Étude de l'algorithme d'éliminiation de Gauss

TD-P#5 – Remise à niveau pour l'informatique

1 Introduction

"L'élimination de Gauss-Jordan, aussi appelée méthode du pivot de Gauss, nommée en hommage à Carl Friedrich Gauss[1] et Wilhelm Jordan [2] , est un algorithme pour déterminer les solutions d'un système d'équations linéaires, pour déterminer le rang d'une matrice ou pour calculer l'inverse d'une matrice (carrée) inversible. Lorsqu'on applique l'élimination de Gauss à une matrice, on obtient sa forme échelonnée réduite."[3]

2 Réduction de Gauss-Jordan dans $\mathbb{Q}$

L'algorithme de Gauss-Jordan produit la matrice échelonnée réduite d'une matrice à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes. Ici les coefficients de la matrice et les opérations élementiares se font dans le corps des rationnels $\mathbb{Q}$. Trois types d'opérations élémentaires sont utilisés :

- `Echanger_Ligne(M,i1,i2)` : échange les lignes i_1 et i_2 de la matrice M ;
- `Mult_Ligne_scal(M,i,s)` : multiplication de toute la ligne i par le scalaire non nul s (M[i]← s* M[i]) ;
- `Add(M,i1,i2,s)` : ajout de la multiplication par s de la ligne i_2 à la ligne i_1 (M[i1]← M[i1]+s*M[i2]) ;

```
ALGORITHME Gauss-Jordan(A)
DONNEES A une matrice de dimension n x m
VARIABLES i, j, p, k des entiers
DEBUT
     p ← 1 #indice de ligne du pivot
     j ← 1 #indice decrivant les colonnes
     TQ j ≤ m et p ≤ n FAIRE
        k← indice de ligne du max_{p≤i≤n} |A[i,j]|
        SI A[k,j] ≠ 0 ALORS
            # A[k,j] est un pivot
            Mult_Ligne_scal(A,k,1/A[k,j])
            # A[k] ← A[k] * (1/A[k,j])
            # pour avoir A[k,j]=1
            SI  k ≠ p ALORS
                Echanger_Ligne(A,k,p)
                # ligne du pivot placee a la ligne p
            FSI
            i ← 1 #indice decrivant les lignes
            TQ i ≤ n FAIRE
            #On met des 0 sur les autres lignes que p
                SI i ≠ p ALORS
                    Add(A,i,p,-A[i,j])
                    # A[i] ← A[i] + A[i,j]* A[p]
                    # A[i] ligne d'indice i de A
                FSI
                i←i+1
            FTQ
            p←p+1 #indice de ligne du prochain de pivot
        FSI
        j←j+1
    FTQ
```

[1]  (1777-1855) mathématicien, astronome et physicien allemand

[2]  (1845-1899) mathématicien et géographe allemand

[3] Extrait de Wikipedia

```
FIN
```

Questions 1.

1. Écrire une fonction `LineIndexMax(M,i1,i2,j)` qui retourne k l'indice de la ligne du maximum des valeurs de la colonne j entre les lignes i_1 et i_2, i.e. : $k = \max_{i_1 \leq i \leq i_2} |M[i,j]|$.

2. Écrire une fonction `LineMultScal(M,i,s)` qui modifie la matrice M sur place en remplaçant la ligne $M[i]$ d'indice i par sa multiplication par s non nul, i.e.: $M[i] \leftarrow s * M[i]$

3. Écrire une fonction `LineAddMultScal(M,i,l,s)` qui modifie la matrice M sur place en faisant le remplacement $M[i] \leftarrow M[i] + s * M[l]$ où $M[i]$ (resp. $M[l]$) désigne la ligne d'indice i (resp. d'indice l) de M.

4. Écrire une fonction `GaussJordanQ(M)` qui contruit la matrice échelonnée réduite de M sur place décrite par l'algorithme précédent.

5. Notons que le rang de la matrice M est le nombre de pivots trouvés. Compléter la fonction précedente pour quelle retourne le rang de la matrice, le nombre d'échanges de ligne et la liste des pivots trouvés au cours de l'algorithme.

6. Dans le cas où la matrice M est carrée, de dimension $n \times n$, vérifier que le déterminant $\det(M)$ de la matrice M est $(-1)^l \prod_{i=1}^{p} p_i$ où l est le nombre d'échanges de lignes et $\{p_1, p_2, \dots p_p\}$ l'ensemble des pivots collectés au cours de la réduction de Gauss-Jordan.
   Indication :
   - si on multiplie une ligne M_i de la matrice M par un scalaire λ alors $\det(M_\lambda) = \lambda \times \det(M)$;
   - si on permute deux lignes de la matrice M, le déterminant $\det(M_{\text{permute}}) = (-1) \times \det(M)$;
   - le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des valeurs sur la diagonale.

7. Écrire une fonction `DeterminantQ` qui retourne le déterminant d'une matrice carrée de dimension $n \times n$.

8. Écrire une fonction `InvertibleQ(M)` qui retourne vrai si la matrice carrée M est inversible dans $\mathbb{Q}$. Indication : une matrice carrée M est inversible si elle est de rang maximum ou si son déterminant est inversible (non nul dans $\mathbb{Q}$).

   Exemple la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ a pour matrice échelonnée réduite la matrice identité $\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$, son déterminant est -4, elle est de rang maximum et inversible.

3 Réduction de Gauss-Jordan dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Dans l'anneau des entiers $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on doit apporter des modifications, notamment

- tous les calculs se font modulo n.
- le pivot doit être un élément inversible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; un élément e de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\operatorname{pgcd}(e,n) = 1$ est inversible
- le calcul de l'inverse e^{-1} d'un élément e dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $e \times e^{-1} = e^{-1} \times e \equiv 1 \bmod n$

Questions 2.

1. Écrire une fonction `LineIndexInversible(M,i1,i2,j,m)` qui retourne k l'indice de la ligne de l'élement inversible dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ trouvé dans la colonne j entre les lignes i_1 et i_2. La fonction retourne i_2 si tous les éléments d'indice strictement plus petit que i_2 ne sont pas inversibles.

2. Écrire une fonction `LineMultScalMod(M,i,s,m)` qui modifie la matrice M sur place en remplaçant la ligne $M[i]$ d'indice i par sa multiplication par s non nul, i.e.: $M[i] \leftarrow s * M[i] \bmod m$

3. Écrire une fonction `LineAddMultScalMod(M,i,l,s,m)` qui modifie la matrice M sur place en faisant le remplacement $M[i] \leftarrow M[i] + s * M[l] \bmod m$ où $M[i]$ (resp. $M[l]$) désigne la ligne d'indice i (resp. d'indice l) de M.

4. Écrire une fonction `GaussJordanMod(M,m)` qui contruit la matrice échelonnée réduite de M

5. Écrire une fonction `DeterminantMod (M,m)` qui retourne le déterminant d'une matrice carrée de dimension $n \times n$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

6. Écrire une fonction `InvertibleMod(M,m)` qui retourne vrai si la matrice carrée M est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

   Exemples

   (a) la matrice de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour matrice échelonnée réduite la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, son déterminant est 3, elle est de rang maximum et inversible.

   (b) la matrice de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour matrice échelonnée réduite la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, elle est de rang 2 et n'est pas inversible.

4 Densité des matrices inversibles dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Dans toute cette partie, p désigne un nombre premier ≥ 2.

QUESTIONS 3.

1. Quels sont les inversibles dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour p premier ?

2. En déduire une nouvelle fonction `GaussJordanModPrime(M,p)` qui construit la forme échelonnée reduite dans le cas de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

3. Écrire les fonctions `DeterminantModPrime (M,p)` et `InvertibleModPrime(M,p)` .

4. Écrire une fonction qui génére une matrice carrée aléatroire de taille $n \times n$ à valeurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

5. Combien de matrices carrées de dimension $n \times n$ peut-on construire dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$? Combien sont inversibles ? En déduire la densité des matrices carrées inversibles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

6. Calculer la densité du nombre de matrices carrées $n \times n$ inversibles construites aléatoirement dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $2 \leq n \leq 10$ et comparer avec le résultat théorique établi précédemment.

5 Rapport

Présenter les codes, résultats, discussions et conclusions dans un rapport LaTeX, Python note book ou autre.