_4 \overset{(2)}{=} x_6, \tag{8}$$
$$x_2 \overset{(3)}{=} x_5 \overset{(4)}{=} x_7, \tag{9}$$
$$x_3 \overset{(5)}{=} x_5 + x_7 \overset{(8)}{=} 2x_2 \tag{10}$$

De plus

$$x_8 \overset{(6)}{=} 3x_2 - 4x_4 \overset{(8)}{=} 3x_2 - 4x_1 \tag{11}$$
$$2x_8 \overset{(7)}{=} x_3 - x_1 \overset{(8)}{=} 2x_2 - x_1 \tag{12}$$

donc

$$2x_2 - x_1 \overset{(12)}{=} 2x_8 \overset{(11)}{=} 2(3x_2 - 4x_1)$$

Cela donne

$$4x_2 = 7x_1 \tag{13}$$

d'où

$$4x_8 \overset{(12)}{=} 2(2x_2 - x_1) = 4x_2 - 2x_1 \overset{(13)}{=} 7x_1 - 2x_1 = 5x_1 \tag{14}$$

Enfin on a

$$2x_3 \overset{(7)}{=} 2(x_6 + 2x_8) \overset{(8)-(14)}{=} 2x_1 + 5x_1 = 7x_1$$

Conclusion :

$$x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_3 = \frac{7}{2}x_1$$
$$x_4 = x_1$$
$$x_5 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_6 = x_1$$
$$x_7 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_8 = \frac{5}{4}x_1$$

On choisit $x_1 = 4$ (pour ne pas avoir de fractions) ainsi

$$4\mathrm{CuSCN} + 7\mathrm{KIO_3} + 14\mathrm{HCl} \to 4\mathrm{CuSO_4} + 7\mathrm{KCl} + 4\mathrm{HCN} + 7\mathrm{ICl} + 5\mathrm{H_2O}$$

Existe-t-il une méthode générale pour résoudre un système linéaire ?

Introduction

Testez-vous

Équilibrer l'équation

$$x_1\,CuSCN + x_2\,KIO_3 + x_3\,HCl \to x_4\,CuSO_4 + x_5\,KCl + x_6\,HCN + x_7\,ICl + x_8\,H_2O$$

Correction

Chaque élément chimique en jeu fournit une équation :

$$\text{Le sulfure de cuire CuS donne } x_1 = x_4 \tag{1}$$
$$\text{Le cyanure CN donne } x_1 = x_6 \tag{2}$$
$$\text{Le potassium K donne } x_2 = x_5 \tag{3}$$
$$\text{Le iode I donne } x_2 = x_7 \tag{4}$$
$$\text{Le chlore Cl donne } x_3 = x_5 + x_7 \tag{5}$$
$$\text{L'oxygène O donne } 3x_2 = 4x_4 + x_8 \tag{6}$$
$$\text{L'hydrogène H donne } x_3 = x_6 + 2x_8 \tag{7}$$

On a alors

$$x_1 \overset{(1)}{=} x_4 \overset{(2)}{=} x_6, \tag{8}$$
$$x_2 \overset{(3)}{=} x_5 \overset{(4)}{=} x_7, \tag{9}$$
$$x_3 \overset{(5)}{=} x_5 + x_7 \overset{(8)}{=} 2x_2 \tag{10}$$

De plus

$$x_8 \overset{(6)}{=} 3x_2 - 4x_4 \overset{(8)}{=} 3x_2 - 4x_1 \tag{11}$$
$$2x_8 \overset{(7)}{=} x_3 - x_1 \overset{(8)}{=} 2x_2 - x_1 \tag{12}$$

donc

$$2x_2 - x_1 \overset{(12)}{=} 2x_8 \overset{(11)}{=} 2(3x_2 - 4x_1)$$

Cela donne

$$4x_2 = 7x_1 \tag{13}$$

d'où

$$4x_8 \overset{(12)}{=} 2(2x_2 - x_1) = 4x_2 - 2x_1 \overset{(13)}{=} 7x_1 - 2x_1 = 5x_1 \tag{14}$$

Enfin on a

$$2x_3 \overset{(7)}{=} 2(x_6 + 2x_8) \overset{(8)-(14)}{=} 2x_1 + 5x_1 = 7x_1$$

Conclusion :

$$x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_3 = \frac{7}{2}x_1$$
$$x_4 = x_1$$
$$x_5 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_6 = x_1$$
$$x_7 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_8 = \frac{5}{4}x_1$$

On choisit $x_1 = 4$ (pour ne pas avoir de fractions) ainsi

$$4CuSCN + 7KIO_3 + 14HCl \to 4CuSO_4 + 7KCl + 4HCN + 7ICl + 5H_2O$$

Existe-t-il une méthode générale pour résoudre un système linéaire ?

Introduction

Testez-vous

Équilibrer l'équation

$$x_1\,\mathrm{CuSCN} + x_2\,\mathrm{KIO_3} + x_3\,\mathrm{HCl} \to x_4\,\mathrm{CuSO_4} + x_5\,\mathrm{KCl} + x_6\,\mathrm{HCN} + x_7\,\mathrm{ICl} + x_8\,\mathrm{H_2O}$$

Correction

Chaque élément chimique en jeu fournit une équation :

$$\text{Le sulfure de cuire CuS donne } x_1 = x_4 \tag{1}$$
$$\text{Le cyanure CN donne } x_1 = x_6 \tag{2}$$
$$\text{Le potassium K donne } x_2 = x_5 \tag{3}$$
$$\text{Le iode I donne } x_2 = x_7 \tag{4}$$
$$\text{Le chlore Cl donne } x_3 = x_5 + x_7 \tag{5}$$
$$\text{L'oxygène O donne } 3x_2 = 4x_4 + x_8 \tag{6}$$
$$\text{L'hydrogène H donne } x_3 = x_6 + 2x_8 \tag{7}$$

On a alors

$$x_1 \overset{(1)}{=} x_4 \overset{(2)}{=} x_6, \tag{8}$$
$$x_2 \overset{(3)}{=} x_5 \overset{(4)}{=} x_7, \tag{9}$$
$$x_3 \overset{(5)}{=} x_5 + x_7 \overset{(8)}{=} 2x_2 \tag{10}$$

De plus

$$x_8 \overset{(6)}{=} 3x_2 - 4x_4 \overset{(8)}{=} 3x_2 - 4x_1 \tag{11}$$
$$2x_8 \overset{(7)}{=} x_3 - x_1 \overset{(8)}{=} 2x_2 - x_1 \tag{12}$$

donc

$$2x_2 - x_1 \overset{(12)}{=} 2x_8 \overset{(11)}{=} 2(3x_2 - 4x_1)$$

Cela donne

$$4x_2 = 7x_1 \tag{13}$$

d'où

$$4x_8 \overset{(12)}{=} 2(2x_2 - x_1) = 4x_2 - 2x_1 \overset{(13)}{=} 7x_1 - 2x_1 = 5x_1 \tag{14}$$

Enfin on a

$$2x_3 \overset{(7)}{=} 2(x_6 + 2x_8) \overset{(8)-(14)}{=} 2x_1 + 5x_1 = 7x_1$$

Conclusion :

$$x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_3 = \frac{7}{2}x_1$$
$$x_4 = x_1$$
$$x_5 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_6 = x_1$$
$$x_7 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_8 = \frac{5}{4}x_1$$

On choisit $x_1 = 4$ (pour ne pas avoir de fractions) ainsi

$$4\mathrm{CuSCN} + 7\mathrm{KIO_3} + 14\mathrm{HCl} \to 4\mathrm{CuSO_4} + 7\mathrm{KCl} + 4\mathrm{HCN} + 7\mathrm{ICl} + 5\mathrm{H_2O}$$

Existe-t-il une méthode générale pour résoudre un système linéaire ?

Introduction

Testez-vous

Équilibrer l'équation

$$x_1\,\mathrm{CuSCN} + x_2\,\mathrm{KIO_3} + x_3\,\mathrm{HCl} \to x_4\,\mathrm{CuSO_4} + x_5\,\mathrm{KCl} + x_6\,\mathrm{HCN} + x_7\,\mathrm{ICl} + x_8\,\mathrm{H_2O}$$

Correction

Chaque élément chimique en jeu fournit une équation :

$$\text{Le sulfure de cuire CuS donne } x_1 = x_4 \tag{1}$$
$$\text{Le cyanure CN donne } x_1 = x_6 \tag{2}$$
$$\text{Le potassium K donne } x_2 = x_5 \tag{3}$$
$$\text{Le iode I donne } x_2 = x_7 \tag{4}$$
$$\text{Le chlore Cl donne } x_3 = x_5 + x_7 \tag{5}$$
$$\text{L'oxygène O donne } 3x_2 = 4x_4 + x_8 \tag{6}$$
$$\text{L'hydrogène H donne } x_3 = x_6 + 2x_8 \tag{7}$$

On a alors

$$x_1 \overset{(1)}{=} x_4 \overset{(2)}{=} x_6, \tag{8}$$
$$x_2 \overset{(3)}{=} x_5 \overset{(4)}{=} x_7, \tag{9}$$
$$x_3 \overset{(5)}{=} x_5 + x_7 \overset{(8)}{=} 2x_2 \tag{10}$$

De plus

$$x_8 \overset{(6)}{=} 3x_2 - 4x_4 \overset{(8)}{=} 3x_2 - 4x_1 \tag{11}$$
$$2x_8 \overset{(7)}{=} x_3 - x_1 \overset{(8)}{=} 2x_2 - x_1 \tag{12}$$

donc

$$2x_2 - x_1 \overset{(12)}{=} 2x_8 \overset{(11)}{=} 2(3x_2 - 4x_1)$$

Cela donne

$$4x_2 = 7x_1 \tag{13}$$

d'où

$$4x_8 \overset{(12)}{=} 2(2x_2 - x_1) = 4x_2 - 2x_1 \overset{(13)}{=} 7x_1 - 2x_1 = 5x_1 \tag{14}$$

Enfin on a

$$2x_3 \overset{(7)}{=} 2(x_6 + 2x_8) \overset{(8)-(14)}{=} 2x_1 + 5x_1 = 7x_1$$

Conclusion :

$$x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_3 = \frac{7}{2}x_1$$
$$x_4 = x_1$$
$$x_5 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_6 = x_1$$
$$x_7 = x_2 = \frac{7}{4}x_1$$
$$x_8 = \frac{5}{4}x_1$$

On choisit $x_1 = 4$ (pour ne pas avoir de fractions) ainsi

$$4\mathrm{CuSCN} + 7\mathrm{KIO_3} + 14\mathrm{HCl} \to 4\mathrm{CuSO_4} + 7\mathrm{KCl} + 4\mathrm{HCN} + 7\mathrm{ICl} + 5\mathrm{H_2O}$$

Existe-t-il une méthode générale pour résoudre un système linéaire ?

Introduction

Testez-vous

Équilibrer l'équation

$$x_1\,CuSCN + x_2\,KIO_3 + x_3\,HCl \to x_4\,CuSO_4 + x_5\,KCl + x_6\,HCN + x_7\,ICl + x_8\,H_2O$$

Correction

Chaque élément chimique en jeu fournit une équation :

$$\begin{aligned}
\text{Le sulfure de cuire CuS donne } x_1 &= x_4 && (1)\\
\text{Le cyanure CN donne } x_1 &= x_6 && (2)\\
\text{Le potassium K donne } x_2 &= x_5 && (3)\\
\text{Le iode I donne } x_2 &= x_7 && (4)\\
\text{Le chlore Cl donne } x_3 &= x_5 + x_7 && (5)\\
\text{L'oxygène O donne } 3x_2 &= 4x_4 + x_8 && (6)\\
\text{L'hydrogène H donne } x_3 &= x_6 + 2x_8 && (7)
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
x_1 &\overset{(1)}{=} x_4 \overset{(2)}{=} x_6, && (8)\\
x_2 &\overset{(3)}{=} x_5 \overset{(4)}{=} x_7, && (9)\\
x_3 &\overset{(5)}{=} x_5 + x_7 \overset{(8)}{=} 2x_2 && (10)
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
x_8 &\overset{(6)}{=} 3x_2 - 4x_4 \overset{(8)}{=} 3x_2 - 4x_1 && (11)\\
2x_8 &\overset{(7)}{=} x_3 - x_1 \overset{(8)}{=} 2x_2 - x_1 && (12)
\end{aligned}$$

donc

$$2x_2 - x_1 \overset{(12)}{=} 2x_8 \overset{(11)}{=} 2(3x_2 - 4x_1)$$

Cela donne

$$4x_2 = 7x_1 \qquad (13)$$

d'où

$$4x_8 \overset{(12)}{=} 2(2x_2 - x_1) = 4x_2 - 2x_1 \overset{(13)}{=} 7x_1 - 2x_1 = 5x_1 \qquad (14)$$

Enfin on a

$$2x_3 \overset{(7)}{=} 2(x_6 + 2x_8) \overset{(8)-(14)}{=} 2x_1 + 5x_1 = 7x_1$$

Conclusion :

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{7}{4}x_1\\
x_3 &= \frac{7}{2}x_1\\
x_4 &= x_1\\
x_5 &= x_2 = \frac{7}{4}x_1\\
x_6 &= x_1\\
x_7 &= x_2 = \frac{7}{4}x_1\\
x_8 &= \frac{5}{4}x_1
\end{aligned}$$

On choisit $x_1 = 4$ (pour ne pas avoir de fractions) ainsi

$$4CuSCN + 7KIO_3 + 14HCl \to 4CuSO_4 + 7KCl + 4HCN + 7ICl + 5H_2O$$

Existe-t-il une méthode générale pour résoudre un système linéaire ?

Introduction

Testez-vous

Équilibrer l'équation

$$x_1\ \mathrm{CuSCN} + x_2\ \mathrm{KIO_3} + x_3\ \mathrm{HCl} \to x_4\ \mathrm{CuSO_4} + x_5\ \mathrm{KCl} + x_6\ \mathrm{HCN} + x_7\ \mathrm{ICl} + x_8\ \mathrm{H_2O}$$

Correction

Chaque élément chimique en jeu fournit une équation :

$$\begin{aligned}
&\text{Le sulfure de cuire CuS donne } x_1 = x_4 && (1)\\
&\text{Le cyanure CN donne } x_1 = x_6 && (2)\\
&\text{Le potassium K donne } x_2 = x_5 && (3)\\
&\text{Le iode I donne } x_2 = x_7 && (4)\\
&\text{Le chlore Cl donne } x_3 = x_5 + x_7 && (5)\\
&\text{L'oxygène O donne } 3x_2 = 4x_4 + x_8 && (6)\\
&\text{L'hydrogène H donne } x_3 = x_6 + 2x_8 && (7)
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
x_1 &\overset{(1)}{=} x_4 \overset{(2)}{=} x_6, && (8)\\
x_2 &\overset{(3)}{=} x_5 \overset{(4)}{=} x_7, && (9)\\
x_3 &\overset{(5)}{=} x_5 + x_7 \overset{(8)}{=} 2x_2 && (10)
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
x_8 &\overset{(6)}{=} 3x_2 - 4x_4 \overset{(8)}{=} 3x_2 - 4x_1 && (11)\\
2x_8 &\overset{(7)}{=} x_3 - x_1 \overset{(8)}{=} 2x_2 - x_1 && (12)
\end{aligned}$$

donc

$$2x_2 - x_1 \overset{(12)}{=} 2x_8 \overset{(11)}{=} 2(3x_2 - 4x_1)$$

Cela donne

$$4x_2 = 7x_1 \qquad (13)$$

d'où

$$4x_8 \overset{(12)}{=} 2(2x_2 - x_1) = 4x_2 - 2x_1 \overset{(13)}{=} 7x_1 - 2x_1 = 5x_1 \qquad (14)$$

Enfin on a

$$2x_3 \overset{(7)}{=} 2(x_6 + 2x_8) \overset{(8)-(14)}{=} 2x_1 + 5x_1 = 7x_1$$

Conclusion :

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{7}{4}x_1\\
x_3 &= \frac{7}{2}x_1\\
x_4 &= x_1\\
x_5 &= x_2 = \frac{7}{4}x_1\\
x_6 &= x_1\\
x_7 &= x_2 = \frac{7}{4}x_1\\
x_8 &= \frac{5}{4}x_1
\end{aligned}$$

On choisit $x_1 = 4$ (pour ne pas avoir de fractions) ainsi

$$4\mathrm{CuSCN} + 7\mathrm{KIO_3} + 14\mathrm{HCl} \to 4\mathrm{CuSO_4} + 7\mathrm{KCl} + 4\mathrm{HCN} + 7\mathrm{ICl} + 5\mathrm{H_2O}$$

Existe-t-il une méthode générale pour résoudre un système linéaire ?

4. Systèmes linéaires

Définitions

Soit $n, p \geq 1$ des entiers. Un système linéaire $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

- Les coefficients a_{ij} et les secondes membres b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{R}$.
- Les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{R}$.
- Une solution de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- Un système est impossible, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution.
  Un système est possible, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- Deux systèmes sont équivalents s'ils admettent les mêmes solutions.
- Le système homogène associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.
- Un système est carré si $n = p$.

Définitions

Soit $n, p \geq 1$ des entiers. Un système linéaire $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \ldots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

- Les coefficients a_{ij} et les secondes membres b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{R}$.
- Les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{R}$.
- Une solution de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- Un système est impossible, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution.
  Un système est possible, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- Deux systèmes sont équivalents s'ils admettent les mêmes solutions.
- Le système homogène associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.
- Un système est carré si $n = p$.

Définitions

Soit $n, p \geq 1$ des entiers. Un système linéaire $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

- Les coefficients a_{ij} et les secondes membres b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{R}$.
- Les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{R}$.
- Une solution de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- Un système est impossible, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution.
  Un système est possible, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- Deux systèmes sont équivalents s'ils admettent les mêmes solutions.
- Le système homogène associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.
- Un système est carré si $n = p$.

Définitions

Soit $n, p \geq 1$ des entiers. Un système linéaire $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

- Les coefficients a_{ij} et les secondes membres b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{R}$.
- Les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{R}$.
- Une solution de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- Un système est impossible, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution.
  Un système est possible, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- Deux systèmes sont équivalents s'ils admettent les mêmes solutions.
- Le système homogène associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.
- Un système est carré si $n = p$.

Définitions

Soit $n, p \geq 1$ des entiers. Un système linéaire $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

- Les coefficients a_{ij} et les secondes membres b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{R}$.
- Les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{R}$.
- Une solution de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- Un système est impossible, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution.
  Un système est possible, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- Deux systèmes sont équivalents s'ils admettent les mêmes solutions.
- Le système homogène associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.
- Un système est carré si $n = p$.

Définitions

Soit $n, p \geq 1$ des entiers. Un système linéaire $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

- Les coefficients a_{ij} et les secondes membres b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{R}$.
- Les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{R}$.
- Une solution de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- Un système est impossible, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution.
  Un système est possible, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- Deux systèmes sont équivalents s'ils admettent les mêmes solutions.
- Le système homogène associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.
- Un système est carré si $n = p$.

Définitions

Soit $n, p \geq 1$ des entiers. Un système linéaire $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \ldots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

- Les coefficients a_{ij} et les secondes membres b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{R}$.
- Les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{R}$.
- Une solution de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- Un système est impossible, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution.
  Un système est possible, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- Deux systèmes sont équivalents s'ils admettent les mêmes solutions.
- Le système homogène associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.
- Un système est carré si $n = p$.

Définitions

Notation matricielle

Le système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

s'écrit de manière compacte comme le tableau à n ligne et $p+1$ colonnes suivant :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} & b_n \end{array}\right]$$

Exemple

Système

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+4y-3z=5 \\ 3x+6y-5z=2 \end{cases}$$

Matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 5 \\ 3 & 6 & -5 & 2 \end{array}\right]$$

Définitions

Système échelonné

Un système est en escalier, ou échelonné, si le nombre de premiers coefficients nuls successifs de chaque équation est strictement croissant.

Exemple

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrcl}
5x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & & +x_6 & = & b_1 \\
 & & 3x_3 & -x_4 & +2x_5 & & = & b_2 \\
 & & & & -x_5 & +x_6 & = & b_3 \\
 & & & & & 5x_6 & = & b_4 \\
 & & & & & 0 & = & b_5
\end{array}\right. \qquad (S)$$

Définitions

Système échelonné

Un système est en escalier, ou échelonné, si le nombre de premiers coefficients nuls successifs de chaque équation est strictement croissant.

Exemple

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrcl} 5x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & & +x_6 & = & b_1 \\ & & 3x_3 & -x_4 & +2x_5 & & = & b_2 \\ & & & & -x_5 & +x_6 & = & b_3 \\ & & & & & 5x_6 & = & b_4 \\ & & & & & 0 & = & b_5 \end{array}\right. \qquad (S)$$

Quand un système échelonné contient une équation du type

$$0x_1 + \cdots + 0x_p = b,$$

- si $b \neq 0$ le système est impossible,
- si $b = 0$, on peut supprimer cette équation, ce qui conduit à un système équivalent à (S) dit système réduit.

Définitions

Résolution d'un système échelonné

Exemple

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ \quad\;\; y+z=5, \\ \qquad\;\;\, z=3. \end{cases}$$

Ce système est possible et admet une et une seule solution : en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$z = 3,$$
$$y = 5 - z = 5 - 3 = 2,$$
$$x = 6 - y - z = 6 - 2 - 3 = 1.$$

Définitions

Résolution d'un système échelonné

Exemple

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ \quad y+z=5, \\ \qquad z=3. \end{cases}$$

Ce système est possible et admet une et une seule solution : en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$z=3,$$
$$y=5-z=5-3=2,$$
$$x=6-y-z=6-2-3=1.$$

Exemple

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ \quad y+z=5, \\ \qquad 0=0. \end{cases}$$

Ce système est possible et admet une infinité de solutions : en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$z=\kappa\in\mathbb{R},$$
$$y=5-\kappa,$$
$$x=6-y-z=1.$$

Définitions

Résolution d'un système échelonné

Exemple

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ y+z=5, \\ z=3. \end{cases}$$

Ce système est possible et admet une et une seule solution : en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$z = 3,$$
$$y = 5 - z = 5 - 3 = 2,$$
$$x = 6 - y - z = 6 - 2 - 3 = 1.$$

Exemple

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ y+z=5, \\ 0=0. \end{cases}$$

Ce système est possible et admet une infinité de solutions : en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$z = \kappa \in \mathbb{R},$$
$$y = 5 - \kappa,$$
$$x = 6 - y - z = 1.$$

Exemple

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ y+z=5, \\ 0=3. \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution car aucune valeur de z permet de résoudre $0z = 3$.

4. Systèmes linéaires

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Idée de la méthode

La méthode de Gauss transforme un système linéaire en un système échelonné équivalent.

Opérations possibles :

- remplacer une ligne par elle même $\pm$ un multiple d'une autre ligne

Exemple

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ y+z=5, \\ y+2z=8, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{cases} x+y+z=6, \\ y+z=5, \\ z=3. \end{cases}$$

- échanger deux lignes

Exemple

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ z=3, \\ y+z=5, \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} x+y+z=6, \\ y+z=5, \\ z=3. \end{cases}$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Algorithme

La méthode de Gauss transforme un système linéaire en un système échelonné équivalent.

Elle comporte $n-1$ étapes :

- à chaque étape j on "élimine" l'inconnue x_j dans les lignes L_i pour $i > j$:

Étape j de la méthode de Gauss :

On transforme toutes les lignes L_i avec $i > j$ selon la règle :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} L_j \qquad [\text{ou } L_i \leftarrow a_{jj} L_i - a_{ij} L_j]$$

- si, à l'étape j, le coefficient a_{jj} (appelé pivot de l'étape j) est $= 0$, on permute deux lignes (*i.e.* deux équations) du système linéaire.
- En réitérant le procédé pour i de 1 à $n-1$, on aboutit à un système échelonné simple à résoudre.

Variante de Jordan :

On transforme toutes les lignes L_i avec $i \neq j$ selon la règle :

$$L_i \leftarrow a_{jj} L_i - a_{ij} L_j \qquad [\text{ou } L_i \leftarrow a_{jj} L_i - a_{ij} L_j].$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\Longrightarrow$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\Longrightarrow$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\Longrightarrow$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\Longrightarrow$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 \;+2x_2+3x_3+4x_4 = 1, \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4 \;= 2, \\ 3x_1+4x_2+x_3 \;+2x_4 = 3, \\ 4x_1+x_2 \;+2x_3+3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\implies$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 = 1 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4 = 2 \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4 = 3 \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 = 1 \\ -x_2-2x_3-7x_4 = 0 \\ -2x_2-8x_3-10x_4 = 0 \\ -7x_2-10x_3-13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 = 1 \\ -x_2-2x_3-7x_4 = 0 \\ -4x_3+4x_4 = 0 \\ 4x_3+36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 = 1 \\ -x_2-2x_3-7x_4 = 0 \\ -4x_3+4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\Longrightarrow$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\Longrightarrow$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\Longrightarrow$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\Longrightarrow$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 \ +2x_2+3x_3+4x_4 = 1, \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4 \ = 2, \\ 3x_1+4x_2+x_3 \ +2x_4 = 3, \\ 4x_1+x_2 \ +2x_3+3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\Longrightarrow$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 = 1 \\ 2x_1+3x_2+4x_3 \ +x_4 = 2 \\ 3x_1+4x_2 \ +x_3+2x_4 = 3 \\ 4x_1 \ +x_2+2x_3+3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4-4L_1}} \begin{cases} x_1+2x_2 \ +3x_3 \ +4x_4 = 1 \\ -x_2 \ -2x_3 \ -7x_4 = 0 \\ -2x_2 \ -8x_3-10x_4 = 0 \\ -7x_2-10x_3-13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4-7L_2}} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 \ +4x_4 = 1 \\ -x_2-2x_3 \ -7x_4 = 0 \\ -4x_3 \ +4x_4 = 0 \\ 4x_3+36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4+L_3} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 = 1 \\ -x_2-2x_3-7x_4 = 0 \\ -4x_3+4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Testez-vous

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Correction

4 équations $\Longrightarrow$ 3 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } j=2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

donc, en partant de la dernière ligne et en remontant, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Système avec paramètres

Testez-vous

Pour quelles valeurs de a et c le système linéaire suivant admet aucune, une seule ou une infinité de solutions ?

$$\begin{cases} x + 5y + z = 0, \\ x + 6y - z = 2, \\ 2x + ay + z = c. \end{cases}$$

Correction

3 équations $\implies$ 2 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ x + 6y - z = 2 \\ 2x + ay + z = c \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ y - 2z = 2 \\ (a-10)y - z = c \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=2]{L_3 \leftarrow L_3 - (a-10)L_2} \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ y - 2z = 2 \\ (2a-21)z = c - 2(a-10) \end{cases}$$

Étudions la dernière équation :

$$(2a-21)z = (c - 2a + 20)$$

- Si $a \neq \frac{21}{2}$ alors $z = \frac{c-2a+20}{2a-21}$ et on trouve y puis x en remontant : il existe une et une seule solution ;
- si $a = \frac{21}{2}$ alors
  - si $c - 2a + 20 = 0$ (*i.e.* $c = 1$), alors $z = \kappa \in \mathbb{R}$ et on trouve y puis x en remontant : il existe une infinité de solutions ;
  - si $c - 2a + 20 \neq 0$ (*i.e.* $c \neq 1$), alors il n'y a aucune solution.

Résolution d'un système linéaire par la méthode Gauss

Système avec paramètres

Testez-vous

Pour quelles valeurs de a et c le système linéaire suivant admet aucune, une seule ou une infinité de solutions ?

$$\begin{cases} x + 5y + z = 0, \\ x + 6y - z = 2, \\ 2x + ay + z = c. \end{cases}$$

Correction

3 équations $\implies$ 2 étapes de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ x + 6y - z = 2 \\ 2x + ay + z = c \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ y - 2z = 2 \\ (a-10)y - z = c \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=2]{L_3 \leftarrow L_3 - (a-10)L_2} \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ y - 2z = 2 \\ (2a-21)z = c - 2(a-10) \end{cases}$$

Étudions la dernière équation :

$$(2a-21)z = (c - 2a + 20)$$

- Si $a \neq \frac{21}{2}$ alors $z = \frac{c-2a+20}{2a-21}$ et on trouve y puis x en remontant : il existe une et une seule solution ;
- si $a = \frac{21}{2}$ alors
  - si $c - 2a + 20 = 0$ (*i.e.* $c = 1$), alors $z = \kappa \in \mathbb{R}$ et on trouve y puis x en remontant : il existe une infinité de solutions ;
  - si $c - 2a + 20 \neq 0$ (*i.e.* $c \neq 1$), alors il n'y a aucune solution.

Pour réviser, s'entraîner et se tester

Pour réviser, s'entraîner et se tester

- OMB+ : chapitre "IV Systèmes linéaires d'équations"

4. Systèmes linéaires

Système sur-déterminé

Si le système (S) a n équations et m inconnues avec $n > m$, on dit que le système est sur-déterminé. On considère alors (S') un sous-système carré d'ordre m qu'on peut résoudre par exemple par la méthode du pivot de Gauss. Parmi les solutions de ce système carré, on cherchera celles qui vérifient les équations de (S) qui n'apparaissent pas dans (S').

Exemple

Soit les systèmes linéaires de $n = 3$ équations et $m = 2$ inconnues

$$(S_1) \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ x + 3y = 4 \end{cases} \qquad\qquad (S_2) \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

Prenons comme sous-système carré d'ordre $m = 2$ celui constitué des deux premières équations et résolvons-le :

$$(S') \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + y = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ce système admet une seule solution : $x = y = 1$.
On vérifie si cette solution satisfait l'équation de (S_1) qui n'apparaît pas dans (S') :

$$x + 3y = 1 + 3 = 4$$

donc $x = y = 1$ est l'unique solution de (S_1).
On vérifie si cette solution satisfait l'équation de (S_2) qui n'apparaît pas dans (S') :

$$x + 3y = 1 + 3 = 4 \neq 0$$

donc (S_2) n'admet pas de solution.

Système sur-déterminé

Comment envoyer un message secret avec plusieurs espions.

In "real life"

Imaginons que l'on désire envoyer un message secret. Par codage, on peut remplacer ce message par un nombre, appelons-le n.

Considérons un polynôme $P(X) = a_k X^k + \cdots + a_1 X + n$ de degré k dont le terme indépendant vaut exactement n. En particulier, on a $P(0) = n$. Un corollaire du théorème fondamental de l'algèbre stipule que le polynôme P est complètement caractérisé par les valeurs qu'il prend en $k+1$ points, par exemple en $X = 1, 2, \ldots, k+1$.

On engage alors au moins $k+1$ espions (mieux en engager un peu plus au cas où certains seraient capturés par les «ennemis»). On donne au i-ème espion le nombre $P(i)$. Les espions se dispersent (par exemple, pour passer les lignes ennemies). Une fois qu'au moins $k+1$ espions sont arrivés à destination, il est aisé de reconstituer le polynôme (on a *un système d'au moins* $k+1$ *équations linéaires* pour retrouver les $k+1$ coefficients de P) et ainsi retrouver la valeur secrète n.
Si un espion est capturé et qu'il parle, les ennemis auront à leur disposition un des $P(i)$, cela ne leur permet nullement de retrouver n.
De même, si un espion étaient en fait un agent double, connaître $P(i)$ seul ne sert à rien.

Source : `http://michelrigo.wordpress.com/2010/01/30/partage-de-secrets-et-tfa/`

Système sur-déterminé

Comment envoyer un message secret avec plusieurs espions.

In "real life"

Imaginons que l'on désire envoyer un message secret. Par codage, on peut remplacer ce message par un nombre, appelons-le n.

Considérons un polynôme $P(X) = a_k X^k + \cdots + a_1 X + n$ de degré k dont le terme indépendant vaut exactement n. En particulier, on a $P(0) = n$. Un corollaire du théorème fondamental de l'algèbre stipule que le polynôme P est complètement caractérisé par les valeurs qu'il prend en $k+1$ points, par exemple en $X = 1, 2, \dots, k+1$.

On engage alors au moins $k+1$ espions (mieux en engager un peu plus au cas où certains seraient capturés par les «ennemis»). On donne au i-ème espion le nombre $P(i)$. Les espions se dispersent (par exemple, pour passer les lignes ennemies). Une fois qu'au moins $k+1$ espions sont arrivés à destination, il est aisé de reconstituer le polynôme (on a *un système d'au moins* $k+1$ *équations linéaires* pour retrouver les $k+1$ coefficients de P) et ainsi retrouver la valeur secrète n.
Si un espion est capturé et qu'il parle, les ennemis auront à leur disposition un des $P(i)$, cela ne leur permet nullement de retrouver n.
De même, si un espion étaient en fait un agent double, connaître $P(i)$ seul ne sert à rien.

Source : `http://michelrigo.wordpress.com/2010/01/30/partage-de-secrets-et-tfa/`

Testez-vous

Calculer n si $k = 2$ et on envoie des espions avec les messages suivants :

- espion 1, message 45
- espion 2, message 50
- espion 3, message 57
- espion 4, message 66

Système sur-déterminé

Partage de secrets

Correction

$k=2$ donc on cherche un polynôme de la forme $p(x)=a+bx+cx^2$ qui satisfait les conditions $p(1)=45$, $p(2)=50$, $p(3)=57$ et $p(4)=66$. Cela donne le système linéaire

$$\begin{cases} a+b+c=45\\ a+2b+2^2c=50\\ a+3b+3^2c=57\\ a+4b+4^2c=66\end{cases}$$

On a 4 équations et 3 inconnues : le système est sur-déterminé.
Négligeons pour le moment la dernière équation et résolvons avec Gauss

$$\begin{cases} a\ +b\ +c=45\\ a+2b+4c=50\\ a+3b+9c=57\end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}} \begin{cases} a+b\ +c=45\\ b\ +3c=5\\ 2b+8c=12\end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=2]{L_3\leftarrow L_3-2L_2} \begin{cases} a+b+c=45\\ b+3c=5\\ 2c=2\end{cases} \implies \begin{array}{c} c=1\\ b=5-3c=2\\ a=45-b-c=42\end{array}$$

Vérifions si la dernière équation est bien satisfaite :

$$42+4\times 2+4^2\times 1=66.$$

Le message secret est donc $n=a=42$.

4. Systèmes linéaires

Système sous-déterminé

Un système est sous-déterminé si, après échelonnage, le nombre d'équations significatives est inférieur au nombre d'inconnues.

Exemple

Échelonnons le système linéaire suivant de $n = 2$ équations et $m = 3$ inconnues

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 4 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y - 2z = 2 \end{cases}$$

Ce système admet une infinité de solutions : $z = \kappa \in \mathbb{R}$, $y = -1 - \kappa$ et $x = 3$.

Exemple

Échelonnons le système linéaire suivant de $n = 3$ équations et $m = 3$ inconnues

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 4 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases} \xrightarrow[]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y - 2z = 2 \\ -2y - 2z = 2 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y - 2z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On obtient le même système que précédemment.

Système sous-déterminé

Équilibrage de réactions chimiques

In "real life"

Du point de vue mathématique, équilibrer une réaction chimique signifie trouver des coefficients (dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Q}$), appelés coefficients stœchiométriques, qui satisfont certaines contraintes.
Toutes ces contraintes dépendent linéairement des coefficients stœchiométriques, ce qui amène tout naturellement à l'écriture d'un système linéaire.
Typiquement on aura n inconnues mais seulement $n-1$ équations linéairement indépendantes : en effet, les coefficients stœchiométriques ne définissent pas des quantités absolues mais seulement les rapports entre les différents éléments. Par conséquent, si les coefficients trouvés équilibrent la réaction, alors tous les multiples entiers de ces coefficients équilibrent aussi la réaction.

Exemple

Considérons la réaction

$$H_2 + O_2 \to H_2O.$$

Notons x_1, x_2 et x_3 les coefficients stœchiométriques

$$x_1H_2 + x_2O_2 \to x_3H_2O.$$

Les contraintes sont :

- la conservation du nombre d'atomes d'hydrogène : $2x_1 = 2x_3$,
- la conservation du nombre d'atomes d'oxygène : $2x_2 = x_3$.

On note qu'on a 3 inconnues mais seulement 2 équations linéairement indépendantes.
Pour résoudre le problème sans paramètres, fixons arbitrairement un des coefficients, par exemple $x_3 = 1$. On doit alors résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} 2x_1 = 2 \\ 2x_2 = 1 \end{cases}$$

On trouve alors $x_1 = 1$ et $x_2 = 1/2$. Si nous voulons des coefficients stœchiométriques entiers, il suffit de multiplier tous les coefficients par 2 et on a ainsi

$$2H_2 + 1O_2 \to 2H_2O.$$