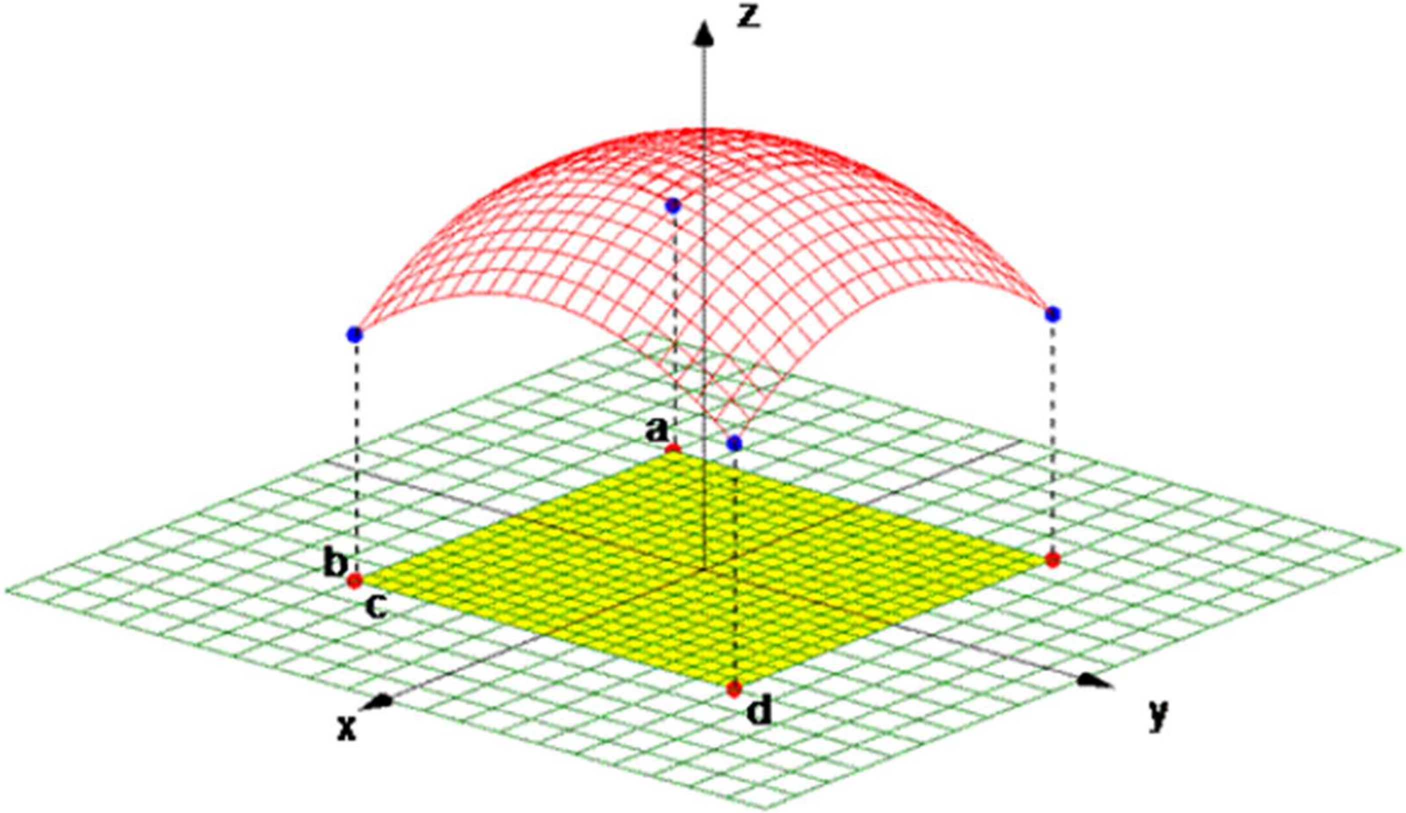
Chapitre 1 : Fonctions à plusieurs variables - Intégrales multiples



Page 3 Chapitre 1

Table des matières

Page 4 Chapitre 1

Programme d'Outils mathématiques et logiciels du semestre 5

-- R5-04 --

Chapitre I : Fonctions à plusieurs variables – Intégrales multiples (avec le logiciel maxima)

Chapitre II : Couple de Variables aléatoires discrètes et continues (avec le logiciel Excel)

Evaluation   CCE/TD/TP = (DS1+DS2+DS3+Bonus)/3

Notes

$*\ f(x) = e^{-\sqrt{x+1}}$ $\qquad \mathcal{D}_f = [-1;+\infty[$

$f(x)$ existe ssi $x+1 \geq 0 \iff x \geq -1$

On note : $f : [-1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$

$x \longmapsto y = f(x) = e^{-\sqrt{x+1}}$

$*\ g(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ $\qquad \mathcal{D}_g = \mathbb{R} - \{1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$*\ h(x) = \ln(x^2-1)$ $\qquad \mathcal{D}_h =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[.$

$h(x)$ existe ssi $x^2-1 > 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$*\ k(x) = \mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\qquad \mathcal{D}_k = \mathbb{R}$

"sinus cardinal" $\qquad k(0) = 1.$

$\cancel{\sqrt{<0}}$

$\cancel{\dfrac{\cdot}{0}}$

$\cancel{\ln(\leq 0)}$

Page 6 Chapitre 1

Partie A : Fonctions à plusieurs variables

I. Définitions

Une fonction numérique f, de n variables est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, qui associe à tout n-uplet de nombres réels $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ un unique réel $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$
D_f, l'ensemble de définition de f est l'ensemble des $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ éléments de $\mathbb{R}^n$, tels que $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ existe.

$\mathbb{R}^n = \{(x_1,\dots,x_n) ; x_i \in \mathbb{R} ; 1 \le i \le n\}$

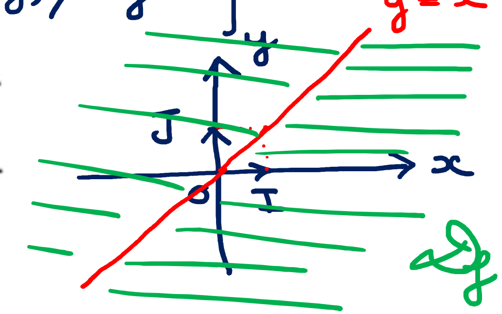
Exemples

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$

$f(x,y)$ existe ssi $x-y \neq 0 \iff y \neq x$. $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) / y=x\}$

$f : \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/y=x\} \longrightarrow \mathbb{R}$

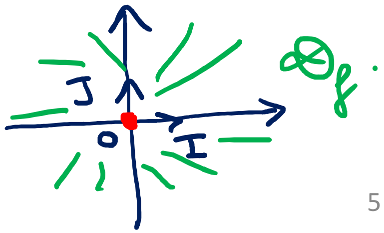
$(x,y) \longmapsto f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$



- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $h(x,y)=e^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

$h(x,y)$ existe ssi $x^2+y^2 \neq 0 \iff (x,y) \neq (0,0)$.

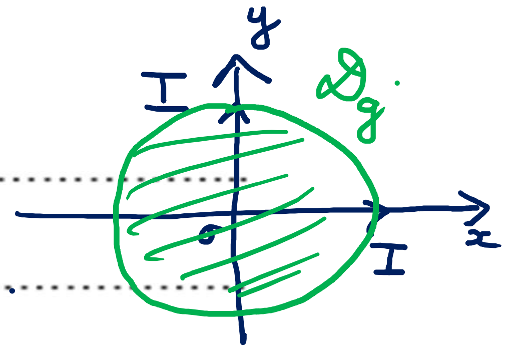
$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$



- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

$g(x,y)$ existe ssi $1-x^2-y^2 \geq 0 \iff x^2+y^2 \leq 1$.

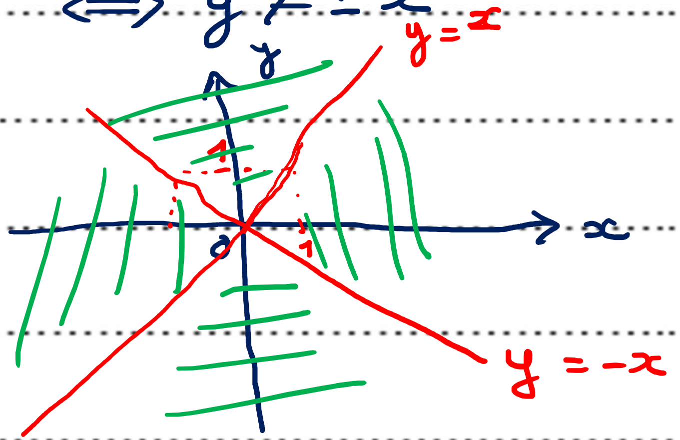
$\mathcal{D}_g = \overline{\mathcal{D}}(O;1) \longleftarrow$ disque de centre O et de rayon 1.



- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $k(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y^2}$

$k(x,y)$ existe ssi $x^2-y^2 \neq 0 \iff y^2 \neq x^2 \iff y \neq \pm x$

$\mathcal{D}_k = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \,/\, y=x \text{ ou } y=-x\}$



Notes page 6

Rappel : L'ensemble : $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \underbrace{/}_{\text{tel que}} (x-a)^2+(y-b)^2 = R^2\right\}$ est le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R, On le note $\mathcal{C}(\Omega;R)$

$\leqslant$ disque fermé $\overline{\mathcal{D}}(\Omega;R)$

$<$ disque ouvert $\mathring{\mathcal{D}}(\Omega;R)$ $\qquad \mathring{D}(\Omega;R)$

* $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ $\qquad \mathcal{D}_g =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

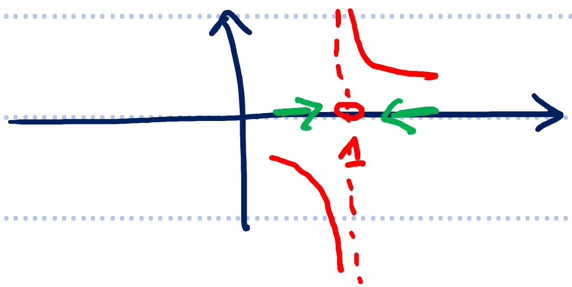
$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x) = \text{"}\dfrac{2}{0^-}\text{"} = -\infty$

$x-1<0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+1}{x-1} = \text{"}\dfrac{2}{0^+}\text{"} = +\infty$.

"$\dfrac{\infty}{\infty}$" FI

$\lim\limits_{x\to +\infty \,(-\infty)} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty \,(-\infty)} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty \,(-\infty)} x = +\infty \,(-\infty)$

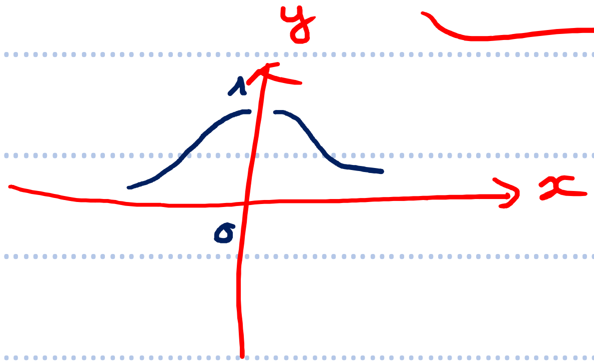


Notes

$$\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \mathcal{D}_{\mathrm{sinc}} = \mathbb{R}.$$

$$\mathrm{sinc}(0) = 1.$$

- Les fonctions $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc le quotient est continue sauf en 0.
- Continuité de sinc en 0 : $\underbrace{\lim_{x\to 0} \mathrm{sinc}(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 = \mathrm{sinc}(0)}_{\text{sinc est continue en } 0.}$



$\mathrm{sinc} \in \overset{\circ}{C}(\mathbb{R})$

ensble de fct°s continues.

II. Limites et continuité

Page 8 Chapitre 1

Exemples de limites   Déterminer la limite en (0,0) des fonctions f suivantes :

Soit $f(x,y) = x^2 - y^2 + 3$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 3$

$D_f = \mathbb{R}^2$

Soit $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{(0,0)} f(x,y) = $ "$\dfrac{0}{0}$" FI . n'existe pas car

$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) / y = -x\}$. $(0;0) \in D_f$.

$f(x,0) = \dfrac{x}{x} = 1$. donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 1$ et $f(0,y) = \dfrac{-y}{y} = -1$ donc $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = -1$; $1 \neq -1$

Définition Soit f, une fonction à 2 variables réelles (x,y). Soit $(x_0,y_0) \in D_f$. f est dite continue en (x_0,y_0) si et seulement si $\lim\limits_{(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

On pourra écrire cette définition quelque soit le nombre de variables.

Opérations

Soit $\lambda \in IR$. Si f et g sont continues sur D, sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, alors f+g, λf , f.g sont continues sur D, et $\dfrac{f}{g}$ est continue sur le sous-ensemble de D où g ne s'annule pas.

Exemples Etudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) / y = -x\}$

f est continue sur $\mathcal{D}_f$ car, c'est le quotient des fonctions continues : $(x,y) \longmapsto x-y$ et $(x,y) \longmapsto x+y$.

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^2$

$g(0,0)=0$. g est continue sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ car c'est le quotient de fonctions continues.

Continuité en $(0,0)$: $\lim\limits_{(0,0)} g(x,y) = \lim\limits_{(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ FI

$g(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x,x) = \frac{1}{2} \neq g(0,0)$ donc g n'est pas continue en $(0,0)$.

Page 11 Chapitre 1

III. Représentation graphique

Exemple $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ $D_f = \mathbb{R}^2$. Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ Notes $\quad D_f = \mathbb{R}^2$

$0 < e^{-(x^2+y^2)} \leq 1 \quad$ (car $0 < e^{-x} \leq 1 \ \forall x \geq 0$)

S_f est donc comprise entre les plans d'équation

$z = 0$ et $z = 1$
(xOy)

Courbe de niveau : $z = \frac{1}{2}$

On résout $f(x,y) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-(x^2+y^2)} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \ln e^{-(x^2+y^2)} = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow -(x^2+y^2) = -\ln 2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = \ln 2$ est l'équation de la cbe de niveau.

c'est le cercle $C(\Omega; \sqrt{\ln 2})$ où $\Omega(0;0;\frac{1}{2})$

Courbe de niveau : $z = k$ où $0 < k \leq 1$

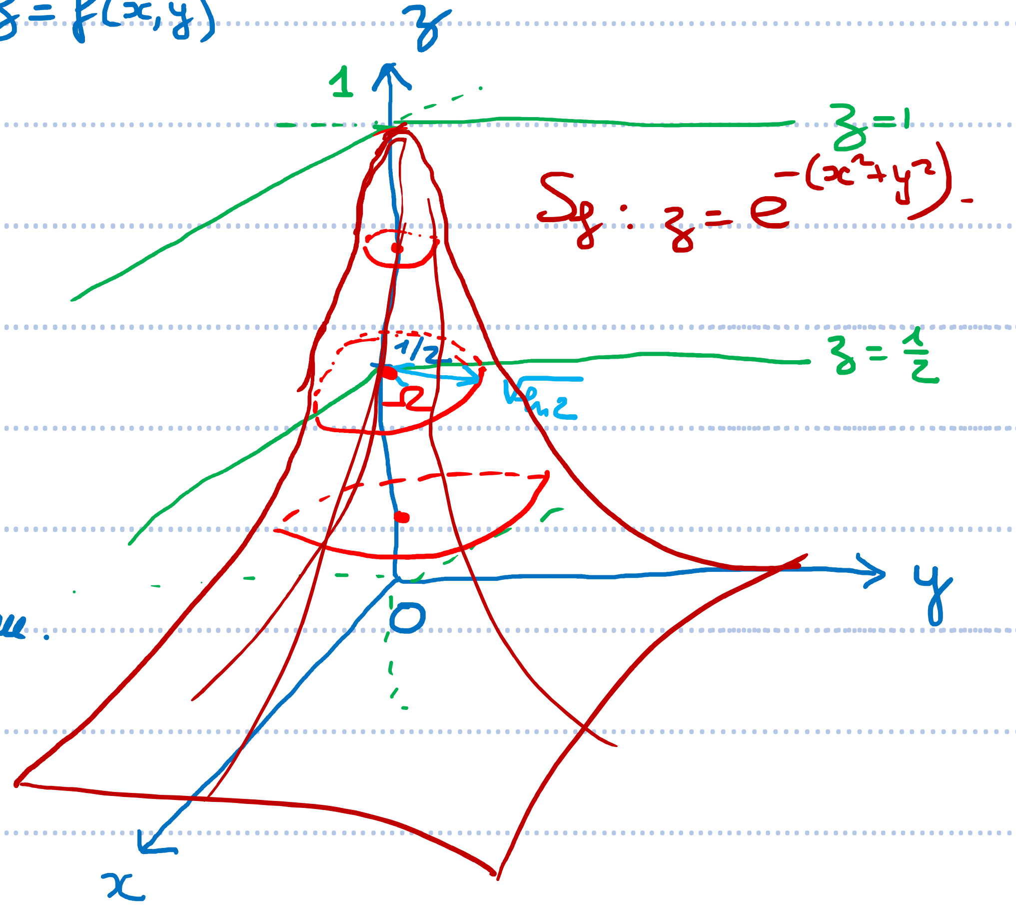
c'est le cercle $C(\Omega; \sqrt{\ln(1/k)})$ où $\Omega(0;0;k)$

$k \nearrow \Rightarrow R = \sqrt{\ln(1/k)} \searrow$

Tracé de la surface d'équation :

Page 11 Chapitre 1

$S_f : z = f(x,y)$



$\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} f(x,y) = 0$: (xOy) est un plan asymptote à S_f

Partie B : Calcul différentiel

I. Dérivées partielles du premier et du second ordre

1) Dérivées partielles du premier ordre

Définition **Soit f une fonction définie dans D_f, sous-ensemble de IR^2 .**

Si les fonctions $\begin{cases} f_1(x) = f(x,y_0) \text{ où } (x,y_0) \in D_f \\ f_2(y) = f(x_0,y) \text{ où } (x_0,y) \in D_f \end{cases}$ **sont dérivables respectivement en x_0 et y_0, la fonction f est alors dite partiellement dérivable par rapport à x et y en (x_0,y_0).**
On note alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0) = f_1'(x_0) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = f_2'(y_0)$$

Si les dérivées partielles existent pour tout (x_0,y_0), élément de D_f, elles définissent alors les fonctions dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exemples :

$f(x,y) = e^{x+2y}$. D_f= $\mathbb{R}^2$

$(e^u)' = u' e^u$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = u'_x e^u = e^{x+2y}$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = u'_y e^u = 2e^{x+2y}$

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. D_f= $\mathbb{R}^2$

$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{U'_x}{2\sqrt{U}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ .... $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{U'_y}{2\sqrt{U}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ....

Remarque : $f(y,x) = f(x,y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$ ....

$R(r,s) = \frac{rs}{(r+s)^2}$. $D_R =$ $IR^2 - \{(r,s) / s \neq -r\}$ .... $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$; $(f^2)' = 2f.f'$

$\frac{\partial R}{\partial r}(r,s) = \frac{U'_r V - U V'_r}{V^2} = \frac{s(r+s)^2 - rs.2(r+s).1}{(r+s)^4} = \frac{s(r+s).(r+s-2r)}{(r+s)^4} = \frac{s(s-r)}{(r+s)^3}$

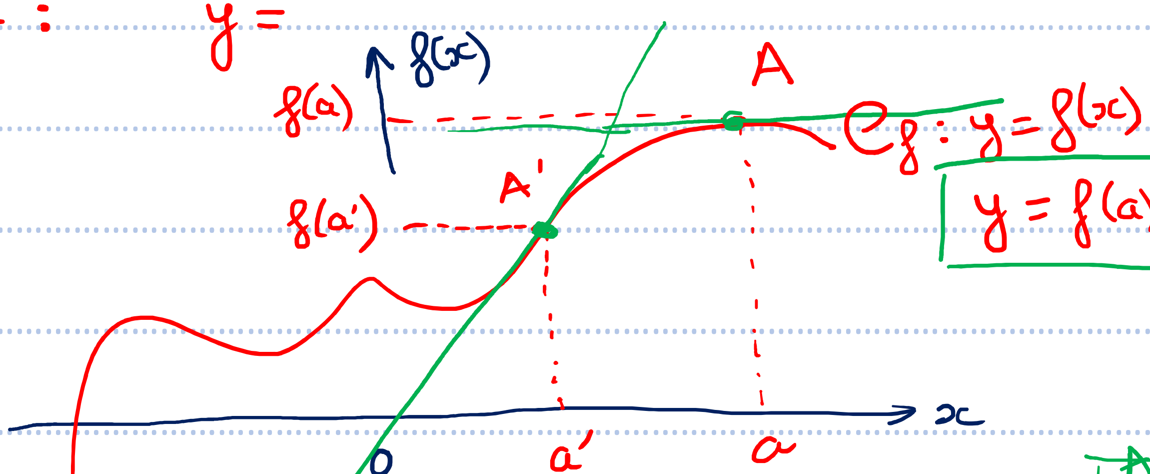
$\frac{\partial R}{\partial s}(r,s) = \frac{\partial R}{\partial r}(s,r) = \frac{r(r-s)}{(r+s)^3}$ .... car $R(s,r) = R(r,s)$ ....

<u>Remarque</u> On peut étendre cette définition aux fonctions à plus de deux variables :
Soit f une fonction définie dans D_f, sous-ensemble de IR^3 .

Page 13 Chapitre 1

Notes Rappel : Equation de la tangente à C_f en a :

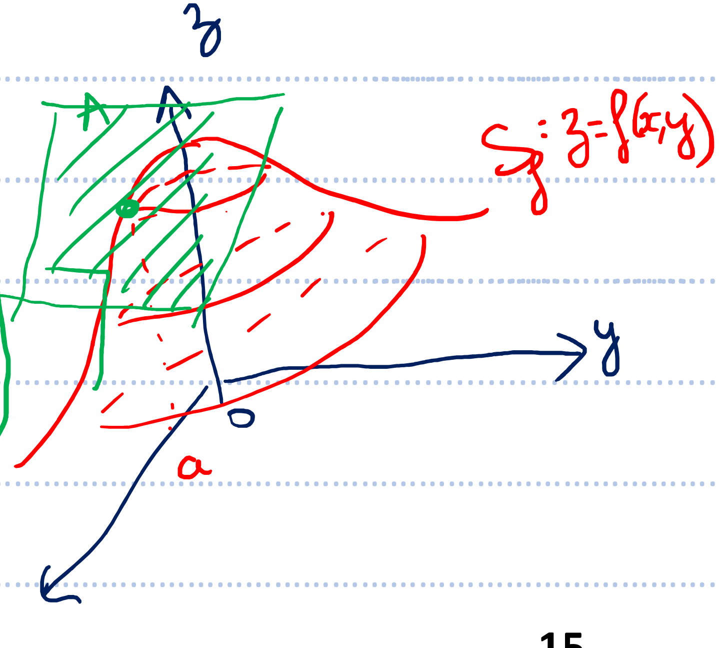
f est dérivable en a : $y =$



$$\boxed{y = f(a) + (x-a)\,f'(a)}$$

Equation du plan tangent à S_f en (a,b) :

$$\boxed{z = f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}$$



Page 14 Chapitre 1

2) Plan tangent à une surface d'équation z=f(x,y) en un point

Soit f une fonction partiellement dérivable en (x_0,y_0). L'équation du plan tangent à S_f, la surface représentant f, au point $M(x_0,y_0,z_0)$ est alors :

$$z = f(x_0,y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$f(-1;5) = 10-(-1)^2-25 = 10-1-25 = 10-26 = -16$

Exemple $f(x,y) = 10 - x^2 - y^2$ $D_f = \mathbb{R}^2$

$f'_y(-1,5) = -10$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$ $-2x$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$ $-2y$

$f'_x(-1,5) = 2$

Equation du plan tangent à S_f au point $M(\underbrace{0,0}_{x_0\,y_0},\underbrace{f(0,0)}_{z_0})$: $f(0,0) = 10$ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$z = f(0,0) + x f'_x(0,0) + y f'_y(0,0) \iff z = 10$ il s'agit du plan horizontal d'équat° $z=10$

Equation de P_f, le plan tangent à S_f au point $M(\underset{x_0}{-1},\underset{y_0}{5},\underset{z_0}{f(-1,5)})$: $f(-1;5) = -16$ $f'_x(-1;5) = 2$ $f'_y(-1,5) = -10$

$z = f(-1,5) + (x+1)f'_x(-1,5) + (y-5)f'_y(-1,5) \iff z = -16 + 2(x+1) - 10(y-5)$

$z = -16 + 2x + 2 - 10y + 50$

$z = 2x - 10y + 36$;

Notes

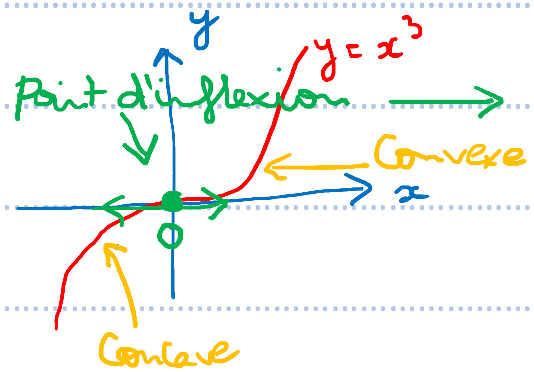
Rappel : Soit f une fonction dérivable sur $\mathcal{D}_f$. $a \in \mathcal{D}_f$

f admet un extremum en a lorsque $f'(a) = 0$ et f' change de signe de part et d'autre de a.

x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	m minimum.	$\nearrow$

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	M maximum.	$\searrow$

Remarque



$\longrightarrow$ $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 0$

f'' change de signe de part et d'autre de 0.

3) Dérivées partielles du second ordre

Définition **Soit f une fonction définie dans D_f, sous-ensemble de IR^2 . f est partiellement dérivable sur D, sous-ensemble de D_f. Si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$ sont elles-mêmes partiellement dérivables, on peut alors définir les dérivées partielles du second ordre :**

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2} \ ; \ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} \ ;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} \ ; \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2} \, .$$

Page 14 Chapitre 1

Remarque On peut étendre cette définition aux fonctions à plus de deux variables :

Soit f une fonction définie dans D_f, sous-ensemble de IR^3 . f est partiellement dérivable sur D, sous-ensemble de D_f. Si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = f'_z$ sont elles-mêmes partiellement dérivables, on peut alors définir les dérivées partielles du second ordre :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2} \; ; \; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} \; ; \; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} \; ; \; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}$$

et ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Exemple $f(x, y) = e^{x+2y}$. $D_f = \mathbb{R}^2$

Déterminer les dérivées partielles du second ordre de f.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x+2y}\right) = e^{x+2y} = f''_{x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\Big($$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

Notes $f(x,y) = e^{x+2y}$ $\quad (e^u)' = u'e^u$ ici $u = x+2y$

Page 1~~3~~ Chapitre 1

ORDRE 1 : $f'_x(x,y)$ ou $f'_x = \underbrace{U'_x}\,.\,e^u = \underbrace{e^{x+2y}}$

$f'_y(x,y)$ ou $f'_y = U'_y\,.\,e^u = 2.e^{x+2y}$

ORDRE 2 $f''_{x^2} = \left(e^{x+2y}\right)'_x = e^{x+2y}$

$f''_{y^2} = \left(2e^{x+2y}\right)'_y = 2.\left(e^{x+2y}\right)'_y = 4e^{x+2y}$

$f''_{yx} = \left(e^{x+2y}\right)'_y = 2e^{x+2y}$ $=$ $f''_{xy} = \left(2e^{x+2y}\right)'_x = 2e^{x+2y}$

3) Théorème de Schwarz

Page 16 Chapitre 1

Si f : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ admet en un point (x_0,y_0) des dérivées partielles d'ordre 2, continues (on dit alors que f est de classe C^2), alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

La réciproque est fausse.

Exemple

$(\text{Arctan}\, U)' = \dfrac{U'}{1+U^2}$

$f(x,y) = \text{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right)$. $D_f = \text{IR}^* \times \text{IR} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}^* \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$

Arctan est de classe C^∞ (∞^t dérivable), de même que $(x,y) \longmapsto \dfrac{y}{x}$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Le th. de Schwartz s'applique

$f'_x = \dfrac{U'_x}{1+U^2}$ ici $U = \dfrac{y}{x} \Rightarrow U'_x = y \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)'_x = -y \cdot \dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{y}{x^2}$

$$f'_x = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \times \frac{x^2}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

Notes

$$f'_x = \frac{-y}{x^2+y^2} \Longrightarrow \begin{cases} f''_{x^2} = -y \times \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)'_x = -y \times \frac{-2x}{x^2+y^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2} \\ \qquad \left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{U'}{U^2} \\ f''_{yx} = \frac{(-y)'_y \cdot (x^2+y^2) - (-y)\cdot(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2-y^2+y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

$$f(x,y) = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{ici } U = \frac{y}{x} \Rightarrow U'_y = \frac{1}{x} \times (y)'_y = \frac{1}{x}$$

$$f'_y = \frac{U'_y}{1+U^2} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \times \frac{x^2}{x^2} = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \begin{cases} f''_{y^2} = x \times \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)'_y = x \cdot \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} \\ f''_{xy} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{(Schwartz)} \end{cases}$$