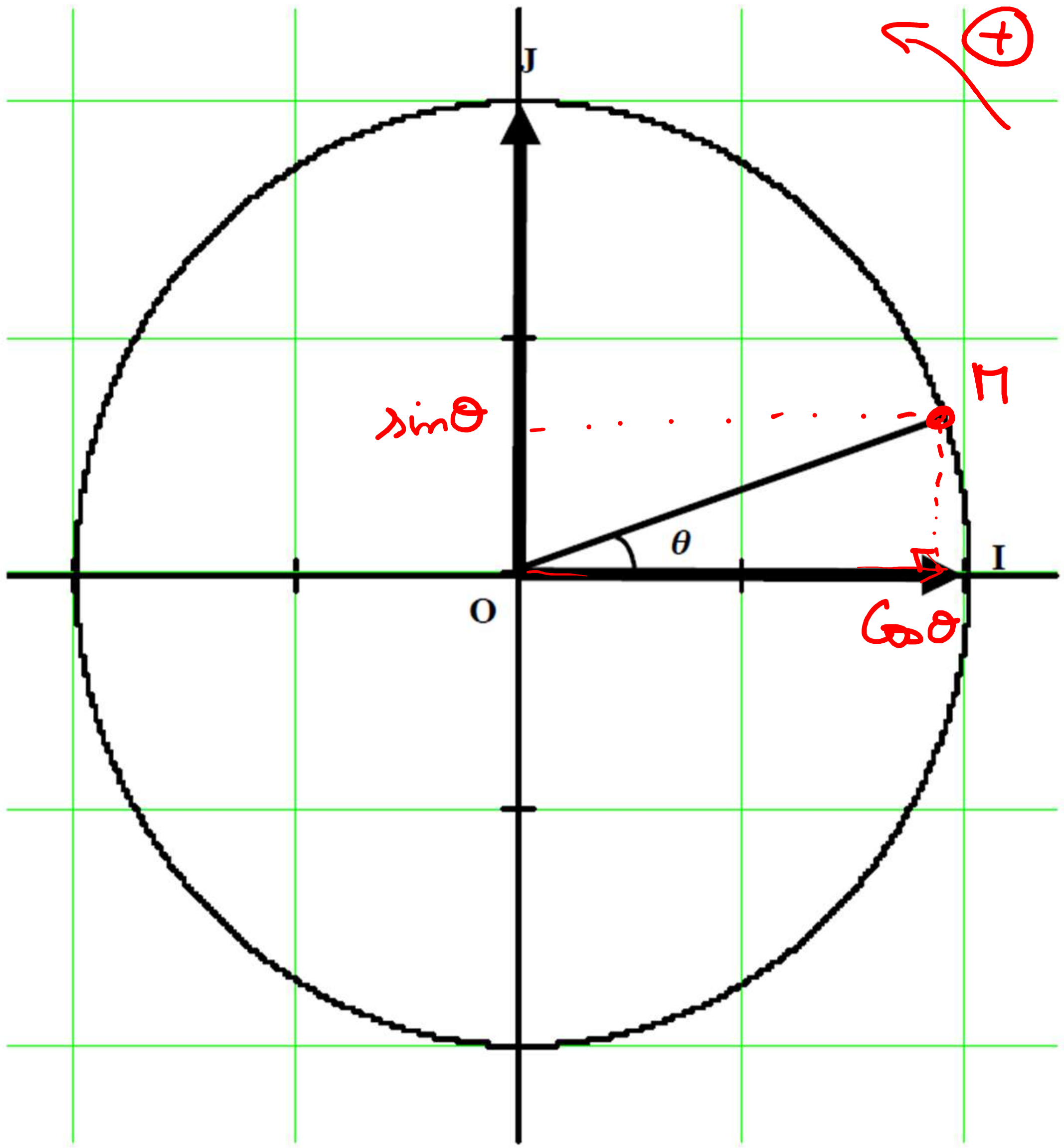
Amphi 1

Les formules trigonométriques : à apprendre par cœur et/ou à savoir retrouver Applications

Les objectifs :

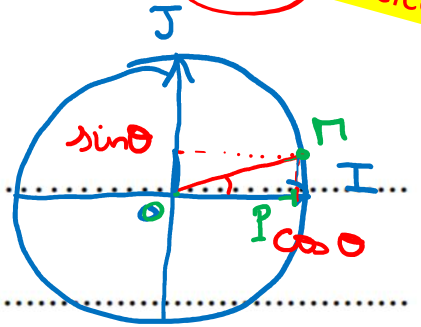
1) Étudier quelques formules indispensables pour le GEII
2) Application au calcul d'intégrales.



J
I
O
θ
M
+
sin θ
cos θ

Page 28 Exercice 4 Chapitre 1

Exercice 4 Compléter sans utiliser de formulaire de trigonométrie :



1) $\boxed{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1}$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2$

Justification : Pythagore dans OMP : $OM^2 = OP^2 + PM^2$

$1 = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2$

2) Définition de $\boxed{\tan(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \forall\ \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}}$

Alors : $1 + \tan^2(\theta) = 1 + \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \frac{1}{1} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta}$ $\theta \neq$ ....

et : $1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2\theta}$ Voir page 31 & 32 $\forall\ \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}.$

Page 31&32 Chapitre 1

* A propos de $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\forall\, \theta \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \;;\; k\in\mathbb{Z}$

$$(\tan\theta)' = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)' \qquad \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

ici $\begin{cases} U = \overset{\text{sympa}}{\sin\theta} \\ V = \underset{\text{Contrariant}}{\cos\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = \cos\theta \\ V' = -\sin\theta \end{cases}$

$$(\tan\theta)' = \frac{\cos\theta.\cos\theta - \sin\theta(-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$(\tan\theta)' = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2\theta} \\ \\ 1+\tan^2\theta \end{cases} \qquad \forall\, \theta \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \;;\; k\in\mathbb{Z}.$$

Page 28 & 29 Chapitre 1

3) Rappeler les formules trigonométriques suivantes :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Contrariant

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Sympa

En déduire les formules suivantes :

$\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos a \underbrace{\cos(-b)}_{= \cos b \text{ car } \cos \text{ est paire}} - \sin a \overbrace{\sin(-b)}^{= -\sin b \text{ car } \sin \text{ est impaire.}}$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$

$\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin a \cos(-b) + \sin(-b) \cos a$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin a \cos a + \sin a \cos a = 2 \sin a \cos a$

$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos a \cdot \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$

Page 29 Chapitre 1

Exprimer cos(2a) en fonction de $\cos^2(a)$:

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$ $\qquad$ $\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \iff \sin^2 a = 1 - \cos^2 a$

$\cos(2a) = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)$ $\qquad$ En fonction de $\sin^2 a$: $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$

$\cos(2a) = \cos^2 a - 1 + \cos^2 a$ $\qquad$ $\cos(2a) = 2(1 - \sin^2 a) - 1$

$\boxed{\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1}$ $\qquad$ $= 2 - 2\sin^2 a - 1$

$\boxed{\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a}$

En déduire les formules de linéarisation de $\cos^2(a)$ et de $\sin^2(a)$ (traduction : transformer le produit $\cos^2(a)$ en somme, et faire de même avec $\sin^2(a)$)

$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 \iff \boxed{\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2a)$

$-2\sin^2 a = \cos(2a) - 1 \iff \sin^2 a = \dfrac{(\cos(2a) - 1)\times(-1)}{-2\times(-1)}$

$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a \iff \boxed{\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}}$

Amphi 2

Calcul de valeurs moyennes et efficaces
Arctangente

<u>Les objectifs :</u>

1) Formulaire trigonométrique
2) Calcul d’intégrales de fonctions trigonométriques
3) Calcul de valeurs moyenne et efficace
4) Exercice 6 page 30

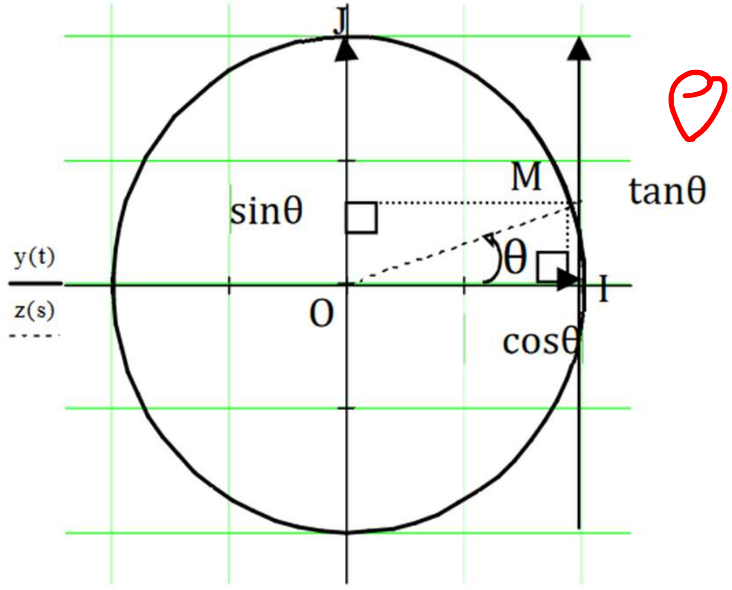
♡ par coeur Δ à savoir retrouver.

Formulaire à connaître par cœur

$$\boxed{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1}$$ ♡

$$\boxed{\tan(\theta)=\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \quad \forall\,\theta \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z}}$$ ♡

$$1+\tan^2(\theta)=\frac{1}{\cos^2(\theta)} \quad \forall\,\theta \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z}$$ Δ



♡

$\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

$\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b$	$\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b$ ♡
$\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b$	$\sin(a-b)=\sin a.\cos b-\cos a.\sin b$
$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a$	$\sin(2a)=2.\cos a.\sin a$ Δ

Page 25 Chapitre 1

. . . .

Formules de linéarisation : (Transformation d'un produit en somme)

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2(a) = \frac{1-\mathrm{co}\ \ (2a)}{2}$$

$$\sin(a).\cos(b) = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$$

$$\sin(a).\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$

$$\cos(a).\cos(b) = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b} \qquad \tan(a\text{-}b) = \frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b} \qquad \tan(2a) = \frac{2.\tan a}{1-\tan^2 a}$$

. . . .

. . . .

Page 25 Chapitre 1

Dérivées :

$U = ax + b \Rightarrow U' = a$

①

$(\cos(x))' = -\sin(x)$ | $(\cos(ax+b))' = -a.\sin(ax+b)$ | $\rightarrow (\cos(U))' = -U'.\sin(u)$

$(\sin(x))' = \cos(x)$ | $(\sin(ax+b))' = a.\cos(ax+b)$ | $(\sin(U))' = U'.\cos(u)$

$$(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \forall\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,;k \in \mathbb{Z}$$

$$(\tan(ax+b))' = a.\left(1 + \tan^2(ax+b)\right) = \frac{a}{\cos^2(ax+b)} \quad \forall\, ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,;k \in \mathbb{Z}$$

Primitives de sin(ax+b) : $-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$ + Cte (a≠ 0) ② Primitives de U'.sin(U) : -cos(U) + Cte

Primitives de cos (ax+b) : $\frac{1}{a}\sin(ax+b)$ + Cte (a≠ 0) Primitives de U'.cos (U) : sin(U) + Cte

Primitives de $\frac{1}{\cos^2(ax+b)} = 1 + \tan^2(ax+b)$: $\frac{1}{a}\tan(ax+b)$ + Cte (a≠ 0)

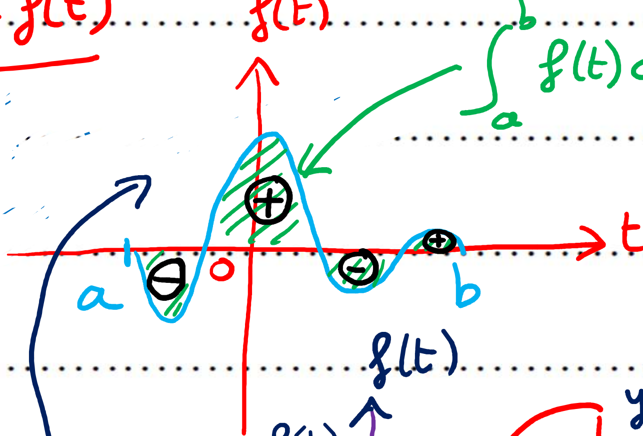
Primitives de $\frac{U'}{\cos^2(U)} = U'.\left(1 + \tan^2(U)\right)$: tan(u) + Cte

Page 32&33&34 Chapitre 1

Rappel : Soit f, une fonction continue sur $[a,b]$ on a alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

primitive de f : $F'(t) = f(t)$

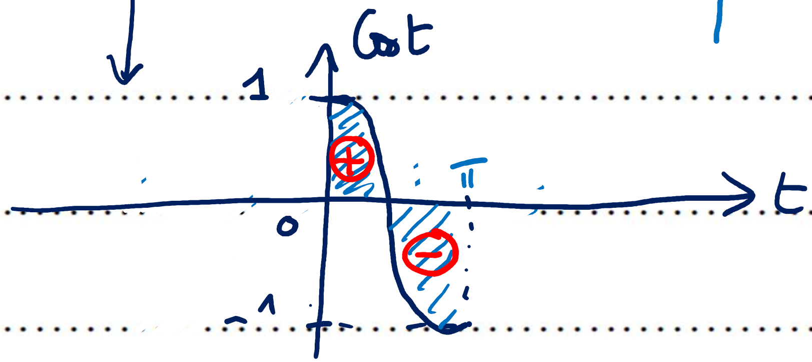


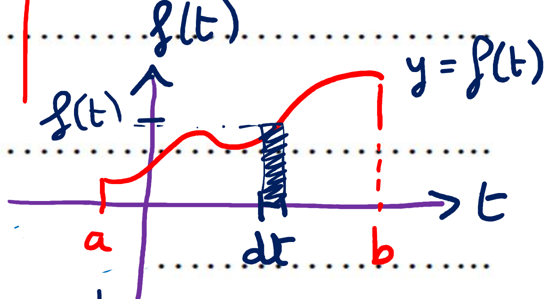
$\int_a^b f(t)\,dt$

Exple : $I = \int_0^{\pi} \cos(t)\,dt$

$I = \left[\sin t\right]_0^{\pi}$

$I = \sin(\pi) - \sin 0 = 0$





$\int_a^b f(t)\,dt$

Page 32&33&34 Chapitre 1

Rappel : Soit f, une fonction continue sur $[a,b]$ on a alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

F : primitive de f : $F'(t) = f(t)$

Exple : $I = \int_0^{\pi} \cos(t)\,dt$

$I = [\sin t]_0^{\pi}$

$I = \sin(\pi) - \sin 0 = 0$

$J = \int_{-\pi}^{0} \cos(3t)\,dt$

$K = \int_0^{\pi/2} 3\sin t\,dt$

$L = \int_0^{2\pi} \sin(4t)\,dt$

Page 32&33&34 Chapitre 1

$$J = \int_{-\pi}^{0} \cos(\underbrace{3}_{\omega} t)\,dt = \left[\frac{1}{3}\cdot\sin(3t)\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{3}\cdot\left[\sin(3t)\right]_{-\pi}^{0}$$

$$T = \frac{1}{\omega/2\pi}$$

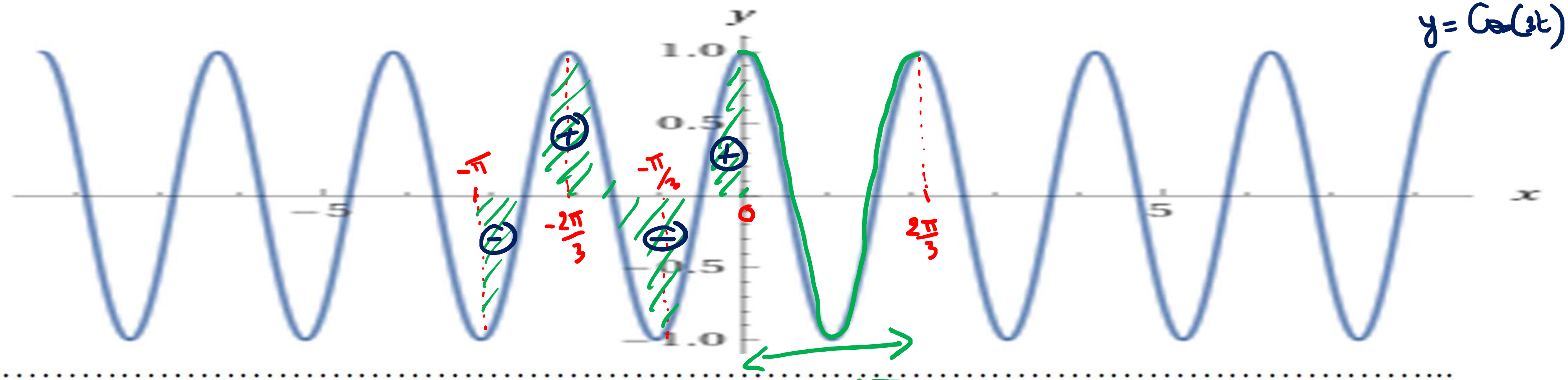
$$J = \frac{1}{3}\left(\underbrace{\sin(0)}_{0} - \underbrace{\sin(-3\pi)}_{0}\right) = 0$$

$$T = \frac{1}{f} \text{ et } \omega = 2\pi f$$

$$T = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\boxed{\cos(\omega t + \varphi) \xrightarrow[\text{Période}]{} T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

$y = \cos(3t)$



Page 32&33&34 Chapitre 1

$$K = \int_0^{\pi/2} 3 \sin t \, dt$$

$$\int_a^b \alpha \cdot f(t) \, dt = \alpha \cdot \int_a^b f(t) \, dt$$

α : cte

$$K = 3 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = 3 \cdot \left[-\cos t \right]_0^{\pi/2} = 3 \cdot \left(\underbrace{-\overbrace{\cos \frac{\pi}{2}}^{0} - -}_{+} \overbrace{\cos 0}^{1} \right) = 3.$$

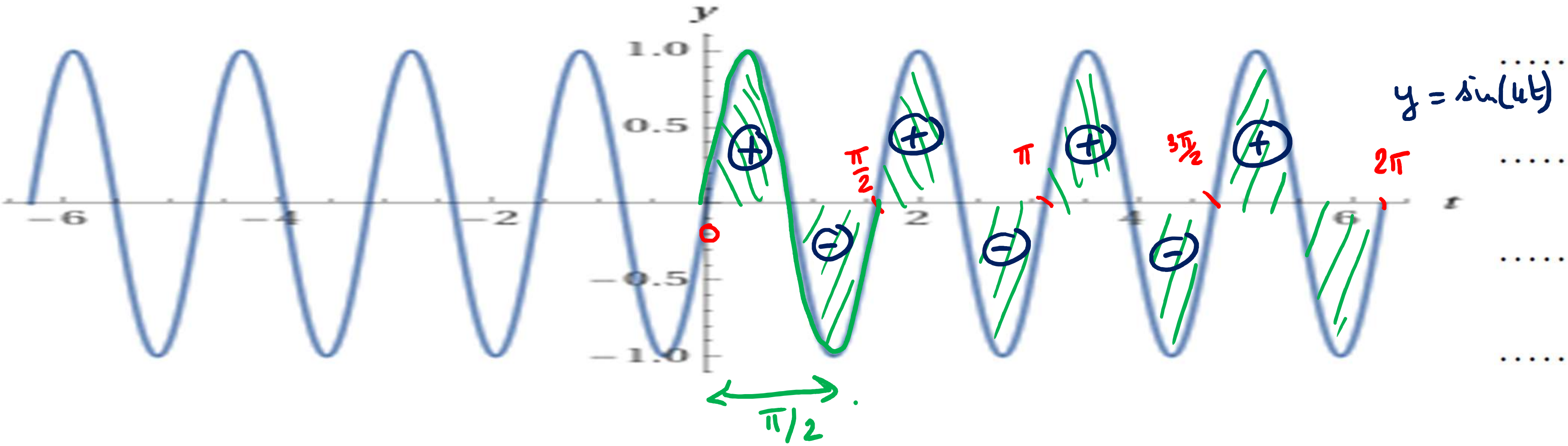
$$\int_0^{2\pi} \sin(kt) \, dt$$

Page 32&33&34 Chapitre 1

$$L = \int_0^{2\pi} \sin(4t)\,dt = \left[-\frac{1}{4}\cos(4t)\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{4}\underbrace{\cos(8\pi)}_{1} + \frac{1}{4}\underbrace{\cos 0}_{1} = 0$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ ici $\omega = 4$

$$T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$



$$M = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(7.\cos(3t) + 2t\right) dt = 7.\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos(3t)\, dt + 2\int_{\pi/3}^{\pi/2} t\, dt$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b \left(\alpha f(t) + \beta g(t)\right) dt = \underbrace{\alpha \int_a^b f(t)\, dt + \beta \int_a^b g(t)\, dt}$$

$$M = 7\left[\frac{1}{3}.\sin(3t)\right]_{\pi/3}^{\pi/2} + \cancel{2}.\left[\frac{t^2}{\cancel{2}}\right]_{\pi/3}^{\pi/2}$$

$$\underbrace{\left(\frac{t^2}{2}\right)'} = \frac{1}{2}\left(t^2\right)' = \frac{1}{2}(2t) = \underline{t}$$

$$M = \frac{7}{3}\left(\underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{-1} - \underbrace{\sin(\pi)}_{0}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = -\frac{7}{3} + \frac{9\times\pi^2}{9\times 4} - \frac{4\times\pi^2}{4\times 9} = -\frac{7}{3} + \frac{5\pi^2}{36}.$$

* Calculs de valeurs moyenne et efficace page 27 :

$u(t) = \cos t$

Page 27 Chapitre 1

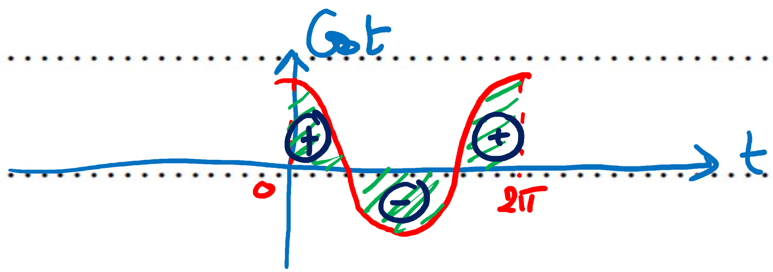
<u>Valeur moyenne, valeur efficace d'un signal périodique</u>

La **valeur moyenne** d'une fonction intégrable et T-périodique f, est la valeur donnée par : $\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt$ où a est un nombre réel quelconque. La **valeur efficace** de f est la racine carré de la valeur moyenne de f² : $\sqrt{\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f^2(t)dt}$

* Valeur moyenne et efficace de $u(t) = \cos t$

$$V_{moy} = \frac{1}{T} \cdot \int_a^{a+T} f(t)\, dt \qquad T = 2\pi$$

$$V_{moy} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos t \, dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\sin t\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\underbrace{\sin 2\pi}_{0} - \underbrace{\sin 0}_{0}\right) = 0$$



$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_a^{a+T} f^2(t)\,dt}$$

$u(t) = \cos t \qquad T = 2\pi.$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{4\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\left(1+\cos(2t)\right)dt$$

$$\cancel{\left(\frac{\cos^3 t}{3}\right)' = \frac{1}{3}\left(\cos^3 t\right)' = \frac{-1}{3}\cdot 3\cos^2 t\cdot\sin t.}$$

$$(U^3)' = 3U^2\cdot U'$$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{4\pi}\cdot\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{4\pi}\cdot\left(2\pi + \frac{1}{2}\underbrace{\sin(4\pi)}_{0} - \underbrace{\left(0 + \frac{1}{2}\sin 0\right)}_{0}\right) = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$