Master Informatique

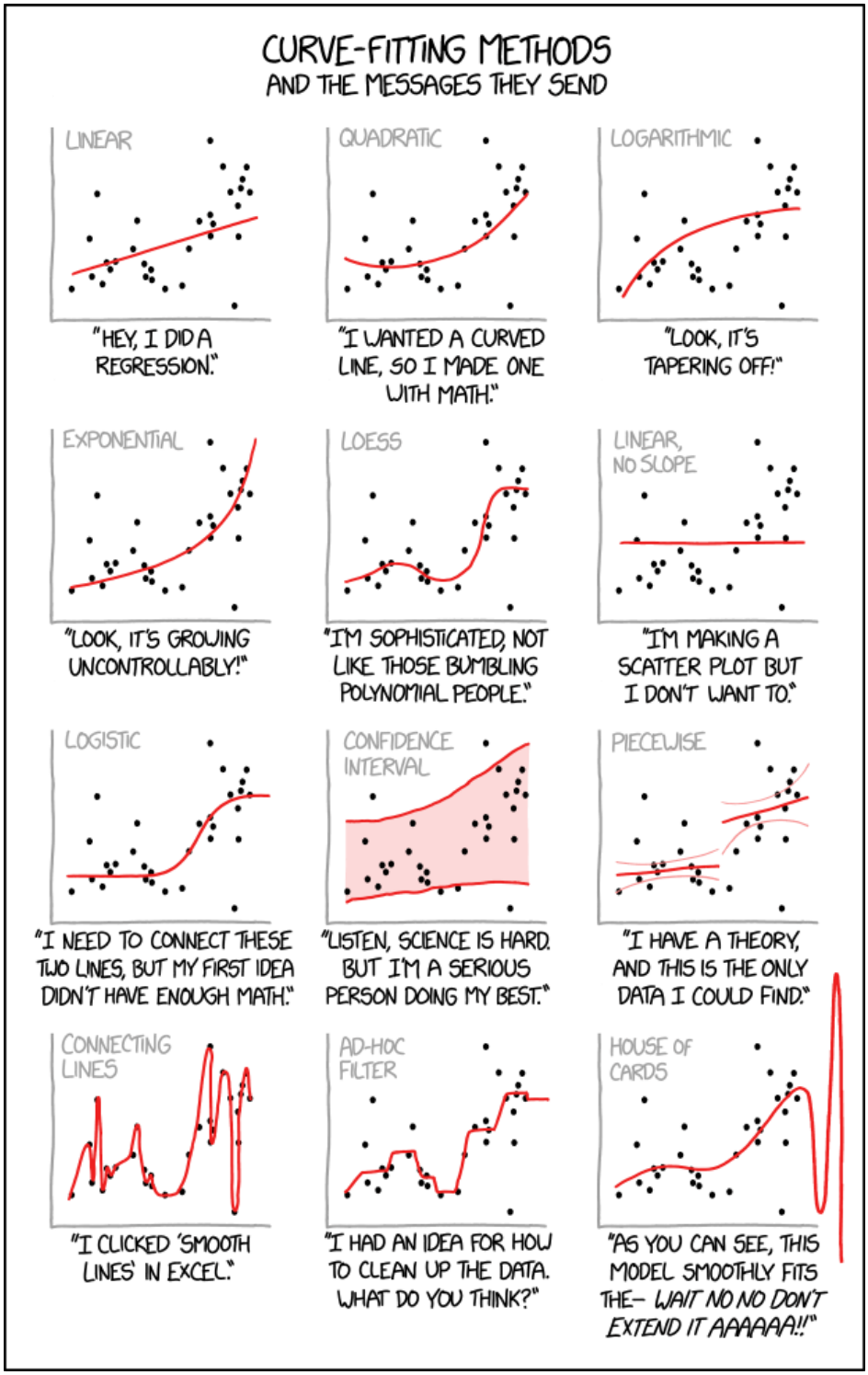
1 ère année

UE 731 – Remise à niveau Mathématiques

Annales des CC par équipes

Gloria Faccanoni
http://faccanoni.univ-tln.fr

Dernière mise-à-jour : Lundi 5 octobre 2026



Gloria FACCANONI

IMATH Bâtiment M-117
Université de Toulon
Avenue de l'université
83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 83 16 66 72

✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr
ℹ http://faccanoni.univ-tln.fr

Table des matières

A.A. 2024-2025 5

1 Contrôle par équipe ① 7

2 Contrôle par équipe ② 11

3 Contrôle par équipe ③ 17

4 Contrôle par équipe ④ 25

A.A. 2025-2026 31

5 Contrôle par équipe ① 33

6 Contrôle par équipe ② 37

7 Contrôle par équipe ③ 45

8 Contrôle par équipe ④ 53

A.A. 2026-2027 57

9 Contrôle par équipe ① 59

10 Contrôle par équipe ② 63

11 Contrôle par équipe ③ 67

12 Contrôle par équipe ④ 71

13 Contrôle par équipe ⑤ 77

© 2024-2026 G. Faccanoni

A.A. 2024-2025

1 Contrôle par équipe ① 7

2 Contrôle par équipe ② 11

3 Contrôle par équipe ③ 17

4 Contrôle par équipe ④ 25

CHAPITRE 1

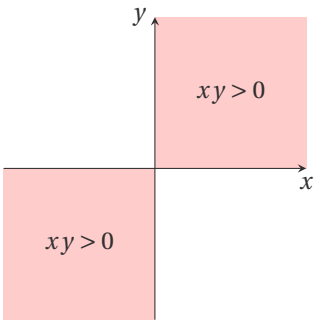
Contrôle par équipe ①

Exercice 1.1
Indiquer le domaine de définition des fonctions $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes et colorier la portion de $\mathbb{R}^2$ correspondante :

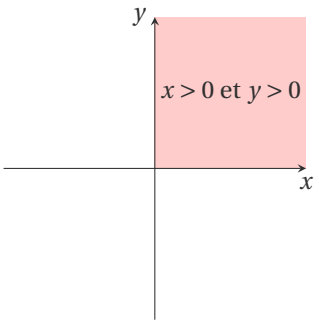
$$f(x,y) = \ln(xy) \quad \text{et} \quad g(x,y) = \ln(x) + \ln(y).$$

Correction

$\mathscr{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$



$\mathscr{D}_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$



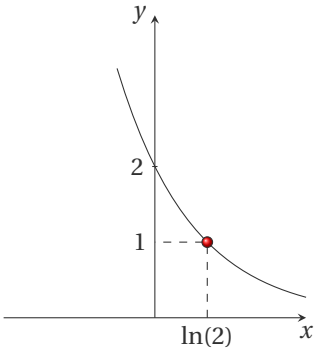
Exercice 1.2
Soit $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y+1}$. Calculer, lorsqu'il est possible, $f(2,1)$, $f(1,2)$, $f(a,a)$, $f(a+1,a)$, $f(a-1,-a)$ avec $a \notin \{-1, -\frac{1}{2}\}$.

Correction

$$f(2,1) = \frac{1}{4}, \qquad f(1,2) = -\frac{1}{4}, \qquad f(a,a) = 0, \qquad f(a+1,a) = \frac{1}{2(a+1)}, \qquad f(a-1,-a) \text{ n'existe pas}$$

Exercice 1.3
Soit $f(x,y) = ye^x$. Tracer la courbe de niveau qui passe par le point $(\ln(2), 1)$.

Correction
$f(\ln(2),1) = 2$. La ligne de niveau $k = 2$ est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = k\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2e^{-x}\}$



Exercice 1.4
On dit que deux fonctions $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfont la condition de Cauchy-Riemann si $\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v, \\ \partial_y u = -\partial_x v. \end{cases}$

Parmi les couples de fonctions suivantes, indiquer lesquels satisfont cette condition :

1. $u(x,y) = x^2 - y^2$ et $v(x,y) = 2xy$
2. $u(x,y) = x^2 + y^2$ et $v(x,y) = -2xy$
3. $u(x,y) = e^x \cos(y)$ et $v(x,y) = e^x \sin(y)$

Correction

$u(x,y) = x^2 - y^2$	$\partial_x u = 2x$	$\partial_y u = -2y$	$v(x,y) = 2xy$	$\partial_x v = 2y$	$\partial_y v = 2x$	oui
$u(x,y) = x^2 + y^2$	$\partial_x u = 2x$	$\partial_y u = 2y$	$v(x,y) = -2xy$	$\partial_x v = -2y$	$\partial_y v = -2x$	non
$u(x,y) = e^x \cos(y)$	$\partial_x u = e^x \cos(y)$	$\partial_y u = -e^x \sin(y)$	$v(x,y) = e^x \sin(y)$	$\partial_x v = e^x \sin(y)$	$\partial_y v = e^x \cos(y)$	oui

Exercice 1.5
Soit $f(x,y) = 4x^3y^2$. Calculer le gradient et la matrice Hessienne de f.

Correction
Le gradient de $f(x,y)$ est

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2y^2 \\ 8x^3y \end{pmatrix}.$$

La matrice hessienne de $f(x,y)$ est

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x(12x^2y^2) & \partial_x(8x^3y) \\ \partial_y(12x^2y^2) & \partial_y(8x^3y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24xy^2 & 24x^2y \\ 24x^2y & 8x^3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.6
Soit $\mathrm{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\mathrm{A}(x,y) = xy$. Soit $(x_0, y_0) = (5,6)$. Estimer $\mathrm{A}(5.1, 6.5)$ par linéarisation (c'est-à-dire en utilisant le plan tangent à A en (x_0, y_0)).

Correction
La linéarisation de la fonction $\mathrm{A}(x,y)$ autour du point (x_0, y_0) est donnée par l'approximation :

$$\mathrm{A}(x,y) \simeq \mathrm{A}(x_0,y_0) + (x - x_0)\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Calculons les dérivées partielles de $\mathrm{A}(x,y) = xy$:

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}(x,y) = y \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}(x,y) = x.$$

Nous avons donc l'approximation

$$\mathrm{A}(x_0 + 0.1, y_0 + 0.5) \simeq \mathrm{A}(x_0,y_0) + 0.1 \times y_0 + 0.5 \times x_0.$$

Sachant que $\mathrm{A}(x_0,y_0) = x_0 y_0 = 5 \times 6 = 30$, $\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}(x_0,y_0) = 6$ et $\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}(x_0,y_0) = 5$, cela devient

$$\mathrm{A}(5 + 0.1, 6 + 0.5) \simeq 30 + 0.1 \times 6 + 0.5 \times 5 = 30 + 0.6 + 2.5 = 33.1$$

Ainsi, par linéarisation, nous avons $\mathrm{A}(5.1, 6.5) \simeq 33.1$. Notons que $\mathrm{A}(5.1, 6.5) = 33.15$

Exercice 1.7
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction et $(0,0)$ un point critique de f. Compléter les affirmations suivantes :

1. si $\mathrm{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, alors $(0,0)$ est …
2. si $\mathrm{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, alors $(0,0)$ est …
3. si $\mathrm{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, alors $(0,0)$ est …
4. si $\mathrm{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, alors $(0,0)$ est …

© 2024-2026 G. Faccanoni

Correction
On a

1. $\det(\mathrm{H}_f(0,0)) = 2\times 2 - 2^2 = 0$ donc $(0,0)$ est point critique dont on ne peut pas établir la nature,
2. $\det(\mathrm{H}_f(0,0)) = -2\times 2 - 2^2 = -8 < 0$, donc $(0,0)$ est un point selle,
3. $\det(\mathrm{H}_f(0,0)) = 3\times 2 - 2^2 = 2 > 0$ et $\partial_{xx} f(0,0) = 3 > 0$, donc $(0,0)$ est un minimum,
4. $\det(\mathrm{H}_f(0,0)) = (-3)\times(-2) - 2^2 = 2 > 0$ et $\partial_{xx} f(0,0) = -3 < 0$, donc $(0,0)$ est un maximum.

Exercice 1.8
Calculer les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + xy + y^2$ et étudier leur nature.

Correction

- Recherche des points critiques :

$$\begin{cases} \partial_x f = 0, \\ \partial_y f = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + y = 0, \\ x + 2y = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 3(-2y)^2 + y = 0, \\ x = -2y, \end{cases} \iff \begin{cases} y(12y+1) = 0, \\ x = -2y, \end{cases} \iff (x,y) \in \left\{ (0,0); \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) \right\}.$$

  On a deux points critiques : le point $(0,0)$ et le point $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$.
- Nature des points critiques :

$$\begin{array}{lll} \partial_{xx} f(x,y) = 6x & \partial_{xx} f(0,0) = 0 & \partial_{xx} f\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) = 1 \\ \partial_{xy} f(x,y) = 1 & \partial_{xy} f(0,0) = 1 & \partial_{xy} f\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) = 1 \\ \partial_{yy} f(x,y) = 2 & \partial_{yy} f(0,0) = 2 & \partial_{yy} f\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) = 2 \\ \det(\mathrm{H}_f)(x,y) = 12x - 1 & \det(\mathrm{H}_f)(0,0) = -1 & \det(\mathrm{H}_f)\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) = 1 \end{array}$$

  $(0,0)$ est un point selle, $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$ est un minimum.

Exercice 1.9
Soit $w(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \cos\left(\sum_{i=1}^{n} i x_i\right)$. Calculer les dérivées partielles $\partial_{x_j} w$ pour $j = 1, \ldots, n$.

Correction

$$\begin{cases} w(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \cos(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n) \\ \partial_{x_1} w(x_1,x_2,\ldots,x_n) = -\sin(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n) \\ \partial_{x_2} w(x_1,x_2,\ldots,x_n) = -2\sin(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n) \\ \vdots \\ \partial_{x_j} w(x_1,x_2,\ldots,x_n) = -j\sin(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} w(x_1,x_2,\ldots,x_n) = -n\sin(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n) \end{cases} \implies \partial_{x_j} w(x_1,x_2,\ldots,x_n) = -j\sin\left(\sum_{i=1}^{n} i x_i\right)$$

© 2024-2026 G. Faccanoni

CHAPITRE 2

Contrôle par équipe ②

Exercice 2.1 (Bases de $\mathbb{R}_n[x]$)
Soit le polynôme $p(x) = x^2 - 3x + 2$. Écrire ses cordonnées dans les bases indiquées :

1. $\mathscr{C}_2$ base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$: coord$(p, \mathscr{C}_2)$ = ...
2. $\mathscr{C}_3$ base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$: coord$(p, \mathscr{C}_3)$ = ...
3. $\mathscr{A} = \{1, (x-1), x^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$: coord$(p, \mathscr{A})$ = ...
4. $\mathscr{B} = \{1, (x-1), (x-1)^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$: coord$(p, \mathscr{B})$ = ...
5. $\mathscr{D} = \{1, (x-1), (x-1)(x-2)\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$: coord$(p, \mathscr{D})$ = ...

Correction

1. $\mathscr{C}_2 = \{1, x, x^2\}$ donc coord$(p, \mathscr{C}_2) = (2, -3, 1)$
2. $\mathscr{C}_3 = \{1, x, x^2, x^3\}$ donc coord$(p, \mathscr{C}_3) = (2, -3, 1, 0)$
3. coord$(p, \mathscr{A}) = (-1, -3, 1)$.
4. coord$(p, \mathscr{B}) = (0, -1, 1)$
   On remarque qu'il s'agit des coefficients du développement de Taylor d'ordre 2 en $x_0 = 1$:
$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$
5. coord$(p, \mathscr{D}) = (0, 0, 1)$

Exercice 2.2 (Interpolation polynomiale : base canonique)

Soit les points

x	0	2	4
y	7	11	55

Écrire dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ le polynôme p qui interpole ces points (suggestion : utiliser la méthode de Gauss pour la résolution du système linéaire). Vérifier la solution obtenue.

Correction
Soit $\mathscr{C} = \{1, x, x^2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. Soient $(a, b, c) = \text{coord}(p, \mathscr{C})$ les coordonnées de p dans la base $\mathscr{C}$. Elles sont solution du système linéaire
$$\begin{cases} a + b \times 0 + c \times 0^2 = 7 \\ a + b \times 2 + c \times 2^2 = 11 \\ a + b \times 4 + c \times 4^2 = 55 \end{cases}$$
Résolvons-le par la méthode de Gauss
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 11 \\ 1 & 4 & 16 & 55 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 16 & 48 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 40 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} c = 5 \\ b = (4 - 4c)/2 = -8 \\ a = 7 \end{cases}$$
On obtient le polynôme $p(x) = 7 - 8x + 5x^2$.

On vérifie aisément que
$$\begin{cases} p(0) = 7, \\ p(2) = 7 - 8 \times 2 + 5 \times 2^2 = 11, \\ p(4) = 7 - 8 \times 4 + 5 \times 4^2 = 55. \end{cases}$$
Vérifions les calculs avec `sympy` :

```python
import sympy as sp
x = sp.symbols('x')

x_vals = [0, 2, 4]
y_vals = [7, 11, 55]
n = len(x_vals)-1  # Degré du polynôme
coeffs = sp.symbols(f'a0:{n+1}')
poly = sum(coeffs[i] * x**i for i in range(n+1))

eqs = [sp.Eq(poly.subs(x, x_vals[i]),y_vals[i]) for i in range(n+1)]
print("Le système à résoudre :")
print(r"\[\begin{cases}")
for eq in eqs :
    print(sp.latex(eq),r"\\")
print(r"\end{cases}\]")

solution = sp.solve(eqs, coeffs)
p1 = poly.subs(solution)
print("Le polynome d'interpolation : " + r"$p(x) =", sp.latex(poly), "=",
    sp.latex(p1), r"$")
```

Le système à résoudre :

$$\begin{cases} a_0 = 7 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 11 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 = 55 \end{cases}$$

Le polynome d'interpolation : $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 5x^2 - 8x + 7$

Exercice 2.3 (Interpolation polynomiale composite : spline linéaire)

Soit les points

x	0	2	4
y	7	11	55

Écrire la spline linéaire qui interpole ces même points.

Correction

Une spline linéaire est une fonction affine par morceaux (*i.e.*, les points à interpoler — une fois ordonnés selon les x croissants — sont reliés par des segments). Le point $x = 1$ est compris entre les deux points d'interpolation $(0,7)$ et $(2,11)$ donc $s|_{[0;2]}(x) = \frac{11-7}{2-0}(x-0)+7 = 2x+7$ et $s(1) = 9$ tandis que $p(1) = 7-8+5 = 4$.

Vérifions les calculs avec `sympy` :

```python
import sympy as sp

# Définition des symboles et des valeurs d'interpolation
x = sp.symbols('x')
x_vals = [0, 2, 4]
y_vals = [7, 11, 55]

# Construction des fonctions linéaires par morceaux
splines = []
for i in range(len(x_vals) - 1):
    a, b = sp.symbols(f'a{i} b{i}')
    spline = a * x + b
    splines.append(spline)
```


© 2024-2026 G. Faccanoni

```python
# Les equations
equations = []
for i in range(len(x_vals) - 1):
    equations.append(sp.Eq(splines[i].subs(x, x_vals[i]), y_vals[i]))
    equations.append(sp.Eq(splines[i].subs(x, x_vals[i+1]), y_vals[i+1]))

# Résolution du système
params = [sp.symbols(f'a{i} b{i}') for i in range(len(x_vals) - 1)]
flattened_params = sum(params, ()) # aplatissement de la liste
solution = sp.solve(equations, flattened_params)
splines_solved = [spline.subs(solution) for spline in splines]

print(r"La spline, linéaire par morceaux, a pour équation :")
print(r"\[\begin{cases}")
for i, spline in enumerate(splines_solved):
    print(f"  {sp.latex(spline)} & \\text{{si }} x \\in [{x_vals[i]},
    ↪ {x_vals[i+1]}] \\\\")
print(r"\end{cases}\]")
```

La spline, linéaire par morceaux, a pour équation :

$$\begin{cases} 2x+7 & \text{si } x \in [0,2] \\ 22x-33 & \text{si } x \in [2,4] \end{cases}$$

Exercice 2.4 (Interpolation polynomiale : base de Lagrange)

Soit les points

x	0	2	3
y	7	11	28

Écrire dans la base de Lagrange de $\mathbb{R}_2[x]$ le polynôme p qui interpole ces points.

Correction

Soit $\mathscr{L} = \{L_0, L_1, L_2\}$ la base de Lagrange de $\mathbb{R}_2[x]$ associée aux points donnés. Les coordonnées de p dans la base $\mathscr{L}$ sont tout simplement $\text{coord}(p, \mathscr{L}) = (7, 11, 28)$. Les polynômes L_i s'écrivent

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(0-2)(0-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{6}, \qquad L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(2-0)(2-3)} = -\frac{x(x-3)}{2}, \qquad L_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(3-0)(3-2)} = \frac{x(x-2)}{3}.$$

donc $p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$.

Vérifions les calculs avec `sympy` :

```python
import sympy as sp
x = sp.symbols('x')
n = 2
p1 = sp.polys.specialpolys.interpolating_poly(n+1, x, X='x', Y='y')
p2 = sp.polys.specialpolys.interpolating_poly(n+1, x, X=[0,2,3], Y=[7,11,28])
p3 = sp.simplify(p2)

print(r"\begin{align*} p(x) &= " , sp.latex(p1) , r"\\")
print(r" &= " , sp.latex(p2) , r"\\")
print(r" &= " , sp.latex(p3) , r"\end{align*}")
```

$$\begin{aligned}p(x) &= \frac{y_0\,(x-x_1)\,(x-x_2)}{(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)} + \frac{y_1\,(x-x_0)\,(x-x_2)}{(-x_0+x_1)\,(x_1-x_2)} + \frac{y_2\,(x-x_0)\,(x-x_1)}{(-x_0+x_2)\,(-x_1+x_2)}\\ &= -\frac{11x\,(x-3)}{2} + \frac{28x\,(x-2)}{3} + \frac{7\,(x-3)\,(x-2)}{6}\\ &= 5x^2-8x+7\end{aligned}$$

Exercice 2.5 (Interpolation polynomiale : base de Newton)

Soit les points

x	-2	1	4	-1	3	-4
y	-1	2	59	4	24	-53

- Écrire la base de Newton de $\mathbb{R}_5[x]$ associée à ces points.
- Écrire le tableau des différences divisées.
- En déduire les coordonnées du polynôme qui interpole ces points dans la base de Newton.

Correction

- La base de Newton de $\mathbb{R}_5[x]$ associée à ces points est $\mathcal{N} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ où ω_i s'écrit

$$\begin{aligned}\omega_0(x) &= 1\\ \omega_1(x) &= x+2\\ \omega_2(x) &= (x+2)(x-1)\\ \omega_3(x) &= (x+2)(x-1)(x-4)\\ \omega_4(x) &= (x+2)(x-1)(x-4)(x+1)\\ \omega_5(x) &= (x+2)(x-1)(x-4)(x+1)(x-3)\end{aligned}$$

- Le tableau des différences divisées est

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},\dots,x_i]$	$f[x_{i-4},\dots,x_i]$	$f[x_{i-5},\dots,x_i]$
0	-2	$\boxed{-1}$					
1	1	2	$\boxed{1}$				
2	4	59	19	$\boxed{3}$			
3	-1	4	11	4	$\boxed{1}$		
4	3	24	5	6	1	$\boxed{0}$	
5	-4	-53	11	-2	1	0	$\boxed{0}$

- $\text{coord}(p,\mathcal{N}) = \{-1,1,3,1,0,0\}$ donc

$$p(x) = -1 + (x+2) + 3(x+2)(x-1) + (x+2)(x-1)(x-4)$$

qu'on peut développer comme suit (ce n'est pas demandé)

$$\begin{aligned}&= -1 + (x+2)\Big(1 + 3(x-1) + (x-1)(x-4)\Big)\\ &= -1 + (x+2)\Big(1 + \big(3 + (x-4)\big)(x-1)\Big)\\ &= -1 + (x+2)\Big(1 + (x-1)^2\Big)\end{aligned}$$

Vérifions les calculs avec `sympy` :

```
import sympy as sp

def ddt(xx,yy):
    n=len(yy);t=[[0]*n for _ in range(n)]
    for i in range(n): t[i][0]=yy[i]
    for j in range(1,n):
        for i in range(j,n):
            t[i][j]=(t[i][j-1]-t[i-1][j-1])/sp.S(xx[i]-xx[i-j])
```


© 2024-2026 G. Faccanoni

```
    return t

def nb(x,xx,i):
    b=1
    for j in range(i):b*=sp.S(x-xx[j])
    return b

def ni(x,xx,yy):
    t=ddt(xx,yy);n=len(xx)
    p=t[0][0]
    for i in range(1,n):p+=t[i][i]*nb(x,xx,i)
    return p

def print_ddt_latex(xx,yy,t):
    n=len(t)
    s="\\[\\begin{array}{|c|c||"+"c|"*n+"}\n"
    s+="i & x_i & " + " & "*(n-2) + "\\\\\\n\\hline\n"
    for i in range(n):
        r=[f"{i}",f"{xx[i]}"]
        r+=[f"\\fbox{{{sp.latex(t[i][j])}}}"if j==i else
         ↪  f"{sp.latex(t[i][j])}"if j<=i else ""for j in range(n)]
        s+=" & ".join(r)+" \\\\\n"
    return s+"\\end{array}\\]"

x=sp.symbols('x')
x_data=[-2,1,4,-1,3,-4]
y_data=[-1,2,59,4,24,-53]
t=ddt(x_data,y_data)
p=ni(x,x_data,y_data)

print("Tableau des différences divisées:")
print(print_ddt_latex(x_data,y_data,t))
base_terms = " +
 ↪  ".join([f"{sp.latex(t[i][i])}\\times\\Big({sp.latex(nb(x,x_data,i))}\\Big)"
 ↪  for i in range(1, len(x_data))])
print(f"\n\nPolynôme d'interpolation dans la base de Newton:
 ↪  $p(x)={sp.latex(t[0][0])} +
 ↪ {base_terms}={sp.latex(p)}={sp.latex(p.factor())}$")
```

Tableau des différences divisées :

i	x_i						
0	-2	$\boxed{-1}$					
1	1	2	$\boxed{1}$				
2	4	59	19	$\boxed{3}$			
3	-1	4	11	4	$\boxed{1}$		
4	3	24	5	6	1	$\boxed{0}$	
5	-4	-53	11	-2	1	0	$\boxed{0}$

Polynôme d'interpolation dans la base de Newton : $p(x) = -1 + 1 \times \left(x+2\right) + 3 \times \left((x-1)(x+2)\right) + 1 \times \left((x-4)(x-1)(x+2)\right) + 0 \times \left((x-4)(x-1)(x+1)(x+2)\right) + 0 \times \left((x-4)(x-3)(x-1)(x+1)(x+2)\right) = x + (x-4)(x-1)(x+2) + 3(x-1)(x+2) + 1 = x^3 - 2x + 3$

Exercice 2.6 (Interpolation non polynomiale)

Soit les points

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
y	5	$1+\sqrt{3}$	-1

Soit $V[x]$ l'espace vectoriel engendré par $\{\cos(x), \cos(2x), \cos(3x)\}$.
Écrire la fonction v qui interpole ces points dans la base donnée.

Correction
On cherche $v(x) = a\cos(x) + b\cos(2x) + c\cos(3x)$ tel que $v(0) = 5$, $v\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1+\sqrt{3}$ et $v\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$. On cherche donc a, b et c tels que

$$\begin{cases} a+b+c = 5 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b = 1+\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - c = -1 \end{cases}$$

On obtient la fonction $v(x) = 2\cos(x) + 2\cos(2x) + \cos(3x)$.

Vérifions les calculs avec `sympy` :

```
import sympy as sp
x = sp.symbols('x')

x_vals = [0, sp.pi/6, sp.pi/3]
y_vals = [5, 1+sp.sqrt(3), -1]
coeffs = sp.symbols(f'a,b,c')
n = len(x_vals)-1
v = sum(coeffs[i] * sp.cos((i+1)*x) for i in range(n+1))

eqs = [sp.Eq(v.subs(x, x_vals[i]),y_vals[i]) for i in range(n+1)]
print("Le système à résoudre :")
print(r"\[\begin{cases}")
for eq in eqs :
    print(sp.latex(eq),r"\\")
print(r"\end{cases}\]")

solution = sp.solve(eqs, coeffs)
v1 = v.subs(solution)
print("La fonction d'interpolation est " + r"$v(x) =", sp.latex(v), "=",
    sp.latex(v1), r"$.")
```

Le système à résoudre :

$$\begin{cases} a+b+c = 5 \\ \frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{b}{2} = 1+\sqrt{3} \\ \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - c = -1 \end{cases}$$

La fonction d'interpolation est $v(x) = a\cos(x) + b\cos(2x) + c\cos(3x) = 2\cos(x) + 2\cos(2x) + \cos(3x)$.

© 2024-2026 G. Faccanoni

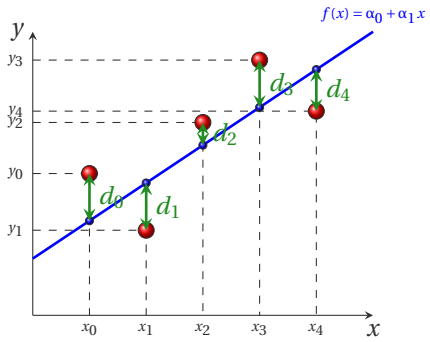
CHAPITRE 3

Contrôle par équipe ③

Exercice 3.1
Connaissant les points (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n), la fonction de meilleure approximation $y = f(x)$ par la méthode des moindres carrés est celle obtenue en minimisant …

1. $\sum_{i=1}^{n} \big(y_i - f(x_i)\big)$
2. $\sum_{i=1}^{n} \big|y_i - f(x_i)\big|$
3. $\sum_{i=1}^{n} \big(y_i - f(x_i)\big)^2$
4. $\sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - \big(f(x_i)\big)^2\Big)$

Correction
Notons $d_i \equiv y_i - f(x_i)$ l'écart vertical du point (x_i, y_i) par rapport à la fonction f (en figure, on a choisit f affine) :



La méthode des moindres carrés est celle qui minimise *la somme des carrés de ces déviations, i.e.* minimise la quantité $\sum_{i=1}^{n} \big(y_i - f(x_i)\big)^2$.

DONNÉES POUR LES EXERCICES DE 2 À 5

x_i	1	20	30	40
y_i	1	400	800	1300

Exercice 3.2
Calculer la droite d'équation $y = \alpha_0 + \alpha_1 x$ de meilleure approximation des données.

Correction
Il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3+1 & 1+20+30+40 \\ 1+20+30+40 & 1^2+20^2+30^2+40^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+400+800+1300 \\ 1\times 1 + 20\times 400 + 30\times 800 + 40\times 1300 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 91 \\ 91 & 2901 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2501 \\ 84001 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = -\frac{388690}{3323} \simeq -116.97$ et $\alpha_1 = \frac{108413}{3323} \simeq 32.625$.

```python
import sympy as sp

# Définition des données
data = [(1, 1), (20, 400), (30, 800), (40, 1300)]
x_data, y_data = zip(*data)

# Variables pour les coefficients de la droite
alpha_0, alpha_1 = sp.symbols('alpha_0 alpha_1')

# Fonction d'erreur (somme des carrés des écarts)
error = sum((y - (alpha_0 + alpha_1 * x))**2 for x, y in zip(x_data, y_data))

# Calcul des dérivées partielles et égalisation à zéro
grad_alpha_0 = sp.diff(error, alpha_0)
grad_alpha_1 = sp.diff(error, alpha_1)

# Résolution du système d'équations
solution = sp.solve((grad_alpha_0, grad_alpha_1), (alpha_0, alpha_1))

# Affichage des résultats en LaTeX
latex_output = f"Les coefficients de la droite d'ajustement sont : \n"
latex_output += f"$\\alpha_0 = {sp.latex(solution[alpha_0])}, \\quad \\alpha_1 =
 ↪ {sp.latex(solution[alpha_1])}$"
print(latex_output)
```

Les coefficients de la droite d'ajustement sont : $\alpha_0 = -\frac{388690}{3323}$, $\alpha_1 = \frac{108413}{3323}$

Exercice 3.3
Calculer la droite d'équation $y = \alpha_1 x$ de meilleur approximation des données.

Correction
On peut retrouver ce résultat en considérant le fitting dans une espace vectoriel quelconque, ici l'espace engendré par $\{\Phi_0 = x\}$. Sinon, on peut reparcourir la construction suivie dans le cas générale, comme ci-dessous : on doit minimiser la fonction $\mathscr{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\mathscr{E}(\alpha_1) = \sum_{i=0}^{n} d_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_1 x_i)^2.$$

Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche d'abord les points stationnaires, *i.e.* les points α_1 qui vérifient $\mathscr{E}'(\alpha_1) = 0$. Puisque

$$\mathscr{E}'(\alpha_1) = -2 \sum_{i=0}^{n} x_i (y_i - \alpha_1 x_i)$$

alors $\mathscr{E}'(\alpha_1) = 0$ ssi

$$\sum_{i=0}^{n} x_i (y_i - \alpha_1 x_i) = 0 \iff \sum_{i=0}^{n} x_i y_i - \alpha_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 0 \iff \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2 \right) \alpha_1 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i \iff \alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}$$

Donc $\alpha_1 = \frac{1\times1+20\times400+30\times800+40\times1300}{1^2+20^2+30^2+40^2} = \frac{84001}{2901} \simeq 28.956$.

```python
import sympy as sp

# Définition des données
data = [(1, 1), (20, 400), (30, 800), (40, 1300)]
x_data, y_data = zip(*data)

# Variable pour le coefficient de la droite
alpha_1 = sp.symbols('alpha_1')
```


© 2024-2026 G. Faccanoni

```python
# Fonction d'erreur (somme des carrés des écarts)
error = sum((y - alpha_1 * x)**2 for x, y in zip(x_data, y_data))

# Calcul de la dérivée partielle et égalisation à zéro
grad_alpha_1 = sp.diff(error, alpha_1)

# Résolution de l'équation
solution = sp.solve(grad_alpha_1, alpha_1)[0]  # Prendre la première solution

# Affichage des résultats en LaTeX
latex_output = f"Le coefficient de la droite d'ajustement est : \n"
latex_output += f"$\\alpha_1 = {sp.latex(solution)}$"
print(latex_output)
```

Le coefficient de la droite d'ajustement est: $\alpha_1 = \frac{84001}{2901}$

Exercice 3.4
Calculer la parabole d'équation $y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ de meilleur approximation des données.

Correction
Il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3+1 & 1+20+30+40 & 1^2+20^2+30^2+40^2 \\ 1+20+30+40 & 1^2+20^2+30^2+40^2 & 1^3+20^3+30^3+40^3 \\ 1^2+20^2+30^2+40^2 & 1^3+20^3+30^3+40^3 & 1^4+20^4+30^4+40^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+400+800+1300 \\ 1\times 1+20\times 400+30\times 800+40\times 1300 \\ 1\times 1+20^2\times 400+30^2\times 800+40^2\times 1300 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 91 & 2901 \\ 91 & 2901 & 99001 \\ 2901 & 99001 & 3530001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2501 \\ 84001 \\ 2960001 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 \simeq -9.129$, $\alpha_1 \simeq 8.629$ et $\alpha_2 \simeq 0.604$.

Nous allons voir deux façons de résoudre ce problème avec SymPy. Dans le premier cas, nous résolvons explicitement le système d'équations linéaires. Dans le second cas, nous calculons directement le point critique de l'erreur (le minimum de l'erreur quadratique) en utilisant les dérivées partielles.

```python
import sympy as sp

# Définir les symboles pour les inconnues
alpha_0, alpha_1, alpha_2 = sp.symbols('alpha_0 alpha_1 alpha_2')

# Matrice des coefficients
A = sp.Matrix([
    [4, 91, 2901],
    [91, 2901, 99001],
    [2901, 99001, 3530001]
])

# Vecteur du côté droit
b = sp.Matrix([2501, 84001, 2960001])

# Résolution du système A * alpha = b
solutions = list(sp.linsolve((A, b), [alpha_0, alpha_1, alpha_2]))[0]

# Affichage des résultats en LaTeX
```

```
latex_output = f"Les coefficients estimés sont : \n"
latex_output += f"$\\alpha_0={sp.latex(solutions[0])} \\approx
 ↪ {solutions[0].evalf():.3f}$, "
latex_output += f"$\\alpha_1={sp.latex(solutions[1])}  \\approx
 ↪ {solutions[1].evalf():.3f}$, "
latex_output += f"$\\alpha_2={sp.latex(solutions[2])}  \\approx
 ↪ {solutions[2].evalf():.3f}$"
print(latex_output)
```

Les coefficients estimés sont : $\alpha_0 = -\frac{17432050}{1909543} \approx -9.129$, $\alpha_1 = \frac{16478205}{1909543} \approx 8.629$, $\alpha_2 = \frac{1153388}{1909543} \approx 0.604$

```
import sympy as sp

# Définition des données
x_data = [1, 20, 30, 40]
y_data = [1, 400, 800, 1300]

# Variables pour les coefficients de la parabole
alpha_0, alpha_1, alpha_2 = sp.symbols('alpha_0 alpha_1 alpha_2')

# Fonction d'erreur (somme des carrés des écarts)
error = sum((y_data[i] - (alpha_0 + alpha_1 * x_data[i] + alpha_2 *
 ↪  x_data[i]**2))**2 for i in range(len(x_data)))

# Calcul des dérivées partielles
grad_alpha_0 = sp.diff(error, alpha_0)
grad_alpha_1 = sp.diff(error, alpha_1)
grad_alpha_2 = sp.diff(error, alpha_2)

# Résolution du système d'équations
solution = sp.solve((grad_alpha_0, grad_alpha_1, grad_alpha_2), (alpha_0,
 ↪  alpha_1, alpha_2))

# Affichage des résultats en LaTeX
latex_output = f"Les coefficients estimés sont : \n"
latex_output += f"$\\alpha_0={sp.latex(solutions[0])} \\approx
 ↪ {solutions[0].evalf():.3f}$, "
latex_output += f"$\\alpha_1={sp.latex(solutions[1])}  \\approx
 ↪ {solutions[1].evalf():.3f}$, "
latex_output += f"$\\alpha_2={sp.latex(solutions[2])}  \\approx
 ↪ {solutions[2].evalf():.3f}$"
print(latex_output)
```

Les coefficients estimés sont : $\alpha_0 = -\frac{17432050}{1909543} \approx -9.129$, $\alpha_1 = \frac{16478205}{1909543} \approx 8.629$, $\alpha_2 = \frac{1153388}{1909543} \approx 0.604$

Exercice 3.5
Calculer le polynôme de degré 3 d'équation $y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$ de meilleur approximation des données.

Correction
Le polynôme de degré au plus 3 de meilleur approximation d'un ensemble de 4 points n'est rien d'autre que le polynôme d'interpolation qu'on peut écrire par exemple dans la base de Lagrange :

$$y = 1\frac{(x-20)(x-30)(x-40)}{(1-20)(1-30)(1-40)} + 400\frac{(x-1)(x-30)(x-40)}{(20-1)(20-30)(20-40)} + 800\frac{(x-1)(x-20)(x-40)}{(30-1)(30-20)(30-40)} + 1300\frac{(x-1)(x-20)(x-30)}{(40-1)(40-20)(40-30)}$$

© 2024-2026 G. Faccanoni

```
import sympy as sp
x = sp.symbols('x')
n = 3
p1 = sp.polys.specialpolys.interpolating_poly(n+1, x, X='x', Y='y')
p2 = sp.polys.specialpolys.interpolating_poly(n+1, x, X=[1,20,30,40],
 ↪  Y=[1,400,800,1300])
p3 = sp.simplify(p2)

print(r"\begin{align*} p(x) &= " , sp.latex(p1) , r"\\")
print(r" &= " , sp.latex(p2) , r"\\")
print(r" &= " , sp.latex(p3) , r"\end{align*}")
```

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \frac{y_0\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)}{(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)\,(x_0-x_3)} + \frac{y_1\,(x-x_0)\,(x-x_2)\,(x-x_3)}{(-x_0+x_1)\,(x_1-x_2)\,(x_1-x_3)} + \frac{y_2\,(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_3)}{(-x_0+x_2)\,(-x_1+x_2)\,(x_2-x_3)} + \frac{y_3\,(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)}{(-x_0+x_3)\,(-x_1+x_3)\,(-x_2+x_3)} \\
&= -\frac{(x-40)\,(x-30)\,(x-20)}{21489} + \frac{2\,(x-40)\,(x-30)\,(x-1)}{19} - \frac{8\,(x-40)\,(x-20)\,(x-1)}{29} + \frac{(x-30)\,(x-20)\,(x-1)}{6} \\
&= -\frac{3x^3}{754} + \frac{647x^2}{754} + \frac{135x}{29} - \frac{1700}{377}
\end{aligned}
$$

DONNÉES POUR LES EXERCICES 6 ET 7

t_i	1	2	3	4	5	6
P_i	7.2	9.6	12.9	17.1	23.2	31.4

Exercice 3.6
Un modèle qui décrit l'évolution de la population en fonction du temps est $P(t) = ce^{rt}$. Estimer c et r à partir des données. Modifier les données pour utiliser une régression linéaire. (Le temps t_i est mesuré en décennies et la population $P_i = P(t_i)$ en millions.)

Correction
Si on calcule le logarithme de cette fonction on trouve $\ln(P) = \ln(c) + rt$. On peut alors calculer la droite de meilleur approximation sur l'ensemble $\{(1,\ln(7.2)),(2,\ln(9.6)),(3,\ln(12.9)),(4,\ln(17.1)),(5,\ln(23.2)),(6,\ln(31.4))\}$ et obtenir ainsi r et $\ln(c)$. Notons $\alpha_0 = \ln(c)$ et $\alpha_1 = r$, il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$
\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \ln(y_i) \\ \sum_{i=0}^n x_i \ln(y_i) \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow
$$

$$
\begin{pmatrix} 5+1 & 1+2+3+4+5+6 \\ 1+2+3+4+5+6 & 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} \ln(7.2)+\ln(9.6)+\ln(12.9)+\ln(17.1)+\ln(23.2)+\ln(31.4) \\ 1\times\ln(7.2)+2\times\ln(9.6)+3\times\ln(12.9)+4\times\ln(17.1)+5\times\ln(23.2)+6\times\ln(31.4) \end{pmatrix}
$$

$$
\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 21 & 91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 16.22311007 \\ 61.92721176 \end{pmatrix}
$$

Donc $\alpha_0 \simeq 1.67459$ et $\alpha_1 \simeq 0.29408$ et enfin $c = e^{\alpha_0}$ et $r = \alpha_1$.

```
import sympy as sp
alpha, r = sp.symbols('alpha r')

t_data = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
P_data = [72/sp.S(10), 96/sp.S(10), 129/sp.S(10), 171/sp.S(10), 232/sp.S(10),
 ↪  314/sp.S(10)]

ln_P_data = [sp.log(p) for p in P_data]
```

```
# Fonction d'erreur (somme des carrés des écarts)
error = sum((ln_P_data[i] - (alpha + r * t_data[i]))**2 for i in
 ↪  range(len(t_data)))

# Calcul des dérivées partielles
grad_alpha = sp.diff(error, alpha)
grad_r = sp.diff(error, r)

# Résolution du système d'équations
solution = sp.solve((grad_alpha, grad_r), (alpha, r))

# Affichage des résultats en LaTeX
latex_output = f"Les coefficients estimés sont : \n"
latex_output += f"$\\ln(c) \\approx {solution[alpha].evalf():.3f}$, $r \\approx
 ↪ {solution[r].evalf():.3f}$."
print(latex_output)
```

Les coefficients estimés sont : $\ln(c) \approx 1.675$, $r \approx 0.294$.

Exercice 3.7
Un modèle qui décrit l'évolution de la population en fonction du temps est $\mathrm{P}(t) = 5.3e^{rt}$. Estimer r à partir des données. Attention, il n'y a pas de formule toute prête dans le cours, il faut réfléchir !

Correction
Si on calcule le logarithme de cette fonction on trouve $\ln(\mathrm{P}) = \ln(5.3) + rt$.

On doit minimiser la fonction $\mathscr{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\mathscr{E}(r) = \sum_{i=0}^{n} d_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (\ln(\mathrm{P}_i) - \ln(5.3) - r\,t_i)^2 = \sum_{i=0}^{n} \left(\ln\left(\frac{\mathrm{P}_i}{5.3}\right) - r\,t_i \right)^2.$$

Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche d'abord les points stationnaires, *i.e.* les points r qui vérifient $\mathscr{E}'(r) = 0$. Puisque

$$\mathscr{E}'(r) = -2 \sum_{i=0}^{n} t_i \left(\ln\left(\frac{\mathrm{P}_i}{5.3}\right) - r\,t_i \right)$$

alors $\mathscr{E}'(r) = 0$ ssi

$$\sum_{i=0}^{n} t_i \left(\ln\left(\frac{\mathrm{P}_i}{5.3}\right) - r\,t_i \right) = 0 \iff \sum_{i=0}^{n} t_i \ln\left(\frac{\mathrm{P}_i}{5.3}\right) - r \sum_{i=0}^{n} t_i^2 = 0 \iff r = \frac{\sum_{i=0}^{n} t_i \ln\left(\frac{\mathrm{P}_i}{5.3}\right)}{\sum_{i=0}^{n} t_i^2}$$

Donc $r \simeq 0.296$

```
import sympy as sp
r = sp.symbols('r')

t_data = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
P_data = [72/sp.S(10), 96/sp.S(10), 129/sp.S(10), 171/sp.S(10), 232/sp.S(10),
 ↪  314/sp.S(10)] # Données en millions

# Fonction d'erreur (somme des carrés des écarts)
error = sum( (sp.log(p/5.3) - r * t)**2 for t,p in zip(t_data,P_data))

# Calcul de la dérivée par rapport à r
grad_r = sp.diff(error, r)

# Résolution de l'équation
solution = sp.solve(grad_r, r)

latex_output = f"Le coefficient estimé est : \n"
latex_output += f"$r \\approx {solution[0].evalf():.3f}$\n"
```


© 2024-2026 G. Faccanoni

```
print(latex_output)
```

Le coefficient estimé est : $r \approx 0.296$

© 2024-2026 G. Faccanoni

CHAPITRE 4

Contrôle par équipe ④

Exercice 4.1
36 personnes sont interrogées sur le nombre de pièces dans leur logement. Les 36 réponses obtenues sont résumé dans la série statistique suivante :

$$[1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,4,4,4,4,4,4,5,5,5,6,6,6].$$

1. Donner la distribution statistique associée à cette série (effectifs n_i et fréquences f_i).
2. Déterminer la moyenne, le mode, la médiane, la variance et l'écart type.

Correction

1. Distribution statistique et fréquences relatives :

Nombre de pièces (α_i)	Effectif (n_i)	Fréquence (f_i)
1	5	5/36
2	11	11/36
3	8	8/36
4	6	6/36
5	3	3/36
6	3	3/36
	$\sum_i n_i = 36$	$\sum_i f_i = 1$

2. Moyenne, mode, médiane et variance
   - **Moyenne** : $\mu = 3$
   - **Mode** : 2 (fréquence la plus élevée)
   - **Médiane** : 3.0 (car, après les avoir classées en ordre croissant, la 18ème et la 19ème valeur sont égales à 3)
   - **Variance** : $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{36}(x_i-\mu)^2 = \frac{19}{9} \approx 2.11111$
   - **Écart type** : $s(\mathbf{x}) = \sqrt{V(\mathbf{x})} = \frac{\sqrt{19}}{3} \approx 1.45297$

Exercice 4.2
Étant donnée la série de données quantitatives discrètes

$$\mathbf{x} = [3,5,1,1,0,2,8,2,3,x]$$

avec $x \in \mathbb{R}$, trouver au moins une valeur à attribuer à x pour que

1. la moyenne arithmétique soit $\bar{\mathbf{x}} = 3$;
2. le mode soit $\tilde{\mathbf{x}} = 2$;
3. la médiane soit $\hat{\mathbf{x}} = 2.5$;
4. la médiane soit inférieure à la moyenne arithmétique $\hat{\mathbf{x}} < \bar{\mathbf{x}}$.

Correction
La série $\mathbf{x}$ contient $n = 10$ éléments. On notera $\mathbf{y}$ la suite constituée des éléments de $\mathbf{x}$ sans l'élément inconnu x, triée par ordre croissant :

$$\mathbf{y} = [0,1,1,2,2,3,3,5,8].$$

On a $\sum_{i=1}^{n-1} y_i = 25$.

1. **Moyenne :**
   Pour que la moyenne arithmétique soit égale à 3, il faut que $x = 5$, car l'équation suivante doit être vérifiée :

$$\frac{1}{n}\left(x + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = 3.$$

2. **Mode:**
Le couples (α_i, n_i) pour les éléments de $\mathbf{y}$ sont

$$[(0,1),(1,2),(2,2),(3,2),(5,1),(8,1)]$$

Les éléments 1, 2 et 3 apparaissent chacun 2 fois. Pour que 2 devienne le mode, il faut attribuer à x la valeur 2.

3. **Médiane:**

$$\begin{cases} \frac{2+3}{2} = 2.5 & \text{si } x \geq 3, \\ 2 & \text{si } x \leq 2, \\ \frac{2+x}{2} & \text{si } 2 < x < 3. \end{cases}$$

4. **Médiane inférieure à la moyenne:**
La moyenne vaut $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\left(x + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = \frac{x}{10} + 2.5$ donc

- si $x \geq 3$ on a $\bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} = \frac{x}{10} + 2.5 - 2.5 = \frac{x}{10} > 0$;
- si $x \leq 2$ on a $\bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} = \frac{x}{10} + 2.5 - 2 = \frac{x}{10} + 0.5 > 0$ ssi $x > -5$;
- si $2 < x < 3$ on a $\bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} = \frac{x}{10} + 2.5 - 1 - \frac{x}{2} > 0$ ssi $x < \frac{15}{4}$ donc pour tout $x \in]2;3[$.

En conclusion, l'inégalité est satisfaite pour tout $x > -5$.

Exercice 4.3
Une série statistique est définie partiellement dans le tableau ci-dessous.

x_k :	2	3	4	5	6
y_k :	26	y_1	y_2	y_3	45

On sait aussi que l'équation de la droite de régression de y en fonction de x est

$$y = \frac{18}{5} + \frac{23}{5}x = 3.6 + 4.6x.$$

1. En déduire $\bar{\mathbf{x}}$ et $\bar{\mathbf{y}}$.
2. Si toutes les valeurs de x augmentent de 3, quelle est l'équation de la nouvelle droite de régression de y en fonction de x?
3. Si toutes les valeurs de y augmentent de 3, quelle est l'équation de la nouvelle droite de régression de y en fonction de x?

Correction

1. On a $n = 5$ ainsi

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = 4.$$

On sait que le point $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ appartient à la droite de régression qui a pour équation $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ avec $\gamma_0 = \frac{18}{5}$ et $\gamma_1 = \frac{23}{5}$, donc

$$\bar{\mathbf{y}} = \gamma_0 + \gamma_1 \bar{\mathbf{x}} = 22.$$

2. Si toutes les valeurs de x augmentent de 3, alors
   - la moyenne $\bar{\mathbf{x}}_{\text{new}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k + 3) = \bar{\mathbf{x}}_{\text{old}} + 3$ augmente de 3,
   - la variance $\mathrm{V}(\mathbf{x}_{\text{new}}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}((x_k + 3) - \bar{\mathbf{x}}_{\text{new}})^2 = \mathrm{V}(\mathbf{x}_{\text{old}})$ ne change pas,
   - la covariance $\mathrm{C}(\mathbf{x}_{\text{new}}, \mathbf{y}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}((x_k + 3) - \bar{\mathbf{x}}_{\text{new}})(y_k - \bar{\mathbf{y}}) = \mathrm{C}(\mathbf{x}_{\text{old}}, \mathbf{y})$ ne change pas,
   - la pente $(\gamma_1)_{\text{new}}$ de la nouvelle droite de régression ne change pas non plus car

$$(\gamma_1)_{\text{new}} = \frac{\mathrm{C}(\mathbf{x}_{\text{new}}, \mathbf{y})}{\mathrm{V}(\mathbf{x}_{\text{new}})} = \frac{\mathrm{C}(\mathbf{x}_{\text{old}}, \mathbf{y})}{\mathrm{V}(\mathbf{x}_{\text{old}})} = \gamma_1 = \frac{23}{5};$$

   - comme la moyenne $\bar{\mathbf{x}}_{\text{new}}$ a changé, alors la nouvelle ordonnée à l'origine est

$$(\gamma_0)_{\text{new}} = \bar{\mathbf{y}} - \gamma_1 \bar{\mathbf{x}}_{\text{new}} = \gamma_0 + \gamma_1 \bar{\mathbf{x}}_{\text{old}} - \gamma_1 \bar{\mathbf{x}}_{\text{new}} = \gamma_0 - 3\gamma_1.$$

© 2024-2026 G. Faccanoni

En conclusion, l'équation de la nouvelle droite de régression de y en fonction de x est

$$y = (\gamma_0)_{\text{new}} + (\gamma_1)_{\text{new}} x = -\frac{51}{5} + \frac{23}{5}x = -10.2 + 4.6x.$$

On aurait pu l'obtenir directement en observant que, si toutes les valeurs de x augmentent de 3, alors la droite est translatée vers la droite de 3, autrement dit

$$y = \gamma_0 + \gamma_1(x-3) = \underbrace{(\gamma_0 - 3\gamma_1)}_{(\gamma_0)_{\text{new}}} + \underbrace{\gamma_1}_{(\gamma_1)_{\text{new}}} x.$$

3. De la même manière, si toutes les valeurs de y augmentent de 3, alors
   - la moyenne $\bar{\mathbf{y}}_{\text{new}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(y_k+3) = \bar{\mathbf{y}}_{\text{old}} + 3$ augmente de 3,
   - la covariance $\mathrm{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{\text{new}}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{\mathbf{x}})((y_k+3) - \bar{\mathbf{y}}_{\text{new}}) = \mathrm{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{\text{old}})$ ne change pas,
   - la pente $(\gamma_1)_{\text{new}}$ de la nouvelle droite de régression ne change pas non plus car

$$(\gamma_1)_{\text{new}} = \frac{\mathrm{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{\text{new}})}{\mathrm{V}(\mathbf{x})} = \frac{\mathrm{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{\text{old}})}{\mathrm{V}(\mathbf{x})} = \gamma_1 = \frac{23}{5};$$

   - comme la moyenne $\bar{\mathbf{y}}_{\text{new}}$ a changé, alors la nouvelle ordonnée à l'origine est

$$(\gamma_0)_{\text{new}} = \bar{\mathbf{y}}_{\text{new}} - \gamma_1 \bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{y}}_{\text{old}} + 3) - (\bar{\mathbf{y}}_{\text{old}} - \gamma_0) = \gamma_0 + 3.$$

En conclusion, l'équation de la nouvelle droite de régression de y en fonction de x est

$$y = (\gamma_0)_{\text{new}} + (\gamma_1)_{\text{new}} x = \frac{33}{5} + \frac{23}{5}x = 6.6 + 4.6x.$$

On aurait pu l'obtenir directement en observant que, si toutes les valeurs de y augmentent de 3, alors la droite est translatée vers le haut de 3, autrement dit

$$y = (\gamma_0 + \gamma_1 x) + 3 = \underbrace{(\gamma_0 + 3)}_{(\gamma_0)_{\text{new}}} + \underbrace{\gamma_1}_{(\gamma_1)_{\text{new}}} x.$$

Exercice 4.4 (Distribution statistique bivariée)
On considère les données suivantes :

$$\{(x_i, y_i)\} = [(1,2),(2,2),(2,2),(2,3),(2,3),(1,3)].$$

Compléter les tableaux/valeurs/graphique suivants directement sur cette feuille.

1. Tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives **x** et **y** :

$\mathscr{A}$ \ $\mathscr{B}$	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$
$\alpha_1 = 1$ $\alpha_2 = 2$	$n_{1,1} =$ $n_{2,1} =$	$n_{1,2} =$ $n_{2,2} =$

2. Tableau des fréquences :

$\mathscr{A}$ \ $\mathscr{B}$	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	Fréquence marginale de α_i
$\alpha_1 = 1$ $\alpha_2 = 2$	$f_{1,1} =$ $f_{2,1} =$	$f_{1,2} =$ $f_{2,2} =$	$f_{1,\cdot} =$ $f_{2,\cdot} =$
Fréquence marginale de β_j	$f_{\cdot,1} =$	$f_{\cdot,2} =$	1

3. Tableau des profiles…

Profiles en colonne $f_{i\|j}$		
$\mathscr{A}$ \ $\mathscr{B}$	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$
$\alpha_1 = 1$	$f_{1\|1} =$	$f_{1\|2} =$
$\alpha_2 = 2$	$f_{2\|1} =$	$f_{2\|2} =$
	1	1

Profiles en ligne $f_{j\|i}$			
$\mathscr{A}$ \ $\mathscr{B}$	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	
$\alpha_1 = 1$	$f_{1\|1} =$	$f_{1\|2} =$	1
$\alpha_2 = 2$	$f_{2\|1} =$	$f_{2\|2} =$	1

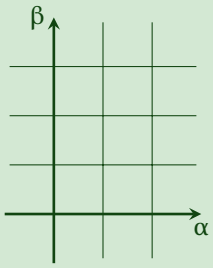
4. Calculer les moyennes, variances et covariances indiquées :

$$\bar{\mathbf{x}} = \qquad V(\mathbf{x}) = \qquad C(\mathbf{x},\mathbf{y}) =$$
$$\bar{\mathbf{y}} = \qquad V(\mathbf{y}) = \qquad C(\mathbf{y},\mathbf{x}) =$$

5. Calculer la droite de régression de $\mathbf{y} = \gamma_0 + \gamma_1 x$ et le coefficient de corrélation :

$$\gamma_1 = \qquad \gamma_0 = \qquad r(\mathbf{x},\mathbf{y}) =$$

6. Représenter la distribution conjointe sur un plan comme un nuage de points (chaque point avec son poids). Représenter aussi le point $(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}})$ et la droite de régression.



Correction

1. Tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives **x** et **y** :

$\mathscr{A}$ \ $\mathscr{B}$	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$
$\alpha_1 = 1$	$n_{1,1} = 1$	$n_{1,2} = 1$
$\alpha_2 = 2$	$n_{2,1} = 2$	$n_{2,2} = 2$

2. Tableau des fréquences :

$\mathscr{A}$ \ $\mathscr{B}$	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	Fréquence marginale de α_i
$\alpha_1 = 1$	$f_{1,1} = \frac{1}{6}$	$f_{1,2} = \frac{1}{6}$	$f_{1,\cdot} = \frac{1}{3}$
$\alpha_2 = 2$	$f_{2,1} = \frac{1}{3}$	$f_{2,2} = \frac{1}{3}$	$f_{2,\cdot} = \frac{2}{3}$
Fréquence marginale de β_j	$f_{\cdot,1} = \frac{1}{2}$	$f_{\cdot,2} = \frac{1}{2}$	1

© 2024-2026 G. Faccanoni

3. Tableau des profiles en colonne $f_{i|j}$:

Profiles en colonne $f_{i\|j}$		
$\mathscr{A}$ \ $\mathscr{B}$	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$
$\alpha_1 = 1$	$f_{1\|1} = \frac{1}{3}$	$f_{1\|2} = \frac{1}{3}$
$\alpha_2 = 2$	$f_{2\|1} = \frac{2}{3}$	$f_{2\|2} = \frac{2}{3}$
	1	1

4. Tableau des profiles en ligne $f_{j|i}$:

Profiles en ligne $f_{j\|i}$			
$\mathscr{A}$ \ $\mathscr{B}$	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	
$\alpha_1 = 1$	$f_{1\|1} = \frac{1}{2}$	$f_{1\|2} = \frac{1}{2}$	1
$\alpha_2 = 2$	$f_{2\|1} = \frac{1}{2}$	$f_{2\|2} = \frac{1}{2}$	1

5. Calcule des moyennes, variances et covariances :

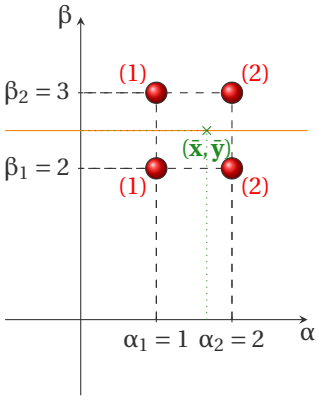
$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_{i,\cdot}\alpha_i = \frac{5}{3}$$
$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q} n_{\cdot,j}\beta_j = \frac{5}{2}$$
$$\mathrm{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_{i,\cdot}\alpha_i^2 - \bar{\mathbf{x}}^2 = \frac{2}{9}$$
$$\mathrm{V}(\mathbf{y}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q} n_{\cdot,j}\beta_j^2 - \bar{\mathbf{y}}^2 = \frac{1}{4}$$
$$\mathrm{C}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{i,j}\alpha_i\beta_j - \bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}} = 0$$
$$\mathrm{C}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \mathrm{C}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

6. Calcule de la droite de régression de $\mathbf{y}$ par rapport à $\mathbf{x}$ et du coefficient de corrélation r :

$$\gamma_1 = \frac{\mathrm{C}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\mathrm{V}(\mathbf{x})} = 0$$
$$\gamma_0 = \bar{\mathbf{y}} - \gamma_1\bar{\mathbf{x}} = \frac{5}{2}$$
$$r(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\mathrm{C}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{\mathrm{V}(\mathbf{x})\mathrm{V}(\mathbf{y})}} = 0$$

La droite cherchée a donc pour équation $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ et le coefficient de corrélation est r.

7. On peut représenter la distribution conjointe sur un plan comme un nuage de points : chaque point correspond à un couple (α_i, β_j) affecté de son poids $n_{i,j}$, autrement dit chaque point correspond à une observation (x_k, y_k) et à coté on indique combien de fois cette observation apparaît. Il y aura donc $p \times q$ points (autant que de cases que dans le tableau de contingence), chaque point se trouvant sur un coin de la grille de coordonnées (α_i, β_j).



© 2024-2026 G. Faccanoni

A.A. 2025-2026

5 Contrôle par équipe ① 33

6 Contrôle par équipe ② 37

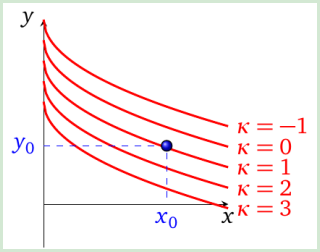
7 Contrôle par équipe ③ 45

8 Contrôle par équipe ④ 53

CHAPITRE 5

Contrôle par équipe ①

Exercice 5.1 (Lignes de niveau)
En figure on a tracé les lignes de niveau d'une fonction $f(x,y)$. Que peut-on conjecturer sur le signe de $\partial_x f(x_0,y_0)$ et $\partial_y f(x_0,y_0)$?



Correction
La fonction $h(x) = f(x,y_0)$ est décroissante donc $\partial_x f(x_0,y_0) < 0$.
La fonction $g(y) = f(x_0,y)$ est décroissante donc $\partial_y f(x_0,y_0) < 0$.

Exercice 5.2
On définit la fonction sigmoïde $\sigma : \mathbb{R} \to (0,1)$ par

$$\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}.$$

1. Montrer que $\sigma'(t) = \sigma(t)\big(1-\sigma(t)\big)$.
2. On considère la fonction composée $f(a,b,x) = \sigma(ax+b)$ où $a,b,x \in \mathbb{R}$ sont des variables réelles. Calculer les dérivées partielles $\partial_a f$, $\partial_b f$, et $\partial_x f$.

Correction
On a $\sigma(t) = \dfrac{1}{1+e^{-t}}$ donc

$$\sigma'(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$$

Or on a aussi

$$\sigma(t)(1-\sigma(t)) = \frac{1}{1+e^{-t}} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+e^{-t}}\right) = \frac{1}{1+e^{-t}} \cdot \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = \sigma'(t).$$

On considère maintenant $f(a,b,x) = \sigma(ax+b)$. Posons $z = ax+b$, alors

$$\begin{aligned}
\partial_a f &= \sigma'(z) \cdot x = \sigma(z)(1-\sigma(z)) \cdot x \\
\partial_b f &= \sigma'(z) \cdot 1 = \sigma(z)(1-\sigma(z)) \\
\partial_x f &= \sigma'(z) \cdot a = \sigma(z)(1-\sigma(z)) \cdot a
\end{aligned}$$

Exercice 5.3 (Gaz parfait)
Pour un gaz parfait, l'énergie interne ε s'écrit en fonction du volume spécifique τ et de l'entropie spécifique s comme

$$\begin{aligned}
\varepsilon : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\
(\tau, s) &\mapsto \tau^{1-\gamma} e^{s/c_v}
\end{aligned}$$

où $\gamma > 1$ et $c_v > 0$ sont deux constantes. Sachant que la pression p et la température T sont liées à l'énergie interne par les relations

$$p = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}, \qquad \mathrm{T} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial s},$$

prouver la loi des gaz parfait, *i.e.* prouver que

$$\frac{p\tau}{T} = \text{constante}.$$

Correction

$$p = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = -(1-\gamma)\tau^{-\gamma} e^{s/c_v} = \frac{\gamma-1}{\tau}\varepsilon, \qquad T = \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} = \frac{1}{c_v}\tau^{1-\gamma} e^{s/c_v} = \frac{\varepsilon}{c_v}, \qquad \frac{p\tau}{T} = (\gamma-1)c_v.$$

Exercice 5.4 (Dérivées partielles et extrema)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que le gradient et la matrice Hessienne de f vérifient

$$\nabla f(-9,-7) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad H_f(-9,-7) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors le point $(-9,-7)$ est un minimum, un maximum, un point selle ou la matrice Hessienne ne permet pas de conclure ?

Correction
Le point $(-9,-7)$ est un point critique. Comme $\det(H_f(-9,-7)) = 3$ alors c'est un minimum.

Exercice 5.5 (Optimisation)
Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^6 - xy - 64x + 5y$. Elle admet un seul point stationnaire, lequel ? Quelle est la nature de ce point ?

Correction
Notons $a = 6$, $b = 64$ et $c = 5$. Alors $f(x,y) = x^a - xy - bx + cy$.

- Recherche des points critiques :

$$\begin{cases} \partial_x f = 0, \\ \partial_y f = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} a x^{a-1} - y - b = 0, \\ -x + c = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} y = a c^{a-1} - b, \\ x = c. \end{cases}$$

  Le seul point critique est le point $(x_0, y_0) = (c, ac^{a-1} - b) = (5, 18686)$.
- Nature du point :

$$\begin{aligned} \partial_{xx} f(x,y) &= a(a-1)x^{a-2} & \partial_{xx} f(x_0,y_0) &= a(a-1)c^{a-2} = 18750 \\ \partial_{xy} f(x,y) &= -1 & \partial_{xy} f(x_0,y_0) &= -1 \\ \partial_{yy} f(x,y) &= 0 & \partial_{yy} f(x_0,y_0) &= 0 \\ \det(H_f)(x,y) &= -1 & \det(H_f)(x_0,y_0) &= -1 \end{aligned}$$

  (x_0, y_0) est un point selle.

Exercice 5.6 (Optimisation)
Soit $b \in \mathbb{R}$. Calculer les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x-2)^2 + 6b(x-2)y + y^3$ et étudier leur nature.

Correction

- Recherche des points critiques :

$$\begin{cases} \partial_x f = 0, \\ \partial_y f = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-2) + 6by = 0, \\ 6b(x-2) + 3y^2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (x-2) + 3by = 0, \\ 2b(x-2) + y^2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (x-2) + 3by = 0, \\ -6b^2 y + y^2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (x-2) + 3by = 0, \\ y(y - 6b^2) = 0, \end{cases}$$

  On a deux points critiques : le point $(x_0, y_0) = (2, 0)$ et le point $(x_1, y_1) = (2 - 18b^3, 6b^2)$.

© 2024-2026 G. Faccanoni

- Nature des points critiques :

$$\begin{array}{lll}
\partial_{xx}f(x,y)=2 & \partial_{xx}f(x_0,y_0)=2 & \partial_{xx}f(x_1,y_1)=2\\
\partial_{xy}f(x,y)=6b & \partial_{xy}f(x_0,y_0)=6b & \partial_{xy}f(x_1,y_1)=6b\\
\partial_{yy}f(x,y)=6y & \partial_{yy}f(x_0,y_0)=0 & \partial_{yy}f(x_1,y_1)=36b^3\\
\det(\mathrm{H}_f)(x,y)=-36b^2+12y & \det(\mathrm{H}_f)(x_0,y_0)=-36b^2 & \det(\mathrm{H}_f)(x_1,y_1)=36b^2
\end{array}$$

Si $b\neq 0$, (x_0,y_0) est un point selle et (x_1,y_1) est un minimum. Si $b=0$, on ne peut pas conclure à partir de la matrice Hessienne.

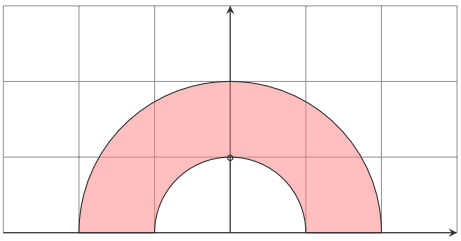
Exercice 5.7
Après avoir représenté graphiquement la région

$$\mathscr{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq 0, 1\leq x^2+y^2\leq 4\},$$

calculer les coordonnées de son centre de gravité en supposant la région $\mathscr{D}$ homogène ; calculer ensuite

$$\iint_{\mathscr{D}}(3x+4y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Correction
La région $\mathscr{D}$ est la zone coloriée suivante



Le centre de gravité a coordonnées (x_G, y_G) données par

$$x_G=\frac{\iint_{\mathscr{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{\mathscr{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y},\qquad y_G=\frac{\iint_{\mathscr{D}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{\mathscr{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}.$$

Il convient de passer aux coordonnées polaires et on obtient

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathscr{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^\pi\int_1^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\left(\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_1^2 r\,\mathrm{d}r\right)=\frac{3}{2}\pi, \quad \text{ou directement}\frac{2^2\pi-1^2\pi}{2}\\
&\iint_{\mathscr{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^\pi\int_1^2 r^2\cos(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\left(\int_0^\pi \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_1^2 r^2\,\mathrm{d}r\right)=0, \quad \text{ou directement par symetrie}\\
&\iint_{\mathscr{D}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^\pi\int_1^2 r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\left(\int_0^\pi \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_1^2 r^2\,\mathrm{d}r\right)=\frac{14}{3}.
\end{aligned}$$

Donc

$$x_G=0,\qquad y_G=\frac{14}{3}\frac{2}{3\pi}=\frac{28}{9\pi}<1.$$

On calcul maintenant l'intégrale donnée

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathscr{D}}(3x+4y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^\pi\int_1^2 (3r\cos(\theta)+4r^2\sin^2\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\
&=\int_0^\pi \left[r^3\cos(\theta)+r^4\sin^2\theta\right]_1^2\,\mathrm{d}\theta\\
&=\int_0^\pi 7\cos(\theta)+15\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\
&=\int_0^\pi 7\cos(\theta)+15\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta=\frac{15}{2}\pi.
\end{aligned}$$

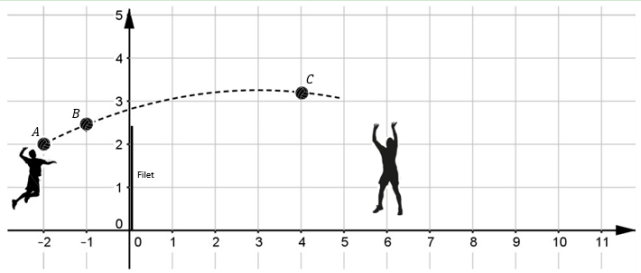
© 2024-2026 G. Faccanoni

CHAPITRE 6

Contrôle par équipe ②

Exercice 6.1 (Interpolation polynomiale)
La dimension d'un terrain de volleyball est réglementaire et précisée par la FIVB : 9 m de large sur 18 m de long. La longueur étant séparée en deux moitiés de 9 m par le filet de volley dont la hauteur pour les hommes est de 2.43 m.

Un joueur effectue un smash. Passant au dessus du filet, la balle suit une trajectoire parabolique. Un appareil photo à déclenchement en rafales a permis de déterminer que la balle est passée par les points $(-2;2)$, $(-1;2.5)$ et $(4;3.2)$ dans un repère défini à partir du filet.



Répondre aux questions suivantes.

1. Placé à 6 m du filet, un joueur saute et s'interpose jusqu'à la hauteur de 2.55 m. Justifier qu'il n'intercepte pas la balle.
2. Le point sera-t-il marqué ?

Correction
Source https://mybinder.org/v2/gh/PythonLycee/PyLyc/master?filepath=Systeme_matriciel_correction.ipynb

On cherche $p \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $p(-2)=2$, $p(-1)=2.5=\frac{5}{2}$ et $p(4)=3.2=\frac{16}{5}$:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2\frac{(x+1)(x-4)}{(-2+1)(-2-4)} + \frac{5}{2}\frac{(x+2)(x-4)}{(-1+2)(-1-4)} + \frac{16}{5}\frac{(x+2)(x+1)}{(4+2)(4+1)} \\ &= \frac{1}{3}(x+1)(x-4) - \frac{1}{2}(x+2)(x-4) + \frac{8}{75}(x+2)(x+1). \end{aligned}$$

1. $p(6)=\frac{66}{25}=2.64>2.55$ donc la balle n'est pas interceptée par le joueur.
2. $p(9)=\frac{9}{10}>0$ ainsi le point n'est pas marqué, puisqu'elle retombe hors des limites du terrain.

Vérifions les calculs avec `sympy` :

```
import sympy as sp
x = sp.symbols('x')

x_vals = [-2, -1, 4]
y_vals = [2, 25/sp.S(10), 32/sp.S(10)]
nb_pt = len(x_vals)
n = nb_pt-1  # Degré du polynôme

# ============================================================
print("\\paragraph{Interpolation dans la base canonique}")

coeffs = sp.symbols(f'a0:{n+1}')
poly = sum(coeffs[i] * x**i for i in range(n+1))
eqs = [sp.Eq(poly.subs(x, x_vals[i]),y_vals[i]) for i in range(n+1)]
print("Le système à résoudre :")
print(r"\[\begin{cases}")
for eq in eqs :
```

```
    ⟶print(sp.latex(eq),r"\\")
print(r"\end{cases}\]")

solution = sp.solve(eqs, coeffs)
p1c = poly.subs(solution)
p2c = p1c.evalf()
print("Polynome d'interpolation dans la base canonique  : " + r"$p(x) =",
 ↪  sp.latex(poly), "=", sp.latex(p1c), "=", sp.latex(p2c), r"$")


# ============================================================
print("\n\\paragraph{Interpolation dans la base de Lagrange}")
p1 = sp.polys.specialpolys.interpolating_poly(n+1, x, X='x', Y='y')
p2 = sp.polys.specialpolys.interpolating_poly(n+1, x, X=x_vals, Y=y_vals)
p3 = sp.simplify(p2)
print(r"\begin{align*} p(x) &= " , sp.latex(p1) , r"\\")
print(r" &= " , sp.latex(p2) , r"\\")
print(r" &= " , sp.latex(p3) , r"\end{align*}")

# ============================================================
print("\n\\paragraph{Bilan}\strut\n")
p_6 = p1c.subs(x,6)
print(r"$p(6)=",sp.latex(p_6),"=",sp.latex(p_6.evalf()),"$\n\n")
p_9 = p1c.subs(x,9)
print(r"$p(9)=",sp.latex(p_9),"=",sp.latex(p_9.evalf()),"$")
```

Interpolation dans la base canonique

Le système à résoudre :

$$\begin{cases} a_0 - 2a_1 + 4a_2 = 2 \\ a_0 - a_1 + a_2 = \frac{5}{2} \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 = \frac{16}{5} \end{cases}$$

Polynome d'interpolation dans la base canonique : $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = -\frac{3x^2}{50} + \frac{8x}{25} + \frac{72}{25} = -0.06x^2 + 0.32x + 2.88$

Interpolation dans la base de Lagrange

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{y_0 (x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{y_1 (x-x_0)(x-x_2)}{(-x_0+x_1)(x_1-x_2)} + \frac{y_2 (x-x_0)(x-x_1)}{(-x_0+x_2)(-x_1+x_2)} \\ &= \frac{(x-4)(x+1)}{3} - \frac{(x-4)(x+2)}{2} + \frac{8(x+1)(x+2)}{75} \\ &= -\frac{3x^2}{50} + \frac{8x}{25} + \frac{72}{25} \end{aligned}$$

Bilan

$p(6) = \frac{66}{25} = 2.64$

$p(9) = \frac{9}{10} = 0.9$

Exercice 6.2
Soit les points

x	-2	0	2	4
y	0	0	16	0

1. Sans effectuer de calcul, préciser dans quel espace de polynômes on doit chercher l'interpolant de ces points

© 2024-2026 G. Faccanoni

afin de garantir l'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation.

2. Écrire **dans la base canonique** de $\mathbb{R}_n[x]$ le polynôme p qui interpole ces points (on utilisera la méthode de Gauss ou de Gauss-Jordan pour la résolution du système linéaire). Indiquer comment vérifier l'exactitude de la solution obtenue.
3. Écrire **dans la base de Lagrange** de $\mathbb{R}_n[x]$ le polynôme p qui interpole ces points.
4. Écrire la **base de Newton** de $\mathbb{R}_n[x]$ associée à ces points, écrire le tableau des différences divisées, en déduire les coordonnées du polynôme qui interpole ces points dans la base de Newton.
5. Sans utiliser les méthodes précédentes, comment peut-on écrire directement le polynôme qui interpole ces points ?
6. Écrire l'équation de la **spline linéaire** qui interpole ces points.
7. Interpoler l'ensemble de points donné dans l'espace vectoriel $\mathrm{V}[x]$ engendré par la famille libre

$$\left\{1, \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}(x+2)\right), \sin\left(\frac{\pi}{8}x\right)\right\}.$$

Correction

1. Comme on a 4 points distincts, l'espace pertinent est $\mathbb{R}_3[x]$, l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3.
2. Soit $\mathscr{C} = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$. Soient $(a,b,c,d) = \mathrm{coord}(p, \mathscr{C})$ les coordonnées de p dans la base $\mathscr{C}$. Elles sont solution du système linéaire

$$\begin{cases} a + b\times(-2) + c\times(-2)^2 + d\times(-2)^3 = 0 \\ a + b\times 0 + c\times 0^2 + d\times 0^3 = 0 \\ a + b\times 2 + c\times 2^2 + d\times 2^3 = 16 \\ a + b\times 4 + c\times 4^2 + d\times 4^3 = 0 \end{cases}$$

Résolvons-le par la méthode de Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_3\leftarrow L_3-L_1 \\ L_4\leftarrow L_4-L_1}]{L_2\leftarrow L_2-L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 16 & 16 \\ 0 & 6 & 12 & 72 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4\leftarrow L_4-3L_2]{L_3\leftarrow L_3-2L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 48 & -48 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} d = -1 \\ c = 2 \\ b = 8 \\ a = 0 \end{cases}$$

On a $\mathrm{coord}(p, \mathscr{C}) = \{0, 8, 2, -1\}$ donc $p(x) = 8x + 2x^2 - x^3$.

On vérifie aisément que

$$\begin{cases} p(-2) = 0, \\ p(0) = 0, \\ p(2) = 16, \\ p(4) = 0. \end{cases}$$

3. Soit $\mathscr{L} = \{\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3\}$ la base de Lagrange de $\mathbb{R}_3[x]$ associée aux points donnés. Les coordonnées de p dans la base $\mathscr{L}$ sont tout simplement $\mathrm{coord}(p, \mathscr{L}) = (0, 0, 16, 0)$. Pour écrire p il est inutile de calculer L_0, L_1 et L_3, il reste à calculer L_2 :

$$\mathrm{L}_3(x) = \frac{(x+2)x(x-4)}{(2+2)2(2-4)} = \frac{(x+2)x(x-4)}{-16},$$

donc $p(x) = 16\mathrm{L}_3(x) = -(x+2)x(x-4)$.

4. La base de Newton de $\mathbb{R}_3[x]$ associée à ces points est $\mathscr{N} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ où ω_i s'écrit

$$\begin{aligned} \omega_0(x) &= 1 \\ \omega_1(x) &= x + 2 \\ \omega_2(x) &= (x+2)x \\ \omega_3(x) &= (x+2)x(x-2) \end{aligned}$$

Le tableau des différences divisées est

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},\dots,x_i]$
0	-2	$\boxed{0}$			
1	0	0	$\frac{0-0}{0+2}=\boxed{0}$		
2	2	16	$\frac{16-0}{2-0}=8$	$\frac{8-0}{2+2}=\boxed{2}$	
3	4	0	$\frac{0-16}{4-2}=-8$	$\frac{-8-8}{4-0}=-4$	$\frac{-4-2}{4+2}=\boxed{-1}$

On a $\mathrm{coord}(p,\mathscr{N})=\{0,0,2,-1\}$ donc

$$p(x)=2\omega_2(x)-\omega_3=2(x+2)x-(x+2)x(x-2)=(x+2)x(2-(x-2))=(x+2)x(4-x).$$

5. Puisque $p(-2)=p(0)=p(4)=0$ le polynôme s'écrit $p(x)=(x+2)x(x-4)q(x)$ avec $q(x)$ un polynôme de degré au plus 0, *i.e.* $q(x)=c$. Comme $16=p(2)=(2+2)2(2-4)c$ alors $c=-1$.
6. Une spline linéaire est une fonction continue affine par morceaux (*i.e.*, les points à interpoler — une fois ordonnés selon les x croissants — sont reliés par des segments) :

$$s(x)=\begin{cases}0 & \text{si } -2\le x\le 0,\\ \frac{16-0}{2-0}(x-0)+0 & \text{si } 0\le x\le 2,\\ \frac{0-16}{4-2}(x-4)+0 & \text{si } 2\le x\le 4\end{cases}=\begin{cases}0 & \text{si } -2\le x\le 0,\\ 8x & \text{si } 0\le x\le 2,\\ -8(x-4) & \text{si } 2\le x\le 4\end{cases}$$

7. On cherche $v(x)=a+b\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)+c\sin\left(\frac{\pi}{4}(x+2)\right)+d\sin\left(\frac{\pi}{8}x\right)$ tel que $v(2)=16$ et $v(-2)=v(0)=v(4)=0$. On cherche donc a, b, c et d tels que

$$\begin{cases}a-b-\frac{\sqrt{2}}{2}d=0,\\ a+c=0,\\ a+b+\frac{\sqrt{2}}{2}d=16,\\ a-c+d=0.\end{cases}$$

On peut resoudre ce système "à la main" :

- si on somme la première et la troisième équation on a $2a=16$ d'où $a=8$;
- la deuxième donne alors $c=-a=-8$;
- la quatrième $d=c-a=-2a=16$;
- enfin la première donne $b=a-\frac{\sqrt{2}}{2}d=8-\frac{\sqrt{2}}{2}16=8(1-\sqrt{2})$.

Sinon par la méthode de Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\1&0&1&0&0\\1&1&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&16\\1&0&-1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{L_3\leftarrow L_3-L_1\\ L_4\leftarrow L_4-L_1}]{L_2\leftarrow L_2-L_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&1&1&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&2&0&\sqrt{2}&16\\0&1&-1&1+\frac{\sqrt{2}}{2}&0\end{array}\right)\xrightarrow[L_4\leftarrow L_4-L_2]{L_3\leftarrow L_3-2L_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&1&1&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&-2&0&16\\0&0&-2&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_4\leftarrow L_4-L_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&1&1&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&-2&0&16\\0&0&0&1&-16\end{array}\right)\Longrightarrow\begin{cases}d=-\frac{1}{16},\\ c=-8,\\ b=8(1+\sqrt{2}),\\ a=8.\end{cases}$$

On obtient la fonction $v(x)=8+8(1+\sqrt{2})\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)-8\sin\left(\frac{\pi}{4}(x+2)\right)-\frac{1}{16}\sin\left(\frac{\pi}{8}x\right)$.

Vérifions les calculs avec `sympy` :

© 2024-2026 G. Faccanoni

```python
import sympy as sp
x = sp.symbols('x')

x_vals = [-2, 0, 2, 4]
y_vals = [0, 0, 16, 0]
nb_pt = len(x_vals)
n = nb_pt-1  # Degré du polynôme

# ============================================================
print("\\paragraph{Interpolation dans la base canonique}")

coeffs = sp.symbols(f'a0:{n+1}')
poly = sum(coeffs[i] * x**i for i in range(n+1))
eqs = [sp.Eq(poly.subs(x, x_vals[i]),y_vals[i]) for i in range(n+1)]
print("Le système à résoudre :")
print(r"\[\begin{cases}")
for eq in eqs :
    print(sp.latex(eq),r"\\")
print(r"\end{cases}\]")

solution = sp.solve(eqs, coeffs)
p1 = poly.subs(solution)
print("Polynome d'interpolation dans la base canonique  : " + r"$p(x) =",
 ↪  sp.latex(poly), "=", sp.latex(p1), r"$")


# ============================================================
print("\n\\paragraph{Interpolation dans la base de Lagrange}")
p1 = sp.polys.specialpolys.interpolating_poly(n+1, x, X='x', Y='y')
p2 = sp.polys.specialpolys.interpolating_poly(n+1, x, X=x_vals, Y=y_vals)
p3 = sp.simplify(p2)
print(r"\begin{align*} p(x) &= " , sp.latex(p1) , r"\\")
print(r" &= " , sp.latex(p2) , r"\\")
print(r" &= " , sp.latex(p3) , r"\end{align*}")



# ============================================================
print("\n\\paragraph{Interpolation dans la base de Newton}")
def ddt(xx,yy):
    n=len(yy);t=[[0]*n for _ in range(n)]
    for i in range(n): t[i][0]=yy[i]
    for j in range(1,n):
        for i in range(j,n):
            t[i][j]=(t[i][j-1]-t[i-1][j-1])/sp.S(xx[i]-xx[i-j])
    return t

def nb(x,xx,i):
    b=1
    for j in range(i):b*=sp.S(x-xx[j])
    return b

def ni(x,xx,yy):
    t=ddt(xx,yy);n=len(xx)
    p=t[0][0]
    for i in range(1,n):p+=t[i][i]*nb(x,xx,i)
    return p
```

```
def print_ddt_latex(xx,yy,t):
    n=len(t)
    s="\\[\\begin{array}{|c|c||"+"c|"*n+"}\n"
    s+="i & x_i & " + " & "*(n-2) + "\\\\\n\\hline\n"
    for i in range(n):
        r=[f"{i}",f"{xx[i]}"]
        r+=[f"\\fbox{{{sp.latex(t[i][j])}}}"if j==i else
         ↪  f"{sp.latex(t[i][j])}"if j<=i else ""for j in range(n)]
        s+=" & ".join(r)+" \\\\\n"
    return s+"\\end{array}\\]"


t=ddt(x_vals,y_vals)
p=ni(x,x_vals,y_vals)

print("Tableau des différences divisées:")
print(print_ddt_latex(x_vals,y_vals,t))
base_terms = " +
 ↪  ".join([f"{sp.latex(t[i][i])}\\times\\Big({sp.latex(nb(x,x_vals,i))}\\Big)"
 ↪  for i in range(1, len(x_vals))])
print(f"\n\nPolynôme d'interpolation dans la base de Newton:
 ↪  $p(x)={sp.latex(t[0][0])} +
 ↪ {base_terms}={sp.latex(p)}={sp.latex(p.factor())}$")


# ============================================================
print("\n\\paragraph{Spline linéaire}")
splines = []
for i in range(len(x_vals) - 1):
    a, b = sp.symbols(f'a{i} b{i}')
    spline = a * x + b
    splines.append(spline)

equations = []
for i in range(len(x_vals) - 1):
    equations.append(sp.Eq(splines[i].subs(x, x_vals[i]), y_vals[i]))
    equations.append(sp.Eq(splines[i].subs(x, x_vals[i+1]), y_vals[i+1]))

params = [sp.symbols(f'a{i} b{i}') for i in range(len(x_vals) - 1)]
flattened_params = sum(params, ()) # aplatissement de la liste
solution = sp.solve(equations, flattened_params)
splines_solved = [spline.subs(solution) for spline in splines]

print(r"La spline, linéaire par morceaux, a pour équation :")
print(r"\[\begin{cases}")
for i, spline in enumerate(splines_solved):
    print(f"  {sp.latex(spline)} & \\text{{si }} x \\in [{x_vals[i]},
     ↪ {x_vals[i+1]}] \\\\")
print(r"\end{cases}\]")


# ============================================================
print("\n\\paragraph{Interpolation dans un EV quelconque}")
base = [ 1, sp.sin(sp.pi/4*x), sp.sin(sp.pi/4*(x+2)), sp.sin(sp.pi/8*x) ]
v = sum(coeffs[i] * base[i] for i in range(n+1))

eqs = [sp.Eq(v.subs(x, x_vals[i]),y_vals[i]) for i in range(n+1)]
print("Le système à résoudre :")
print(r"\[\begin{cases}")
```


© 2024-2026 G. Faccanoni

```
for eq in eqs :
    print(sp.latex(eq),r"\\")
print(r"\end{cases}\]")

solution = sp.solve(eqs, coeffs)
v1 = v.subs(solution)
print("La fonction d'interpolation est " + r"$v(x) =", sp.latex(v), "=",
 ↪  sp.latex(v1), r"$.")
```

Interpolation dans la base canonique Le système à résoudre :

$$\begin{cases} a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 = 0 \\ a_0 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 16 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 0 \end{cases}$$

Polynome d'interpolation dans la base canonique : $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = -x^3 + 2x^2 + 8x$

Interpolation dans la base de Lagrange

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{y_0 (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + \frac{y_1 (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(-x_0+x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{y_2 (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(-x_0+x_2)(-x_1+x_2)(x_2-x_3)} + \frac{y_3 (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(-x_0+x_3)(-x_1+x_3)(-x_2+x_3)} \\ &= -x(x-4)(x+2) \\ &= -x(x-4)(x+2) \end{aligned}$$

Interpolation dans la base de Newton Tableau des différences divisées :

i	x_i				
0	-2	$\boxed{0}$			
1	0	0	$\boxed{0}$		
2	2	16	8	$\boxed{2}$	
3	4	0	-8	-4	$\boxed{-1}$

Polynôme d'interpolation dans la base de Newton : $p(x) = 0+0\times\Big(x+2\Big)+2\times\Big(x(x+2)\Big)+-1\times\Big(x(x-2)(x+2)\Big) = -x(x-2)(x+2)+2x(x+2) = -x(x-4)(x+2)$

Spline linéaire La spline, linéaire par morceaux, a pour équation :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-2,0] \\ 8x & \text{si } x \in [0,2] \\ 32-8x & \text{si } x \in [2,4] \end{cases}$$

Interpolation dans un EV quelconque Le système à résoudre :

$$\begin{cases} a_0 - a_1 - \frac{\sqrt{2}a_3}{2} = 0 \\ a_0 + a_2 = 0 \\ a_0 + a_1 + \frac{\sqrt{2}a_3}{2} = 16 \\ a_0 - a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

La fonction d'interpolation est $v(x) = a_0 + a_1 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + a_2 \sin\left(\pi\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)\right) + a_3 \sin\left(\frac{\pi x}{8}\right) = -16\sin\left(\frac{\pi x}{8}\right) + \left(8+8\sqrt{2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) - 8\sin\left(\pi\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)\right) + 8$.

© 2024-2026 G. Faccanoni

CHAPITRE 7

Contrôle par équipe ③

Exercice 7.1
Calculer α_0 et α_1 pour que $y = \alpha_0 + \alpha_1 x$ soit l'équation de la **droite** de meilleure approximation des points

x	1	2	3	4	5	6
y	10	4	12	8	12	20

Calculer ensuite $\bar{x}$ et $\bar{y}$ et vérifier que le point $(\bar{x}, \bar{y})$ appartient à la droite.

Correction
On a 6 points donc $n = 5$ et il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 21 & 91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ 266 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 6 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ 76 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_1 = \frac{10}{5} = 2$ et $\alpha_0 = 22 - 7\alpha_1 = 4$.

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i}{n+1} = 3.5$ et $\bar{y} = \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i}{n+1} = 11$ et on a $\alpha_0 + \alpha_1 \bar{x} = 4 + 2 \times 3.5 = 11 = \bar{y}$.

Vérifions ces calculs avec `sympy` :

```
import sympy as sp
# Données
xx = sp.Matrix([1, 2, 3, 4, 5, 6])
yy = sp.Matrix([10, 4, 12, 8, 12, 20])

n = len(xx)
Sx = sum(xx)
Sy = sum(yy)
Sxx = sum(x**2 for x in xx)
Sxy = sum(xx[i]*yy[i] for i in range(n))

# Système linéaire pour les moindres carrés
A = sp.Matrix([[n, Sx], [Sx, Sxx]])
b = sp.Matrix([Sy, Sxy])

# Affichage du système matriciel
alpha0, alpha1 = sp.symbols('alpha_0 alpha_1')
alpha_vec = sp.Matrix([alpha0, alpha1])
print("Système matriciel :")
print(f"$ {sp.latex(A)} {sp.latex(alpha_vec)} = {sp.latex(b)} $\n")

# Résolution
alpha = A.LUsolve(b)

# Droite de meilleure approximation
f = sp.Lambda(sp.symbols('t'), alpha[0] + alpha[1]*sp.symbols('t'))
```

```
print(f"Droite de meilleure approximation: ${sp.latex(sp.Eq(sp.symbols('y'),
 ↪  f(sp.symbols('x'))))}$\n")

# Test : passage par (x_moy, y_moy)
x_moy = Sx / n
y_moy = Sy / n
print(f"\n\n$(\\bar x, \\bar y) = {sp.latex((x_moy,y_moy))}$ et $f(\\bar x) =
 ↪ {sp.latex(f(x_moy))}$")
```

Système matriciel : $\begin{bmatrix} 6 & 21 \\ 21 & 91 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 \\ 266 \end{bmatrix}$

Droite de meilleure approximation : $y = 2x + 4$

$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{7}{2}, 11\right)$ et $f(\bar{x}) = 11$

Exercice 7.2
Calculer la **parabole** d'équation $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ de meilleure approximation des données

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-5	-2	-1	-2	-5

Correction
Il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ -44 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_2 = \frac{-14}{14} = -1$, $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_0 = -1$.

Notons qu'il s'agit de la parabole d'interpolation, autrement dit on a $p(x_i) = y_i$ pour tout i.

Vérifions ces calculs avec `sympy` :

```
import sympy as sp
# Données
xx = sp.Matrix([-2, -1, 0, 1, 2])
yy = sp.Matrix([-5, -2, -1, -2, -5])

n = len(xx)
Sx = sum(xx)
Sy = sum(yy)
Sxx = sum(x**2 for x in xx)
Sxy = sum(xx[i]*yy[i] for i in range(n))
Sxxx = sum(x**3 for x in xx)
Sxxy = sum(xx[i]**2*yy[i] for i in range(n))
Sxxxx = sum(x**4 for x in xx)


# Système linéaire pour les moindres carrés
A = sp.Matrix([[n, Sx, Sxx], [Sx, Sxx, Sxxx], [Sxx, Sxxx, Sxxxx]])
b = sp.Matrix([Sy, Sxy, Sxxy])

# Affichage du système matriciel
alpha0, alpha1, alpha2 = sp.symbols('alpha_0 alpha_1 alpha_2')
alpha_vec = sp.Matrix([alpha0, alpha1, alpha2])
print("Système matriciel :")
print(f"$ {sp.latex(A)} {sp.latex(alpha_vec)} = {sp.latex(b)} $\n")
```


© 2024-2026 G. Faccanoni

```
# Résolution
alpha = A.LUsolve(b)

# Parabole de meilleure approximation
f = sp.Lambda(sp.symbols('t'), alpha[0] + alpha[1]*sp.symbols('t') +
 ↪  alpha[2]*sp.symbols('t')**2)

print(f"Parabole de meilleure approximation: ${sp.latex(sp.Eq(sp.symbols('y'),
 ↪  f(sp.symbols('x'))))}$\n")
```

Système matriciel : $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 0 \\ -44 \end{bmatrix}$

Parabole de meilleure approximation : $y = -x^2 - 1$

Exercice 7.3
Un modèle d'évolution de la population en fonction du temps est $P(t) = at^b$. Estimer a et b à partir des données suivantes (modifier les données pour **utiliser une régression linéaire**) :

t_i	0.5	1	1.5	2	2.5
P_i	0.49	1.6	3.36	6.44	10.16

Correction
Si on calcule le logarithme de cette fonction on trouve $\ln(P) = \ln(a) + b\ln(t)$. On peut alors calculer la droite de meilleur approximation sur l'ensemble $\{(x_i = \ln(t_i), y_i = \ln(P_i))\}$ et obtenir ainsi $\ln(a)$ et b. Notons $\alpha_0 = \ln(a)$ et $\alpha_1 = b$, il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 5 & 1.3218 \\ 1.3218 & 1.9649 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.1496 \\ 4.4012 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 \simeq 0.532$ et $\alpha_1 \simeq 1.882$ et enfin $a = e^{\alpha_0} \simeq 1.703$ et $b = \alpha_1$.

```
import sympy as sp

# Données
tp = [sp.Rational(5, 10)*k for k in range(1, 6)]  # [1/2, 1, 3/2, 2, 5/2]
 # équivalent [0.5:0.5:2.5]
Pp = [49/sp.S(100), 16/sp.S(10), 336/sp.S(100), 644/sp.S(100), 1016/sp.S(100)]

# Transformation logarithmique
xp = [sp.log(val) for val in tp]
yp = [sp.log(val) for val in Pp]

# Symboles
x = sp.symbols('x')

# Construction du système linéaire
A = sp.Matrix([
    [len(xp), sum(xp)],
    [sum(xp), sum(xi**2 for xi in xp)]
])
b = sp.Matrix([
    sum(yp),
    sum(xi*yi for xi, yi in zip(xp, yp))
])
```

```python
# Affichage du système matriciel
alpha0, alpha1 = sp.symbols('alpha_0 alpha_1')
alpha_vec = sp.Matrix([alpha0, alpha1])
print("Système matriciel :")
print(f"$ {sp.latex(A.evalf())} {sp.latex(alpha_vec)} = {sp.latex(b.evalf())}
 ↪  $\n")

# Résolution
alpha = A.LUsolve(b)
alpha0, alpha1 = alpha


# Droite de meilleure approximation : f(x) = alpha0 + alpha1 * x
print(f"Droite de régression : $f(x) = {float(alpha0):.3f} + {float(alpha1):.3f}
 ↪  x$\n\n")

# Paramètres du modèle puissance
a = sp.exp(alpha0)
b_exp = alpha1
print(f"Modèle puissance : $g(t) = {float(a):.3f} t^{{{float(b_exp):.3f}}}$")

# --- Graphiques ---
# import numpy as np
# import matplotlib.pyplot as plt
# xx = np.array(xp)
# f = alpha0 + alpha1*x
# g = a * (sp.Symbol('t')**b_exp)
# ff = [sp.N(f.subs(x, val)) for val in xx]
# tt = np.linspace(0.5, 2.5, 100)
# gg = [sp.N(g.subs('t', val)) for val in tt]
# plt.subplot(1, 2, 1)
# plt.plot(xp, yp, 'o', label='données (log)')
# plt.plot(xp, ff, label='f(x)')
# plt.legend()
# plt.subplot(1, 2, 2)
# plt.plot(tp, Pp, 'o', label='données')
# plt.plot(tt, gg, label='g(t)')
# plt.legend()
# plt.show()
```

Système matriciel : $\begin{bmatrix} 5.0 & 1.32175583998232 \\ 1.32175583998232 & 1.96489668704804 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.14958169760998 \\ 4.40124463064031 \end{bmatrix}$

Droite de régression : $f(x) = 0.532 + 1.882x$

Modèle puissance : $g(t) = 1.703t^{1.882}$

Exercice 7.4
Calculer la parabole d'équation $y = \alpha_0 + \alpha_1 x + x^2$ de meilleure approximation des données

x	0	1	2	5
y	−2	7	10	35

NB Il n'y a pas de formule toute faite dans le cours, car un des coefficients est imposé.

Correction
Il s'agit de chercher α_0 et α_1 qui minimisent la fonction $\mathscr{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\mathscr{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^{n} d_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - (\alpha_0 + \alpha_1 x_i + x_i^2))^2 = \sum_{i=0}^{n} \big((y_i - x_i^2) - (\alpha_0 + \alpha_1 x_i)\big)^2.$$

© 2024-2026 G. Faccanoni

Cela équivaut à chercher l'équation de la droite de meilleur approximation de l'ensemble des points $\{(x_i, y_i - x_i^2)\}$.

On obtient le système linéaire

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^0 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum (y_i - x_i^2) \\ \sum (y_i - x_i^2) x_i \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 68 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 34 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_1 = \frac{14}{7} = 2$ et $\alpha_0 = 5 - 2 \times 2 = 1$.

```python
import sympy as sp

# Données
xp = [0, 1, 2, 5]
yp = [-2, 7, 10, 35]

# Symboles
t = sp.symbols('t')

# Construction du système linéaire
s0 = len(xp)
s1 = sum(xp)
s2 = sum([xi**2 for xi in xp])

A = sp.Matrix([[s0, s1],
               [s1, s2]])

b = sp.Matrix([
    sum([yi - xi**2 for xi, yi in zip(xp, yp)]),
    sum([xi*(yi - xi**2) for xi, yi in zip(xp, yp)])
])



# Affichage du système matriciel
alpha0, alpha1 = sp.symbols('alpha_0 alpha_1')
alpha_vec = sp.Matrix([alpha0, alpha1])
print("Système matriciel :")
print(f"$ {sp.latex(A)} {sp.latex(alpha_vec)} = {sp.latex(b)} $\n")


# Résolution du système A * alpha = b
alpha = A.LUsolve(b)

# Fonction de meilleure approximation : f(t) = alpha0 + alpha1*t + t^2
f = alpha[0] + alpha[1]*t + t**2

print("Solution : $\\alpha_0 =", alpha[0], "$ et $\\alpha_1 =", alpha[1],
 ↪  "$\n\n")
print("Parabole de meilleure approximation $f(t) =", sp.latex(f.simplify()),
 ↪  "$")

# Affichage numérique
# import numpy as np
# import matplotlib.pyplot as plt
# xx = np.linspace(0, 5, 100)
# ff = [sp.N(f.subs(t, val)) for val in xx]
# plt.plot(xp, yp, 'o', label='Données')
```

```
# plt.plot(xx, ff, label='Approximation quadratique')
# plt.legend()
# plt.show()
```

Système matriciel : $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 68 \end{bmatrix}$

Solution : $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_1 = 2$

Parabole de meilleure approximation $f(t) = t^2 + 2t + 1$

Exercice 7.5
Dans l'espace vectoriel de base $\{1, \ln(x)\}$, calculer la fonction de meilleure approximation des points

x	e	e^2	e^3
y	6	9	24

Correction
Notons $\varphi_0(x) = 1$ et $\varphi_1(x) = \ln(x)$. On doit minimiser la fonction

$$\mathscr{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^{4} \left(y_i - (\alpha_0 \varphi_0(x_i) + \alpha_1 \varphi_1(x_i))\right)^2.$$

On doit donc résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} \sum \varphi_0^2(x_i) & \sum \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) \\ \sum \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) & \sum \varphi_1^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \varphi_0(x_i) \\ \sum y_i \varphi_1(x_i) \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \sum 1 & \sum \ln(x_i) \\ \sum \ln(x_i) & \sum \ln^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \ln(x_i) \end{pmatrix}$$

Dans notre cas

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 96 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 18 \end{pmatrix}$$

donc $\alpha_1 = \frac{18}{2} = 9$ et $\alpha_0 = \frac{39 - 6 \times 9}{3} = -5$.

```
import sympy as sp
alpha0, alpha1 = sp.symbols('alpha0 alpha1')

# Fonctions de base
phi0 = lambda x : 1
phi1 = lambda x : sp.log(x)

# Données
xp = [sp.exp(1), sp.exp(2), sp.exp(3)]
yp = [6, 9, 24]

# Construction de la matrice A et du vecteur b
A = sp.Matrix([
    [sum(phi0(xi)*phi0(xi) for xi in xp), sum(phi0(xi)*phi1(xi) for xi in xp)],
    [sum(phi0(xi)*phi1(xi) for xi in xp), sum(phi1(xi)*phi1(xi) for xi in xp)]
])

b_vec = sp.Matrix([
    sum(yp[i]*phi0(xp[i]) for i in range(len(xp))),
    sum(yp[i]*phi1(xp[i]) for i in range(len(xp)))
])

# Affichage du système matriciel
alpha0, alpha1 = sp.symbols('alpha_0 alpha_1')
```


© 2024-2026 G. Faccanoni

```
alpha_vec = sp.Matrix([alpha0, alpha1])
print("Système matriciel :")
print(f"$ {sp.latex(A)} {sp.latex(alpha_vec)} = {sp.latex(b_vec)} $\n")


# Résolution
alpha = A.LUsolve(b_vec)
alpha0_sol, alpha1_sol = alpha

print("\nSolution exacte :")
print("$\\alpha_0 =", alpha0_sol, "$ et $\\alpha_1 =", alpha1_sol, "$")

# Fonction de meilleure approximation : f(t) = alpha0 + alpha1*log(t)
# t = sp.Symbol('t')
# f = alpha0 + alpha1 * sp.log(t)

# Affichage
# import numpy as np
# import matplotlib.pyplot as plt
# xx = np.linspace(float(sp.exp(1)), float(sp.exp(3)), 100)
# ff = [float(f.subs(t, val)) for val in xx]
# plt.plot([float(xi) for xi in xp], yp, 'o', label='Données')
# plt.plot(xx, ff, '-', label='Approximation')
# plt.xlabel('x')
# plt.ylabel('y')
# plt.legend()
# plt.show()
```

Système matriciel : $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 96 \end{bmatrix}$

Solution exacte : $\alpha_0 = -5$ et $\alpha_1 = 9$

© 2024-2026 G. Faccanoni

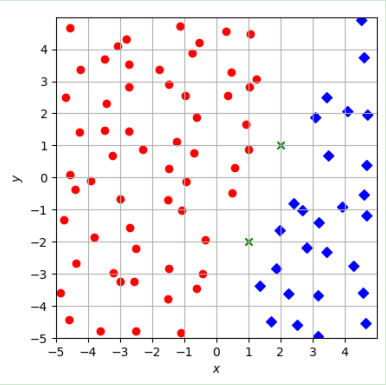
CHAPITRE 8

Contrôle par équipe ④

Exercice 8.1
On considère un perceptron à trois poids (deux poids associés aux coordonnées (x_1, x_2) et un biais). On souhaite déterminer une fonction d'activation ainsi que des poids permettant de séparer les *carrés bleus* des *ronds rouges* dans le plan.

Plus précisément, la fonction finale doit valoir

$$\mathrm{F}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si le point } (x_1, x_2) \text{ correspond à un carré bleu,} \\ 0 & \text{si le point } (x_1, x_2) \text{ correspond à un rond rouge.} \end{cases}$$



Pour écrire l'équation de la droite de séparation, on pourra par exemple considérer celle qui passe par les points indiqués par une croix sur la figure.

Correction
On utilise un perceptron avec fonction d'activation de Heaviside. La sortie est définie par

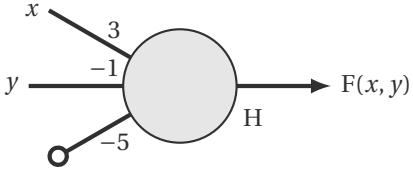
$$\begin{aligned} \mathrm{F}\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \mathrm{F}(x, y) = \mathrm{H}(a_1 x + a_2 y + a_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_1 x + a_2 y + a_0 \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

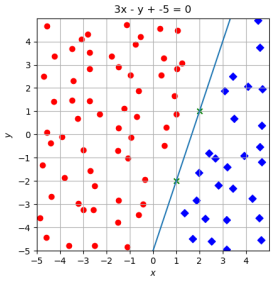
Les coefficients a_0, a_1, a_2 doivent être choisis pour que $\mathrm{F}(x, y) = 1$ pour les coordonnées des carrés bleu et $\mathrm{F}(x, y) = 0$ pour les ronds rouges.

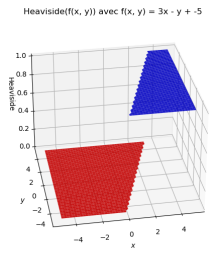
L'équation $a_1 x + a_2 y + a_0 = 0$ définit une droite de séparation. On choisit une droite qui sépare visuellement les deux groupes de points. [1] Un exemple de telle droite est $3x - y - 5 = 0$ obtenue en imposant le passage par les points $\mathrm{Q} = (1,\ \text{-}2)$ et $\mathrm{P} = (2,\ 1)$:

$$\underbrace{(\mathrm{P}_y - \mathrm{Q}_y)}_{a_1=3} x + \underbrace{(\mathrm{Q}_x - \mathrm{P}_x)}_{a_2=-1} y + \underbrace{(\mathrm{Q}_y \mathrm{P}_x - \mathrm{Q}_x \mathrm{P}_y)}_{a_0=\text{-}5} = 0$$

La partie positive se trouve à gauche du segment orienté qui va de P à Q. Si cela ne correspond pas à la consigne, on échange P et Q, ce qui revient à changer simplement les signes des poids.

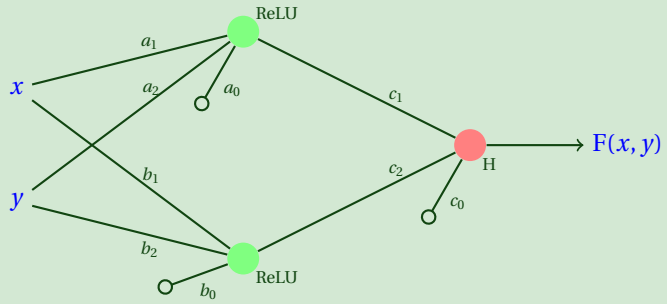






1. Bien évidemment, non seulement les coefficients sont définis à une constante multiplicative près, mais même la droite n'est pas unique (il existe une infinité de droite qui séparent le points donnés).

Exercice 8.2
On considère le réseau de neurones suivant



1. Calculer F(0,0) dans le cas où tous les biais a_0, b_0, c_0 sont strictement négatifs.
2. Même question, dans le cas où $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, et $c_0 > -(c_1 a_0 + c_2 b_0)$.
3. En supposant $a_i = b_i = c_i = 1$ pour $i = 0,1,2$, le réseau peut-il produire la valeur $F(x,y) = 0$ pour un certain couple (x,y) ? Justifier.

Correction
Commençons par exprimer le fonctionnement du réseau. C'est un réseau à 2 entrées et 1 sortie. Il contient une couche cachée et une couche de sortie. Chaque neurone effectue une transformation affine de ses entrées suivie d'une fonction d'activation. Les deux neurones de la couche cachée appliquent la fonction $\mathrm{ReLU}(t) = \max(0,t)$;

- le premier neurone réalise $y_1 = \mathrm{ReLU}(a_1 x + a_2 y + a_0)$,
- le deuxième neurone réalise $y_2 = \mathrm{ReLU}(b_1 x + b_2 y + b_0)$.

Le neurone de sortie applique la fonction de Heaviside $\mathrm{H}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ et réalise $z = \mathrm{H}(c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_0)$.

1. Si $(x,y) = (0,0)$ et tous les biais a_0, b_0, c_0 sont strictement négatifs

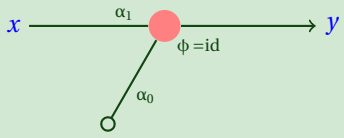
$$\begin{aligned} y_1 = \mathrm{ReLU}(a_0) = 0 \quad & (\text{car } a_0 < 0) \\ y_2 = \mathrm{ReLU}(b_0) = 0 \quad & (\text{car } b_0 < 0) \\ \mathrm{F}(0,0) = \mathrm{H}(c_0) = 0 \quad & (\text{car } c_0 < 0) \end{aligned}$$

2. Si $(x,y) = (0,0)$ et $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $c_0 > -(c_1 a_0 + c_2 b_0)$:

$$\begin{aligned} y_1 = \mathrm{ReLU}(a_0) = a_0 \quad & (\text{car } a_0 > 0) \\ y_2 = \mathrm{ReLU}(b_0) = b_0 \quad & (\text{car } b_0 > 0) \\ \mathrm{F}(0,0) = \mathrm{H}(c_1 a_0 + c_2 b_0 + c_0) = 1 \quad & (\text{car } c_1 a_0 + c_2 b_0 + c_0 > 0). \end{aligned}$$

3. Si tous les poids et biais valent 1, alors $F(x,y) = 0$ ssi $y_1 + y_2 + 1 < 0$ ssi $2\,\mathrm{ReLU}(x+y+1) + 1 < 0$ ssi $\mathrm{ReLU}(x+y+1) < -\frac{1}{2}$ ce qui est impossible car $\mathrm{ReLU}(\star) \geq 0$ pour tout $\star \in \mathbb{R}$. Il n'existe donc aucun (x,y) tel que $F(x,y) = 0$

Exercice 8.3
On considère le perceptron suivant



1. Déterminer la fonction $F(x)$ réalisée par ce réseau, en fonction des poids α_0 et α_1.
2. Soit un ensemble de données $\mathscr{A} = \{(x_i, y_i)\}$. On souhaite ajuster les poids α_0 et α_1 pour que la sortie du réseau approche au mieux cet ensemble. Pour cela, on utilisera comme fonction de coût l'erreur quadratique. Déterminer un système linéaire dont la solution correspond au minimum de cette fonction de coût.

© 2024-2026 G. Faccanoni

3. Déterminer les valeurs optimales de α_0 et α_1 si l'ensemble d'entraînement $\mathscr{A}$ est le jeu de données suivant

x	1	2	3	4	5	6
y	10	4	12	8	12	20

Correction
Le neurone applique une transformation linéaire suivie d'une fonction d'activation identitaire : la sortie est donc

$$\mathrm{F}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x.$$

L'erreur quadratique est une fonction des poids définie par

$$\mathrm{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - \mathrm{F}(x_i)\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - (\alpha_0 + \alpha_1 x_i)\Big)^2.$$

Pour minimiser cette fonction par rapport aux poids, on dérive par rapport à α_0 et α_1

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial \alpha_0} = -2 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big(y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i\big) \\ \dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial \alpha_1} = -2 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big(y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i\big) x_i \end{cases}$$

Le minimum de l'erreur quadratique est obtenu pour (α_0, α_1) qui annulent le gradient :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - (\alpha_0 + \alpha_1 x_i)\Big) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - (\alpha_0 + \alpha_1 x_i)\Big) x_i = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_0 + \alpha_1 x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_0 x_i + \alpha_1 x_i^2) \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} 1 + \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} (y_i x_i) = \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{cases}$$

Ou encore, sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{pmatrix}$$

Application numérique avec

$$n = 6, \qquad \sum x_i = 21, \qquad \sum x_i^2 = 91, \qquad \sum y_i = 66, \qquad \sum x_i y_i = 266.$$

On obtient le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 21 & 91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ 266 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{L}_2 \leftarrow \frac{2}{7}\mathrm{L}_2} \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 6 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ 76 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Donc $\alpha_1 = \frac{10}{5} = 2$ et, en remontant dans la première équation, $\alpha_0 = 22 - 7\alpha_1 = 4$.

Conclusion : les poids minimisant l'erreur quadratique sont $\alpha_0 = 4$ et $\alpha_1 = 2$ et la fonction apprise est donc $\mathrm{F}(x) = 4 + 2x$

© 2024-2026 G. Faccanoni

A.A. 2026-2027

9 Contrôle par équipe ① 59

10 Contrôle par équipe ② 63

11 Contrôle par équipe ③ 67

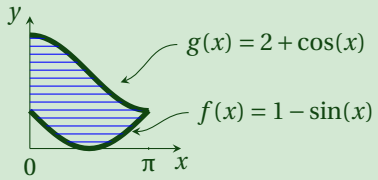
12 Contrôle par équipe ④ 71

13 Contrôle par équipe ⑤ 77

CHAPITRE 9

Contrôle par équipe ①

Exercice 9.1
Que vaut l'aire hachurée comprise entre les deux courbes ?



Correction

$$\int_0^{\pi} \big(2+\cos(x)\big) - \big(1-\sin(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} 1+\cos(x)+\sin(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x+\sin(x)-\cos(x)\Big]_0^{\pi} = (\pi+0-(-1))-(0+0-1) = \pi+2.$$

Exercice 9.2
Calculer $\int_{-7}^{4} f(x)\mathrm{d}x$ lorsque $f(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x<1, \\ -6x+4 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

Correction

$$\begin{aligned}
\int_{-7}^{4} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-7}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-7}^{1} 6x\mathrm{d}x + \int_{1}^{4} (-6x+4)\mathrm{d}x \\
&= \frac{6}{2}\big[x^2\big]_{-7}^{1} + \frac{-6}{2}\big[x^2\big]_{1}^{4} + 4\big[x\big]_{1}^{4} \\
&= \frac{6}{2}(1^2-(-7^2)) + \frac{-6}{2}(4^2-1^2) + 4(4-1) = -177
\end{aligned}$$

Exercice 9.3 (Modélisation)
Supposons qu'une quantité $y = y(t)$ croît à une vitesse proportionnelle au carré de la quantité présente. De plus, supposons qu'à l'instant $t = 0$ la quantité présente est $y_0 > 0$. Écrire le problème de Cauchy associé à cette description et le résoudre.

Correction
Soit $a > 0$, alors

$$\begin{cases} y'(t) = a y^2(t), \\ y(0) = y_0 > 0. \end{cases}$$

Il s'agit d'une EDO à variables séparables. La fonction $y(t) = 0$ pour tout t est solution de l'EDO mais elle ne vérifie pas la CI. Toute autre solution de l'EDO sera non nulle et se trouve formellement comme suit :

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} = a \quad \Longrightarrow \quad \int y^{-2}\,\mathrm{d}y = a\int 1\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad -y^{-1} = at - c \quad \Longrightarrow \quad y(t) = \frac{1}{-at+c},\ c \in \mathbb{R}.$$

En imposant la CI on obtient $c = 1/y_0$ d'où l'unique solution du problème de Cauchy : $y(t) = \dfrac{y_0}{-a y_0 t + 1}$.

Exercice 9.4 (EDO linéaire)
Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = e^{-t}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Correction
L'EDO est linéaire $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = g(t)$ avec $a(t) = 1$, $b(t) = 1$, $g(t) = e^{-t}$. En utilisant la notation du polycopié :

$$\mathrm{A}(t) = \int \frac{b(t)}{a(t)}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t, \qquad \mathrm{B}(t) = \int \frac{g(t)}{a(t)} e^{\mathrm{A}(t)}\,\mathrm{d}t = \int e^{-t}e^{t}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t,$$

donc $y(t) = e^{-\mathrm{A}(t)}\big(\mathrm{B}(t) + \mathrm{C}\big) = e^{-t}(t + \mathrm{C})$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$. En imposant la condition initiale : $1 = y(0) = e^{0}(0 + \mathrm{C}) = \mathrm{C}$, d'où l'unique solution du problème de Cauchy :

$$y(t) = (t+1)e^{-t}.$$

Exercice 9.5 (Variables séparables)
Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y(t)y'(t) = 1 + t, \\ y(0) = -2, \end{cases}$$

et préciser sur quel intervalle la solution est définie.

Correction
L'EDO est à variables séparables :

$$y(t)y'(t) = 1 + t \quad \Longrightarrow \quad \int y\,\mathrm{d}y = \int (1+t)\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = t + \frac{t^2}{2} + c \quad \Longrightarrow \quad y(t) = \pm\sqrt{t^2 + 2t + 2c},\ c \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale $y(0) = -2 < 0$ impose de choisir le signe $-$ ainsi que $4 = 2c$, soit $c = 2$, d'où

$$y(t) = -\sqrt{t^2 + 2t + 4} = -\sqrt{(t+1)^2 + 3}.$$

Comme $(t+1)^2 + 3 > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, la solution est définie (et de classe $\mathscr{C}^1$) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 9.6 (Utilisation d'un schéma numérique)
Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -4t - 2y(t) + 4, \quad t \in [1;2] \\ y(1) = 3, \end{cases}$$

On subdivise l'intervalle $[1;2]$ en 2 intervalles de largeur $h = \frac{1}{2}$ avec $t_0 = 1$, $t_1 = \frac{3}{2}$ et $t_2 = 2$. Pour chaque nœud t_n, on note $y_n = y(t_n)$ la solution exacte évaluée en t_n et on cherche la valeur inconnue u_n qui approche la valeur exacte y_n ; l'ensemble des valeurs $\{y_0, y_1, \ldots\}$ représente la solution exacte discrète tandis que l'ensemble des valeurs $\{u_0 = y_0, u_1, \ldots\}$ représente la solution numérique.

Comparer les valeurs de la solution exacte et des solutions approchées obtenues avec les schémas vus en cours en complétant le tableau suivant :

$t_0 = 1$	$t_1 = \frac{3}{2}$	$t_2 = 2$	
$y_0 =$	$y_1 =$	$y_2 =$	← Solution exacte
$u_0 =$	$u_1 =$	$u_2 =$	← Solution approchée par Euler Explicite
$u_0 =$	$u_1 =$	$u_2 =$	← Solution approchée par Euler Implicite
$u_0 =$	$u_1 =$	$u_2 =$	← Solution approchée par Euler Modifié
$u_0 =$	$u_1 =$	$u_2 =$	← Solution approchée par Trapèze
$u_0 =$	$u_1 =$	$u_2 =$	← Solution approchée par Heun

© 2024-2026 G. Faccanoni

Correction

- **Exacte** L'EDO est linéaire $a(t)y'(t)+b(t)y(t)=g(t)$ avec $a(t)=1$, $b(t)=2$, $g(t)=4-4t$. En utilisant la notation du polycopié nous avons

$$\mathrm{A}(t)=\int\frac{b(t)}{a(t)}\,\mathrm{d}t=\int 2\,\mathrm{d}t=2t,\qquad \mathrm{B}(t)=\int\frac{g(t)}{a(t)}e^{\mathrm{A}(t)}\,\mathrm{d}t=\int(4-4t)\,e^{2t}\,\mathrm{d}t=(3-2t)\,e^{2t}$$

donc $y(t)=\mathrm{C}_1e^{-2t}-2t+3$. En prenant en compte la condition initiale on trouve $3=y(1)=\frac{\mathrm{C}_1}{e^2}+1$ ainsi $y(t)=-2t+2e^{2-2t}+3$.

On trouve $y_0=3$, $y_1=\frac{2}{e}$ et $y_2=-1+\frac{2}{e^2}$.

- **Euler Explicite**

$$\begin{cases}u_0=y(t_0)=y_0,\\ u_{n+1}=u_n+h\varphi(t_n,u_n)\end{cases}\quad\text{donc}\quad\begin{cases}u_0=3,\\ u_{n+1}=u_n+h(4-4t_n-2u_n)=(1-2h)u_n+4h(1-t_n)\end{cases}$$

On trouve $u_0=3$, $u_1=0$ et $u_2=-1$.

- **Euler Implicite**

$$\begin{cases}u_0=y(t_0)=y_0,\\ u_{n+1}=u_n+h\varphi(t_{n+1},u_{n+1})\end{cases}\quad\text{donc}\quad\begin{cases}u_0=3,\\ u_{n+1}=u_n+h(4-4t_{n+1}-2u_{n+1})\end{cases}$$

Pour calculer la solution approchée, on doit résoudre une équation à chaque pas. Puisque l'EDO est linéaire, cette équation est linéaire et la méthode implicite peut être rendue explicite par un calcul élémentaire :

$$u_{n+1}=u_n+h(4-4t_{n+1}-2u_{n+1})\quad\Longleftrightarrow\quad u_{n+1}=\frac{u_n+4h(1-t_{n+1})}{1+2h}.$$

donc

$$\begin{cases}u_0=3,\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+4h(1-t_{n+1})}{1+2h}.\end{cases}$$

On trouve $u_0=3$, $u_1=1$ et $u_2=-\frac{1}{2}$.

- **Euler Modifié**

$$\begin{cases}u_0=y(t_0)=y_0,\\ \tilde u_{n+1/2}=u_n+\frac{h}{2}\varphi(t_n,u_n),\\ u_{n+1}=u_n+h\varphi\left(t_n+\frac{h}{2},\tilde u_{n+1/2}\right)\end{cases}\quad\text{donc}\quad\begin{cases}u_0=3,\\ \tilde u_{n+1/2}=u_n+\frac{h}{2}(4-4t_n-2u_n)\\ u_{n+1}=u_n+h\left(4-4\left(t_n+\frac{h}{2}\right)-2\tilde u_{n+1/2}\right)\end{cases}$$

On trouve $u_0=3$, $u_1=1$ et $u_2=-\frac{1}{2}$.

- **Trapèze** ou **Crank-Nicolson**

$$\begin{cases}u_0=y(t_0)=y_0,\\ u_{n+1}=u_n+\frac{h}{2}\varphi(t_n,u_n)+\frac{h}{2}\varphi(t_{n+1},u_{n+1})\end{cases}$$

donc

$$\begin{cases}u_0=y(t_0)=y_0,\\ u_{n+1}=u_n+\frac{h}{2}\big(4(1-t_n)-2u_n\big)+\frac{h}{2}\big(4(1-t_{n+1})-2u_{n+1}\big)=(1-h)u_n+2h\big(2-t_n-t_{n+1}\big)-hu_{n+1}\end{cases}$$

Pour calculer la solution approchée, on doit résoudre une équation à chaque pas. Puisque l'EDO est linéaire, cette équation est aussi linéaire et la méthode implicite peut être rendue explicite par un calcul élémentaire :

$$u_{n+1}=(1-h)u_n+2h\big(2-t_n-t_{n+1}\big)-hu_{n+1}\quad\Longleftrightarrow\quad u_{n+1}=\frac{(1-h)u_n+2h(2-t_n-t_{n+1})}{1+h}$$

donc

$$\begin{cases}u_0=3,\\ u_{n+1}=\dfrac{(1-h)u_n+2h(2-t_n-t_{n+1})}{1+h}.\end{cases}$$

On trouve $u_0=3$, $u_1=\frac{2}{3}$ et $u_2=-\frac{7}{9}$.

- **HEUN**

$$\begin{cases} u_0 = y(t_0) = y_0, \\ \tilde{u}_{n+1} = u_n + h\varphi(t_n, u_n), \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\varphi(t_n, u_n) + \frac{h}{2}\varphi(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} u_0 = 3, \\ \tilde{u}_{n+1} = u_n + h(4(1-t_n) - 2u_n) = (1-2h)u_n + 4h(1-t_n), \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(4 - 4t_n - 2u_n) + \frac{h}{2}(4 - 4t_{n+1} - 2\tilde{u}_{n+1}) \end{cases}$$

On trouve $u_0 = 3$, $u_1 = 1$ et $u_2 = -\frac{1}{2}$.

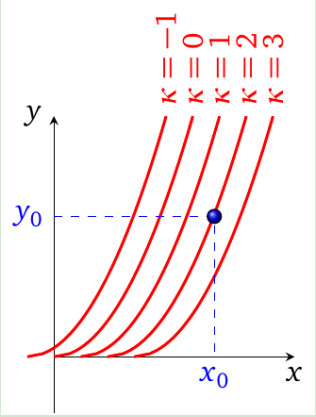
$t_0 = 1$	$t_1 = \frac{3}{2}$	$t_2 = 2$	
$y_0 = 3$	$y_1 = \frac{2}{e}$	$y_2 = -1 + \frac{2}{e^2}$	← Solution exacte
$u_0 = 3$	$u_1 = 0$	$u_2 = -1$	← Solution approchée Euler Explicite
$u_0 = 3$	$u_1 = 1$	$u_2 = -\frac{1}{2}$	← Solution approchée Euler Implicite
$u_0 = 3$	$u_1 = 1$	$u_2 = -\frac{1}{2}$	← Solution approchée Euler Modifié
$u_0 = 3$	$u_1 = \frac{2}{3}$	$u_2 = -\frac{7}{9}$	← Solution approchée Trapèze
$u_0 = 3$	$u_1 = 1$	$u_2 = -\frac{1}{2}$	← Solution approchée Heun

© 2024-2026 G. FACCANONI

CHAPITRE 10

Contrôle par équipe ②

Exercice 10.1 (Lignes de niveau)
En figure on a tracé les lignes de niveau d'une fonction $f(x,y)$. Que peut-on conjecturer sur le signe de $\partial_x f(x_0,y_0)$ et $\partial_y f(x_0,y_0)$?



Correction
La fonction $h(x) = f(x,y_0)$ est croissante donc $h'(x) = \partial_x f(x_0,y_0) > 0$.
La fonction $g(y) = f(x_0,y)$ est décroissante donc $g'(y) = \partial_y f(x_0,y_0) < 0$.

Exercice 10.2
1 mole de gaz parfait qui occupe le volume V à la température T et à la pression P vérifie la relation PV = RT où R est une constante. Montrer que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1, \qquad T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = R.$$

Hint: lorsqu'on écrit $\frac{\partial P}{\partial V}$*, on considère la fonction* $(V,T) \mapsto P$*; lorsqu'on écrit* $\frac{\partial V}{\partial T}$*, on considère la fonction* $(P,T) \mapsto V$ *etc.*

Correction
On a

$$\frac{\partial P}{\partial V} = -R\frac{T}{V^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{P} \qquad \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{R} \qquad \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{R}{V}$$

donc

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -R\frac{T}{V^2}\frac{R}{P}\frac{V}{R} = -1, \qquad T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = T\frac{R}{V}\frac{R}{P} = R.$$

Exercice 10.3
Déterminer et établir la nature des points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = y^2 + xy\ln(x)$.

Correction
- Domaine de définition : $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} y(\ln(x)+1) = 0 \\ 2y + x\ln(x) = 0 \end{cases} \iff (x,y) \in \left\{(1,0); \left(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e}\right)\right\}$$

On a deux points critiques : $(1,0)$ et $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e}\right)$.

- Nature des points critiques :

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} & 1+\ln(x) \\ 1+\ln(x) & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y)) = 2\frac{y}{x} - (1+\ln(x))^2$$

dét$(\mathrm{H}_f(1,0)) < 0$ donc $(1,0)$ est un point-selle ;

dét$\left(\mathrm{H}_f\left(\frac{1}{e},\frac{1}{2e}\right)\right) > 0$ et $\partial_{xx} f\left(\frac{1}{e},\frac{1}{2e}\right) > 0$ donc $\left(\frac{1}{e},\frac{1}{2e}\right)$ est un minimum.

Exercice 10.4 (Softmax pour $n = 2$)
Soit $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On définit la fonction **softmax** par

$$\begin{aligned} \text{softmax} : \mathbb{R}^2 &\to (0,1)^2 \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \big(s_1(\mathbf{x}), s_2(\mathbf{x})\big), \end{aligned}$$

où, pour $i = 1,2$,

$$s_i(\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} \frac{e^{x_i}}{e^{x_1} + e^{x_2}}.$$

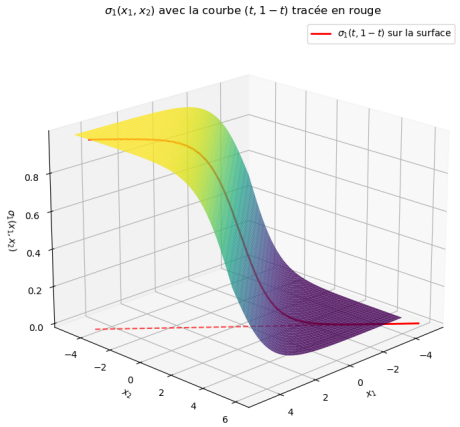
1. Montrer que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $s_1(\mathbf{x}) + s_2(\mathbf{x}) = 1$.
2. Calculer le gradient de la fonction $s_1 : \mathbb{R}^2 \to (0,1)$ et l'exprimer en fonction de s_1 et s_2.
3. Tracer le graphe de la fonction $f : t \mapsto s_1(t, 1-t)$ et de la fonction $g : t \mapsto s_2(t, 1-t)$.

Correction

$$s_1(\mathbf{x}) + s_2(\mathbf{x}) = \frac{e^{x_1}}{e^{x_1}+e^{x_2}} + \frac{e^{x_2}}{e^{x_1}+e^{x_2}} = \frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{e^{x_1}+e^{x_2}} = 1.$$

Posons $\mathrm{D}(\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} e^{x_1} + e^{x_2}$. On a $s_1(\mathbf{x}) = \frac{e^{x_1}}{\mathrm{D}(\mathbf{x})}$. Calculons les dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_1}{\partial x_1} &= \frac{e^{x_1}\mathrm{D}(\mathbf{x}) - e^{x_1}\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial x_1}}{\mathrm{D}(\mathbf{x})^2} = \frac{e^{x_1}(e^{x_1}+e^{x_2}) - e^{x_1}e^{x_1}}{(e^{x_1}+e^{x_2})^2} = \frac{e^{x_1}e^{x_2}}{(e^{x_1}+e^{x_2})^2} = s_1(\mathbf{x})s_2(\mathbf{x}) = s_1(\mathbf{x})(1-s_1(\mathbf{x})); \\ \frac{\partial s_1}{\partial x_2} &= \frac{0\cdot\mathrm{D}(\mathbf{x}) - e^{x_1}\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial x_2}}{\mathrm{D}(\mathbf{x})^2} = -\frac{e^{x_1}e^{x_2}}{(e^{x_1}+e^{x_2})^2} = -s_1(\mathbf{x})s_2(\mathbf{x}). \end{aligned}$$



Posons

$$f(t) = s_1(t,1-t) = \frac{e^t}{e^t + e^{1-t}}, \quad g(t) = s_2(t,1-t) = 1 - s_1(t,1-t).$$

On a

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 1, \quad \lim_{t\to-\infty} f(t) = 0.$$

Pour la dérivée, on peut calculer à la main la dérivée de f :

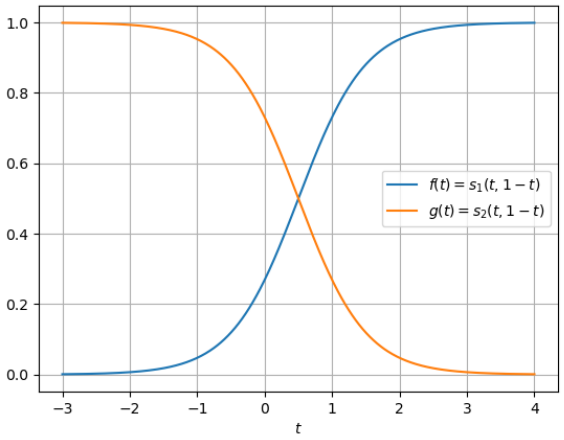
$$f'(t) = \frac{e^t(e^t+e^{1-t}) - e^t(e^t-e^{1-t})}{(e^t+e^{1-t})^2} = \frac{2e^te^{1-t}}{(e^t+e^{1-t})^2} = 2\frac{e^t}{e^t+e^{1-t}}\frac{e^{1-t}}{e^t+e^{1-t}} = 2f(t)\Big(1-f(t)\Big)$$

© 2024-2026 G. Faccanoni

ou, en utilisant la chain rule après avoir remarqué que $f(t) = s_1(x_1(t), x_2(t))$ avec $x_1(t) = t$ et $x_2(t) = 1 - t$:

$$f'(t) = \frac{\partial s_1}{\partial x_1} x_1'(t) + \frac{\partial s_1}{\partial x_2} x_2'(t) = \frac{\partial s_1}{\partial x_1} - \frac{\partial s_1}{\partial x_2} = 2s_1(x_1(t), x_2(t)) s_2(x_1(t), x_2(t)) = 2s_1(x_1(t), x_2(t))\Big(1 - s_1(x_1(t), x_2(t))\Big) = 2f(t)\Big(1 - f(t)\Big).$$

Comme $f(t) \in (0,1)$ alors $f'(t) > 0$.



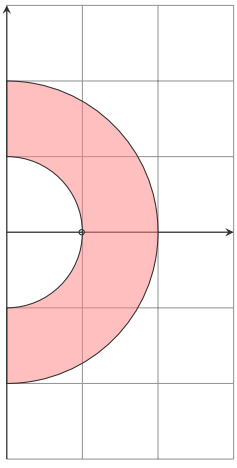
Exercice 10.5
Après avoir représenté graphiquement la région

$$\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\},$$

calculer

$$\iint_{\mathscr{D}} (3x + 4y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Correction
La région $\mathscr{D}$ est la zone coloriée suivante



Il convient de passer aux coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta), \\ y = r\sin(\theta), \end{cases}$$

ainsi

$$\mathscr{D} = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0; 2\pi[\;\middle|\; 1 \leq r \leq 2,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

On calcul maintenant l'intégrale donnée

$$\begin{aligned}\iint_{\mathscr{D}} (3x+4y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_1^2 (3r\cos(\theta)+4r^2\sin^2(\theta))\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[r^3\cos(\theta)+r^4\sin^2(\theta)\right]_1^2 \mathrm{d}\theta\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 7\cos(\theta)+15\sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 7\cos(\theta)+15\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = 14+\frac{15}{2}\pi.\end{aligned}$$

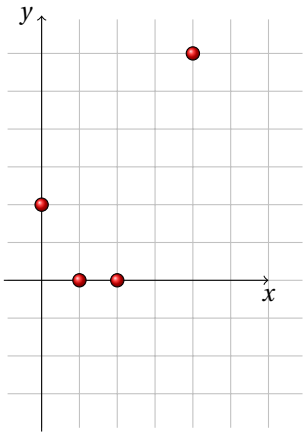
© 2024-2026 G. Faccanoni

CHAPITRE 11

Contrôle par équipe ③

Notons $\mathscr{P}$ l'ensemble constitué par les 4 points suivants :

x	0	1	2	4
y	2	0	0	6



Exercice 11.1 (Interpolation polynomiale)

1. Sans faire de calcul, indiquer la dimension de l'espace vectoriel dans lequel il faut chercher à interpoler les points $\mathscr{P}$ pour avoir existence et unicité.
2. Écrire **dans la base canonique** de $\mathbb{R}_n[x]$ le polynôme p qui interpole les points $\mathscr{P}$ (on utilisera la méthode de Gauss ou de Gauss-Jordan pour la résolution du système linéaire). Indiquer comment vérifier l'exactitude de la solution obtenue.
3. Le polynôme p obtenu est de degré 2, alors que l'on a cherché p dans $\mathbb{R}_3[x]$. Est-ce en contradiction avec la réponse donnée à la première question ? Justifier.
4. Écrire **dans la base de Lagrange** de $\mathbb{R}_n[x]$ le polynôme p qui interpole les points $\mathscr{P}$.
5. Écrire la **base de Newton** de $\mathbb{R}_n[x]$ associée à les points $\mathscr{P}$, écrire le tableau des différences divisées, en déduire les coordonnées du polynôme qui interpole les points $\mathscr{P}$ dans la base de Newton.
6. Sans utiliser les méthodes précédentes, comment peut-on écrire directement le polynôme qui interpole les points $\mathscr{P}$?
7. Écrire l'équation de la **spline linéaire** qui interpole les points $\mathscr{P}$.

Correction

1. On a 4 points à interpoler, donc pour avoir existence et unicité il faut chercher p dans un espace vectoriel E de **dimension** 4. Pour un polynôme, cela correspond à $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[x]$, *i.e.* on cherchera un polynôme **de degré au plus** 3.
2. Soit $\mathscr{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$. Soient $(a,b,c,d) = \mathrm{coord}(p, \mathscr{C})$ les coordonnées de p dans la base $\mathscr{C}$. Elles sont solution du système linéaire

$$\begin{cases} a + b\times 0 + c\times 0^2 + d\times 0^3 = 2 \\ a + b\times 1 + c\times 1^2 + d\times 1^3 = 0 \\ a + b\times 2 + c\times 2^2 + d\times 2^3 = 0 \\ a + b\times 4 + c\times 4^2 + d\times 4^3 = 6 \end{cases}$$

Résolvons-le par la méthode de Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&2\\ 1&1&1&1&0\\ 1&2&4&8&0\\ 1&4&16&64&6 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4\leftarrow L_4-L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&2\\ 0&1&1&1&-2\\ 0&2&4&8&-2\\ 0&4&16&64&4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4\leftarrow L_4-4L_2]{L_3\leftarrow L_3-2L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&2\\ 0&1&1&1&-2\\ 0&0&2&6&2\\ 0&0&12&60&12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_4\leftarrow L_4-6L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&2\\ 0&1&1&1&-2\\ 0&0&2&6&2\\ 0&0&0&24&0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} d=0\\ c=1\\ b=-3\\ a=2 \end{cases}$$

On a $\mathrm{coord}(p,\mathscr{C})=\{2,-3,1,0\}$ donc $p(x)=2-3x+x^2$.

On vérifie aisément que

$$\begin{cases} p(0)=2,\\ p(1)=0,\\ p(2)=0,\\ p(4)=6. \end{cases}$$

3. Non, il n'y a pas de contradiction. Chercher p dans $\mathbb{R}_3[x]$ garantit l'existence et l'unicité d'une solution **dans cet espace**: cela ne veut pas dire que le degré du polynôme trouvé vaut exactement 3, seulement qu'il est **au plus** 3. Ici on trouve $d=0$, *i.e.* le coefficient de x^3 est nul: le polynôme $p(x)=2-3x+x^2$ est bien un élément de $\mathbb{R}_3[x]$ (comme tout polynôme de degré ≤ 3), simplement de degré 2.
4. Soit $\mathscr{L}=\{L_0,L_1,L_2,L_3\}$ la base de Lagrange de $\mathbb{R}_3[x]$ associée aux points donnés. Les coordonnées de p dans la base $\mathscr{L}$ sont tout simplement $\mathrm{coord}(p,\mathscr{L})=(2,0,0,6)$. Pour écrire p il est inutile de calculer L_1 et L_2, il reste à calculer L_0 et L_3:

$$L_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{-8},\qquad L_3(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}=\frac{x(x-1)(x-2)}{24}.$$

donc $p(x)=2L_0(x)+6L_3(x)=\frac{1}{4}\left(-(x-4)+x\right)(x-1)(x-2)=(x-1)(x-2)$.
5. La base de Newton de $\mathbb{R}_3[x]$ associée à les points $\mathscr{P}$ est $\mathscr{N}=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ où ω_i s'écrit

$$\begin{aligned} \omega_0(x)&=1\\ \omega_1(x)&=x-0=x\\ \omega_2(x)&=(x-0)(x-1)=x(x-1)\\ \omega_3(x)&=(x-0)(x-1)(x-2)=x(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

Le tableau des différences divisées est

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},\dots,x_i]$
0	0	$\boxed{2}$			
1	1	0	$\frac{0-2}{1-0}=\boxed{-2}$		
2	2	0	$\frac{0-0}{2-1}=0$	$\frac{0-(-2)}{2-0}=\boxed{1}$	
3	4	6	$\frac{6-0}{4-2}=3$	$\frac{3-0}{4-1}=1$	$\frac{1-1}{4-0}=\boxed{0}$

On a $\mathrm{coord}(p,\mathscr{N})=\{2,-2,1,0\}$ donc

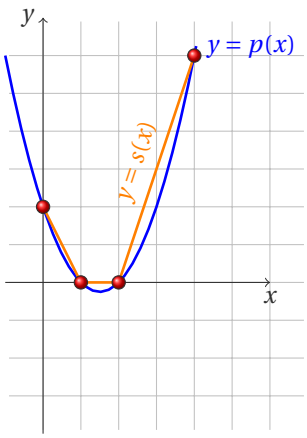
$$p(x)=2-2x+x(x-1)=2-3x+x^2.$$

6. Puisque $p(1)=p(2)=0$ le polynôme s'écrit $p(x)=(x-1)(x-2)q(x)$ avec $q(x)$ un polynôme de degré au plus 1, *i.e.* $q(x)=ax+b$. Comme $p(0)=2$ alors $2=2b$ ainsi $b=1$. Il reste à exploiter la condition $p(4)=6$ donc $6=6(4a+b)=6(4a+1)$ par conséquente $a=0$.

© 2024-2026 G. Faccanoni

7. Une spline linéaire est une fonction affine par morceaux (*i.e.*, les points à interpoler — une fois ordonnés selon les x croissants — sont reliés par des segments) :

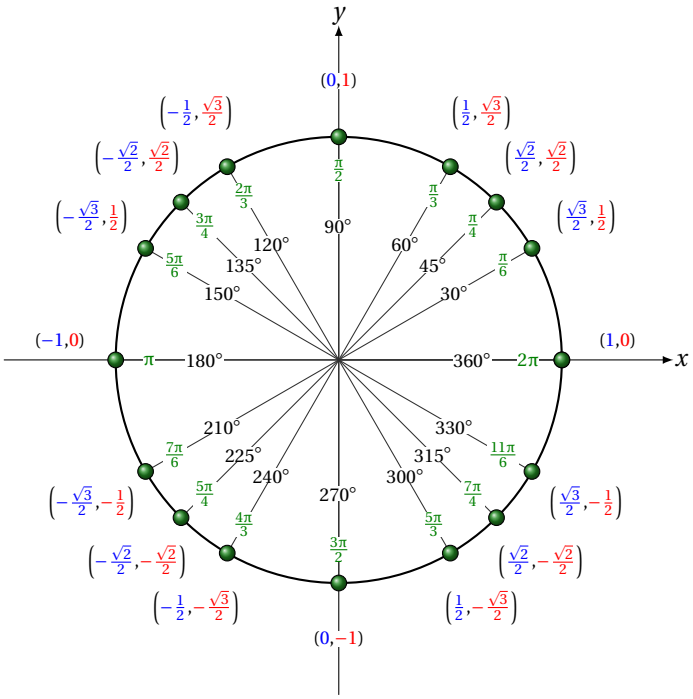
$$s(x) = \begin{cases} \frac{0-2}{1-0}(x-1)+0 = 2(1-x) & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{si } 1 \le x \le 2, \\ \frac{6-0}{4-2}(x-2)+0 = 3(x-2) & \text{si } 2 \le x \le 4. \end{cases}$$



Exercice 11.2 (Interpolation non polynomiale)
Interpoler l'ensemble de points $\mathscr{P}$ dans l'espace vectoriel $\mathrm{V}[x]$ engendré par la base

$$\left\{\cos(2\pi x), \cos(\pi x), \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)\right\}.$$

Rappel des valeurs remarquables des fonctions cosinus et sinus en fonction de l'angle :



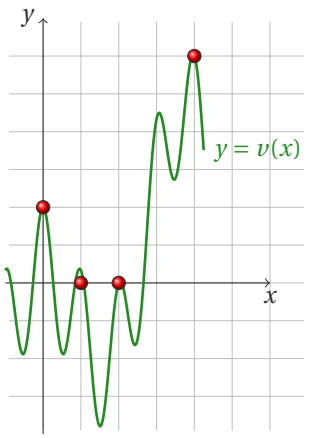
Correction
On cherche $v(x) = a\cos(2\pi x) + b\cos(\pi x) + c\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + d\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ tel que $v(0) = 2$, $v(1) = v(2) = 0$ et $v(4) = 6$. On cherche donc a, b, c et d tels que

$$\begin{cases} a+b+c+d = 2 \\ a-b+\frac{1}{2}d = 0 \\ a+b-c-\frac{1}{2}d = 0 \\ a+b+c-\frac{1}{2}d = 6 \end{cases}$$

Résolvons-le par la méthode de Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} d = -\frac{8}{3} \\ c = 3 \\ b = \frac{1}{6} \\ a = \frac{3}{2} \end{cases}$$

On obtient la fonction $v(x) = \frac{3}{2}\cos(2\pi x) + \frac{1}{6}\cos(\pi x) + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{8}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$.



Remarque
Dans les deux exercices précédents, on interpole 4 points dans un espace vectoriel de dimension 4, ce qui donne dans les deux cas un système linéaire carré 4×4. Il y a cependant une nuance importante entre les deux situations.

Pour l'interpolation polynomiale, la matrice du système (matrice de Vandermonde) est **toujours inversible** dès lors que les x_i sont distincts : existence et unicité sont donc garanties *a priori*, quels que soient les points choisis.

Pour l'interpolation dans l'espace vectoriel engendré par $\left\{\cos(2\pi x), \cos(\pi x), \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)\right\}$, aucun théorème général ne garantit que la matrice associée soit inversible : cela dépend de la base choisie et des points x_i. Ici, l'existence et l'unicité se **constatent a posteriori**, en observant que la méthode de Gauss ne produit aucun pivot nul.

Plus précisément, il existe une condition générale, qui généralise le théorème fondamental de l'algèbre utilisé pour les polynômes : une famille $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ garantit existence et unicité **pour tout choix** de $n+1$ points distincts si et seulement si elle forme un **système de Chebyshev** (ou *système de Haar*) sur le domaine considéré, *i.e.* si toute combinaison linéaire non nulle $\sum_i a_i \varphi_i$ admet au plus n zéros. Cela équivaut à dire que, pour *tout* choix de $n+1$ points distincts $x_0, \ldots, x_n$, la matrice $\left(\varphi_j(x_i)\right)_{0 \le i,j \le n}$ est inversible.

- Pour $\{1, x, \ldots, x^n\}$: un polynôme non nul de degré au plus n a au plus n racines, donc c'est toujours un système de Chebyshev sur $\mathbb{R}$, d'où l'inversibilité systématique de la matrice de Vandermonde, quels que soient les points distincts choisis.
- Pour des familles générales (comme les cosinus ci-dessus), rien ne garantit a priori cette propriété sur tout $\mathbb{R}$, et en général elle est fausse, ces fonctions oscillant indéfiniment. On ne peut alors que vérifier, pour les points *donnés* du problème, que le déterminant de la matrice associée est non nul (*i.e.* qu'aucun pivot de Gauss ne s'annule), ce qui garantit existence et unicité pour *ces* points précis, sans rien garantir pour d'autres.

Existe-t-il malgré tout des **stratégies de choix des points** garantissant l'inversibilité pour des familles non polynomiales ? Cela dépend de la famille considérée.

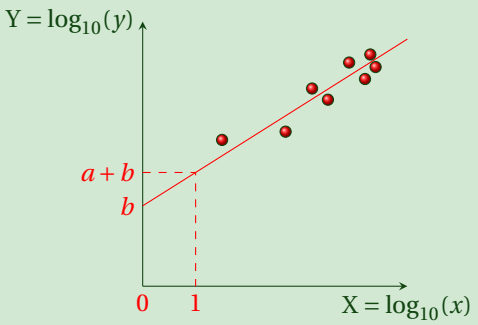
- Pour les **polynômes trigonométriques classiques** $\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \ldots\}$, prendre N points **équirépartis** sur une période rend le système équivalent, via $z = e^{i\theta}$, à une matrice de Vandermonde aux racines N-ièmes de l'unité, donc **toujours inversible**. C'est le principe de la transformée de Fourier discrète.
- Dans notre exercice, la famille $\left\{\cos(2\pi x), \cos(\pi x), \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)\right\}$ n'a pas de période commune compatible avec un tel choix de points équirépartis, et les points $\{0, 1, 2, 4\}$ ne sont pas choisis selon cette stratégie.
- En l'absence de structure particulière (système de Chebyshev connu, symétrie exploitable comme les racines de l'unité), **il n'existe pas de stratégie garantissant a priori l'inversibilité** : il faut choisir les points puis vérifier.

© 2024-2026 G. Faccanoni

CHAPITRE 12

Contrôle par équipe ④

Exercice 12.1
Le graphique de la figure représente, en échelle log – log, un ensemble de données $\{(x_i, y_i)\}$ ainsi que la droite $Y = f(X)$ de meilleure approximation. La droite passe par les points $(0, b)$ et $(1, a+b)$:



Après avoir calculé l'équation de la droite $Y = f(X)$, en déduire l'équation qui approche au mieux les données parmi les suivantes :

1. $y = b10^{ax}$
2. $y = a10^{bx}$
3. $y = 10^b 10^{ax}$
4. $y = 10^a 10^{bx}$
5. $y = b + 10^{ax}$
6. $y = a + 10^{bx}$
7. $y = e^b ax$
8. $y = e^a bx$
9. $y = e^b e^{ax}$
10. $y = e^a e^{bx}$
11. $y = 10^b x^a$
12. $y = 10^a x^b$
13. $y = b + a\log_{10}(x)$
14. $y = a + b\log_{10}(x)$

Correction
La droite passe par les points $(0, b)$ et $(1, a+b)$ et a donc pour équation $Y = \frac{(a+b)-b}{1-0}(X-0) + b = aX + b$ avec $X = \log_{10}(x)$ et $Y = \log_{10}(y)$. Nous avons

$$\log_{10}(y) = a\log_{10}(x) + b \quad \rightsquigarrow \quad y = 10^{a\log_{10}(x)+b} = 10^{\log_{10}(x^a)}10^b = 10^b x^a.$$

Exercice 12.2
Calculer la droite d'équation $y = \alpha_0 + \alpha_1 x$ de meilleure approximation d'un ensemble de données $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^5$ sachant que

$$\sum x_i = 12, \qquad \sum x_i^2 = 100, \qquad \sum y_i = 468, \qquad \sum x_i y_i = 100.$$

Calculer ensuite $\bar{x}$ et $\bar{y}$ et vérifier que le point $(\bar{x}, \bar{y})$ appartient à la droite.

Correction
On a 6 points donc $n = 5$ et il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 100\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}468\\ 100\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}78\\ 25\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}78\\ -209\end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_1 = \frac{-209}{19} = -11$ et $\alpha_0 = 78 - 2\alpha_1 = 100$.

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=0}^n x_i}{n+1} = 2$ et $\bar{y} = \frac{\sum_{i=0}^n y_i}{n+1} = 78$ et on a $\alpha_0 + \alpha_1\bar{x} = 100 - 11 \times 2 = 78 = \bar{y}$.

Exercice 12.3
Calculer la parabole d'équation $y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ de meilleure approximation des données

x_i	-3	-1	0	1	3
y_i	4	1	0	1	4

Correction
On a 5 points donc $n = 4$. Il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

```python
from sympy import Rational, Matrix, latex, zeros

xp = [-3,-1,0,1,3]
yp = [4,1,0,1,4]

x = [Rational(v) for v in xp]
y = [Rational(v) for v in yp]
n = len(x) - 1
S   = lambda k: sum(xi**k for xi in x)
Sxy = lambda k: sum(xi**k*yi for xi,yi in zip(x,y))

A = Matrix([[n+1,S(1),S(2)],[S(1),S(2),S(3)],[S(2),S(3),S(4)]])
b = Matrix([Sxy(0),Sxy(1),Sxy(2)])

# --- elimination de Gauss pas a pas, avec affichage LaTeX de chaque etape ---
M = A.row_join(b)
steps = [latex(M[:, :3]) + r"\begin{pmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\\\alpha_2
 ↪  \end{pmatrix} =" + latex(M[:, 3])]
nr = M.rows
for col in range(nr - 1):
    piv = M[col, col]
    for row in range(col + 1, nr):
        if M[row, col] != 0:
            factor = M[row, col] / piv
            M[row, :] = M[row, :] - factor * M[col, :]
    steps.append(latex(M[:, :3]) + r"\begin{pmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\\\alpha_2
     ↪  \end{pmatrix} =" + latex(M[:, 3]))

chain = r"\quad\leadsto\quad".join(steps)

a0, a1, a2 = A.solve(b)
```

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 164 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 74 \end{bmatrix} \quad\leadsto\quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 84 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 34 \end{bmatrix} \quad\leadsto\quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 84 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 34 \end{bmatrix}$$

Donc $\alpha_2 = \frac{17}{42} \simeq 0$, $\alpha_1 = \frac{8}{21}$ et $\alpha_0 =$ **??** $\simeq 20$.

Attention: contrairement à la droite de meilleure approximation (exercice précédent), la parabole obtenue ne passe **pas** nécessairement par $(\bar{x}, \bar{y})$. En effet la première équation normale donne $\alpha_0 + \alpha_1 \bar{x} + \alpha_2 \overline{x^2} = \bar{y}$, où $\overline{x^2} = \frac{1}{n+1} \sum x_i^2$ diffère en général de $\bar{x}^2$ (sauf si $\alpha_2 = 0$, cas de la droite).

© 2024-2026 G. Faccanoni

Exercice 12.4
Calculer la parabole d'équation $y = (1,1),(20,400),(30,800),(40,1300) + 20x + \alpha_2 x^2$ de meilleure approximation des données

$$\{10\}.$$

Remarque : ce cas n'est pas traité directement dans le cours ; les équations correspondantes doivent être établies.

Correction
On doit minimiser la fonction $\mathscr{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\mathscr{E}(\alpha_2) = \sum_{i=0}^{n} d_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - (20 + 10x_i + \alpha_2 x_i^2))^2.$$

Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche d'abord les points stationnaires, *i.e.* les points α_2 qui vérifient $\mathscr{E}'(\alpha_2) = 0$. Puisque

$$\mathscr{E}'(\alpha_2) = -2 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 (y_i - (20 + 10x_i + \alpha_2 x_i^2))$$

alors $\mathscr{E}'(\alpha_2) = 0$ ssi

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^2 (y_i - (20 + 10x_i + \alpha_2 x_i^2)) = 0 \iff \sum_{i=0}^{n} x_i^2 (y_i - 20 - 10x_i) - \alpha_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^4 = 0 \iff \alpha_2 = \frac{\sum_{i=0}^{n} (y_i - \mathbf{??} - \frac{1911971}{3530001} x) x_i^2}{\sum_{i=0}^{n} x_i^4}$$

?? PythonTeX ??

Donc $\alpha_2 = \mathbf{??} \simeq (0,1),(1,13),(2,24),(5,76)$.

?? PythonTeX ??

Attention : si l'on ne fixait pas $(\alpha_0, \alpha_1) = (10,10)$ mais qu'on cherchait, avec la formule du cours, la parabole de meilleure approximation **complète** (ses trois coefficients libres), on obtiendrait

$$\alpha_0 = 10 \simeq 10, \quad \alpha_1 = 10 \simeq 10, \quad \alpha_2 = 10 \simeq 10.$$

Ces valeurs sont différentes de $\alpha_0 = 10$, $\alpha_1 = 10$ et $\alpha_2 \simeq 10$ obtenues ci-dessus : imposer des coefficients ne revient pas à « geler » certaines coordonnées de la solution libre, c'est un problème de minimisation différent, dont la solution est en général entièrement différente.

Exercice 12.5
On cherche à approcher les données $\left\{ \begin{bmatrix} 4 & 30 \\ 30 & 642 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 669 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 4 & 30 \\ 0 & 417 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 414 \end{bmatrix} \right\}$ par une parabole d'équation $y = \alpha_0 + \frac{138}{139} x + \alpha_2 x^2$, dont le coefficient de x est imposé. Déterminer α_0 et α_2 minimisant l'erreur au sens des moindres carrés.

Remarque : ce cas n'est pas traité directement dans le cours ; les équations correspondantes doivent être établies.

Correction
On a 4 points donc $n = 3$. Il s'agit de chercher α_0 et α_2 qui minimisent la fonction $\mathscr{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\mathscr{E}(\alpha_0, \alpha_2) = \sum_{i=0}^{n} d_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - (\alpha_0 + \frac{293}{278} x_i + \alpha_2 x_i^2))^2.$$

Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche d'abord les points stationnaires, *i.e.* les points (α_0, α_2) qui vérifient $\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0} = \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_2} = 0$. Puisque

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_2) = -2 \left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - (\alpha_0 + \mathbf{??} x_i + \alpha_2 x_i^2)) \right), \quad \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_2) = -2 \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2 (y_i - (\alpha_0 + (-\pi, -2), \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), (0,0), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), (\pi, -2)\, x_i + \alpha_2 x_i^2)) \right),$$

alors

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0,\alpha_2)=0 \\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_2}(\alpha_0,\alpha_2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^n (y_i-\alpha_0-\mathbf{??}x_i-\alpha_2 x_i^2)=0 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2(y_i-\alpha_0-\end{cases} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-5\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & \frac{14}{3} \end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-\frac{11}{3}\end{bmatrix} x_i-\alpha_2 x_i^2)=0 \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^n (y \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (n+1)\alpha_0+\left(\sum_{i=0}^n x_i^2\right)\alpha_2=\sum_{i=0}^n (y_i-\mathbf{??}x_i) \\ \left(\sum_{i=0}^n x_i^2\right)\alpha_0+\left(\sum_{i=0}^n x_i^4\right)\alpha_2=\sum_{i=0}^n (y_i-\mathbf{??}x_i)x_i^2 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^n (y_i-\mathbf{??}x_i)\\ \sum_{i=0}^n x_i^2(y_i-\mathbf{??}x_i)\end{bmatrix}$$

?? PythonTeX ??

Dans notre cas on obtient

$$\mathbf{??}$$

Donc $\alpha_2 = \mathbf{??} \simeq \mathbf{??}$ et $\alpha_0 = \mathbf{??} \simeq \mathbf{??}$.

?? PythonTeX ??

Attention: si l'on ne fixait pas $\alpha_1 = \mathbf{??}$ mais qu'on cherchait, avec la formule du cours, la parabole de meilleure approximation **complète** (ses trois coefficients libres), on obtiendrait

$$\alpha_0 = \mathbf{??} \simeq \mathbf{??}, \quad \alpha_1 = \mathbf{??} \simeq \mathbf{??}, \quad \alpha_2 = \mathbf{??} \simeq \mathbf{??}.$$

Ces valeurs diffèrent de $\alpha_0 = \mathbf{??}$, $\alpha_1 = \mathbf{??}$ (imposé) et $\alpha_2 = \mathbf{??}$ obtenues ci-dessus: fixer α_1 change la solution optimale des autres coefficients, ce n'est pas équivalent à résoudre le problème libre puis à ignorer la valeur trouvée pour α_1.

Exercice 12.6
Calculer α_0 et α_1 pour que $f(x) = \alpha_0 \cos(x) + \alpha_1 \cos(2x)$ soit la fonction de meilleure approximation des points

$$\{\mathbf{??}\}$$

Correction
On doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\begin{aligned} \mathscr{E}&: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ \\ (\alpha_0,\alpha_1) &\mapsto \mathscr{E}(\alpha_0,\alpha_1) = \sum_{i=0}^n (y_i - \alpha_0\cos(x_i) - \alpha_1\cos(2x_i))^2. \end{aligned}$$

Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche ses points stationnaires. Puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0,\alpha_1) &= -2\left(\sum_{i=0}^n (y_i - \alpha_0\cos(x_i) - \alpha_1\cos(2x_i))\cos(x_i)\right), \\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0,\alpha_1) &= -2\left(\sum_{i=0}^n (y_i - \alpha_0\cos(x_i) - \alpha_1\cos(2x_i))\cos(2x_i)\right), \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0,\alpha_1)=0 \\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0,\alpha_1)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^n (y_i - \alpha_0\cos(x_i) - \alpha_1\cos(2x_i))\cos(x_i)=0 \\ \sum_{i=0}^n (y_i - \alpha_0\cos(x_i) - \alpha_1\cos(2x_i))\cos(2x_i)=0 \end{cases}$$

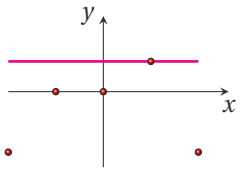
$$\iff \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \cos^2(x_i) & \sum_{i=0}^n \cos(x_i)\cos(2x_i) \\ \sum_{i=0}^n \cos(x_i)\cos(2x_i) & \sum_{i=0}^n \cos^2(2x_i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^n y_i\cos(x_i)\\ \sum_{i=0}^n y_i\cos(2x_i)\end{pmatrix}$$

?? PythonTeX ??

$$\mathbf{??}$$

donc $\alpha_0 = \mathbf{??}$ et $\alpha_1 = \mathbf{??}$.

© 2024-2026 G. Faccanoni



Remarque
Dans tous les exercices précédents, le système linéaire obtenu (les **équations normales**) est **carré**, mais ce n'est pas parce qu'on cherche à « interpoler » les points : c'est le nombre de **paramètres** α_i à déterminer (la dimension de l'espace dans lequel on cherche $\alpha_0 + \alpha_1 x$, ou $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$, etc.) qui fixe la taille du système, **indépendamment du nombre de points**.

Cela contraste avec l'interpolation (cf. le contrôle précédent) : là-bas, on avait *autant de points que la dimension de l'espace de recherche*, ce qui rendait le système carré *par construction* et permettait d'espérer existence et unicité d'une solution qui passe exactement par tous les points.

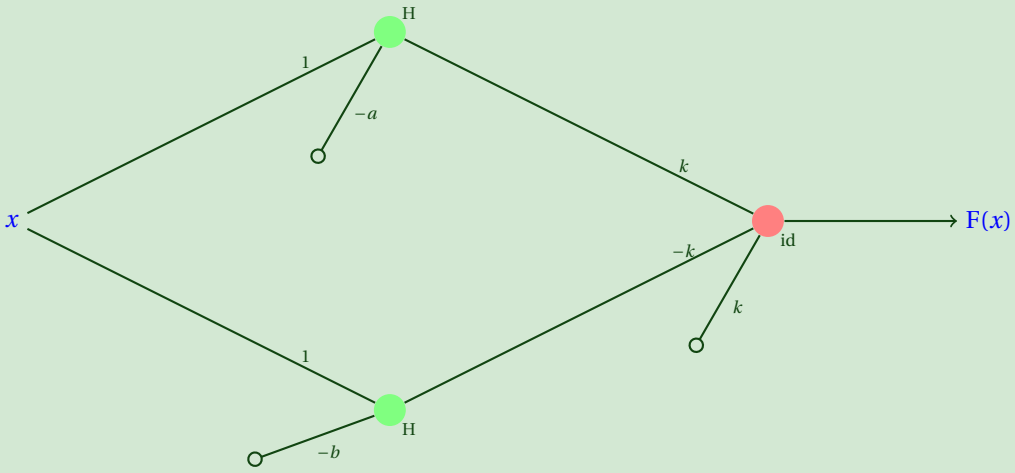
Ici, au contraire, on a généralement **plus de points que de paramètres** (6 points pour 2 paramètres, 5 points pour 3 paramètres, etc.) : le système $A\alpha = b$ où A a une ligne par point est donc **surdéterminé** (rectangulaire, plus de lignes que de colonnes) et n'a en général **aucune solution exacte** : on ne demande d'ailleurs pas que la courbe passe par les points, seulement qu'elle les approche au mieux. On ne résout donc pas $A\alpha = b$ mais on minimise $\|A\alpha - b\|^2$, ce qui conduit aux équations normales $A^\top A\alpha = A^\top b$: c'est ce système-là, carré de taille (nombre de paramètres), que l'on résout dans chaque exercice.

© 2024-2026 G. Faccanoni

CHAPITRE 13

Contrôle par équipe ⑤

Exercice 13.1 (Réseau à seuils)
Tracer le graphe de la fonction réalisée par le réseau de neurones suivant avec $(a,b,k) = (6,8,3)$.



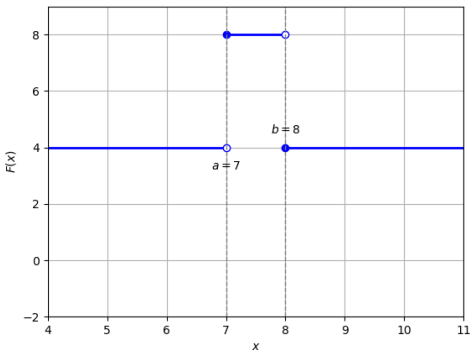
Correction
On a $y_1 = \mathrm{H}(x-a)$ et $y_2 = \mathrm{H}(x-b)$, donc $y_1, y_2 \in \{0,1\}$. y_1 change de valeur (de 0 à 1) en $x = a$: $y_1 = 0$ si $x < a$ et $y_1 = 1$ si $x \geq a$. De même, y_2 change de valeur (de 0 à 1) en $x = b$: $y_2 = 0$ si $x < b$ et $y_2 = 1$ si $x \geq b$. Puisque $a < b$, il y a donc deux points de rupture, a et b, ce qui délimite **trois intervalles** à étudier séparément : $x < a$, $a \leq x < b$ et $x \geq b$.

La sortie est donnée par

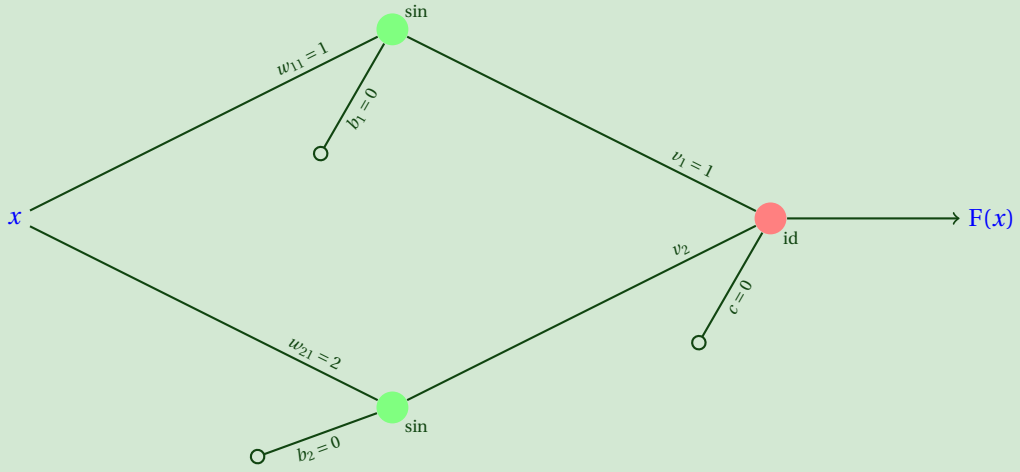
$$\mathrm{F}(x) = k \times (y_1 - y_2 + 1)$$

On étudie les valeurs de (y_1, y_2), puis de $\mathrm{F}(x)$, sur chacun de ces trois intervalles :

$$(y_1,y_2) = \begin{cases} (0,0) & \text{si } x < a \\ (1,0) & \text{si } a \leq x < b \\ (1,1) & \text{si } x \geq b \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{F}(x) = \begin{cases} k \times (0-0+1) = k & \text{si } x < a \\ k \times (1-0+1) = 2k & \text{si } a \leq x < b \\ k \times (1-1+1) = k & \text{si } x \geq b \end{cases}$$



Exercice 13.2 (1 poids libre, 2 points d'entraînement)
On considère le réseau de neurones suivant avec tous les poids fixés sauf un :



Calculer le poids v_2 minimisant l'erreur quadratique sur l'ensemble d'entraînement

$$\mathscr{A} = \left\{\left(\frac{\pi}{6},1\right),\left(\frac{\pi}{2},0\right)\right\}.$$

Indication : écrire l'erreur quadratique $\mathrm{E}(v_2)$ *; c'est une fonction d'une seule variable, donc la minimiser revient à résoudre* $\mathrm{E}'(v_2)=0$.

Correction

La fonction réalisée par le réseau s'écrit, en fonction de tous les poids,

$$y_1 = \sin(w_{11}x + b_1), \quad y_2 = \sin(w_{21}x + b_2), \quad \mathrm{F}(x) = v_1 y_1 + v_2 y_2 + c.$$

Avec les poids fixés $(w_{11}, b_1, w_{21}, b_2, v_1, c) = (1,0,2,0,1,0)$, les sorties de la couche cachée sont $y_1 = \sin(x)$ et $y_2 = \sin(2x)$, et la sortie du réseau s'écrit :

$$\mathrm{F}(x) = \sin(x) + v_2 \sin(2x).$$

Calculons les valeurs de $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \sin(2x)$ aux deux points d'entraînement ainsi que $\mathrm{F}(x_i)$. On rappelle que $\mathrm{F}(x_i)$ (la sortie du réseau) et y_i (la valeur cible, donnée dans $\mathscr{A}$) sont en général différentes : c'est précisément leur écart que l'on va chercher à minimiser.

x_i	$\sin(x_i)$	$\sin(2x_i)$	$\mathrm{F}(x_i)$	y_i
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} v_2$	1
$\pi/2$	1	0	1	0

L'erreur quadratique totale sur l'ensemble d'entraînement est

$$\mathrm{E}(v_2) = \sum_{i=1}^{2} \big(\mathrm{F}(x_i) - y_i\big)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} v_2 - 1\right)^2 + (1-0)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} v_2 - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

On cherche le poids v_2 qui minimise cette erreur. E est une fonction quadratique convexe en v_2, le minimum se trouve en résolvant l'équation $\mathrm{E}'(v_2) = 0$.

$$\mathrm{E}'(v_2) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} v_2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \iff \frac{\sqrt{3}}{2} v_2 = \frac{1}{2} \iff \boxed{v_2^\star = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.}$$

Conclusion : le minimum de l'erreur quadratique est atteint pour $v_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Notons que les résidus et l'erreur minimale sont

x_i	y_i	$\mathrm{F}^\star(x_i)$	$r_i = y_i - \mathrm{F}^\star(x_i)$
$\pi/6$	1	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$	0
$\pi/2$	0	$1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0 = 1$	-1

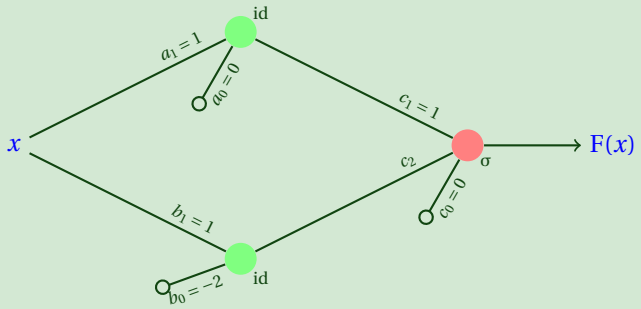
$$\mathrm{E}_{\min} = 0^2 + (-1)^2 = 1.$$

L'erreur minimale est $\mathrm{E}_{\min} = 0^2 + (-1)^2 = 1$.

© 2024-2026 G. Faccanoni

Remarque
Le système d'interpolation exacte est incompatible : la seconde équation $0 \cdot v_2 = -1$ est impossible car $\sin(2 \cdot \pi/2) = 0$, si bien qu'aucune valeur de v_2 ne peut annuler $\mathrm{F}(\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1$. La minimisation de l'erreur quadratique donne le meilleur compromis possible avec un seul paramètre libre.

Exercice 13.3 (1 poids libre, 2 points d'entraînement, sortie sigmoïde)
On considère le réseau de neurones suivant, où les neurones cachés ont pour fonction d'activation l'identité et le neurone de sortie la fonction logistique $\sigma(z) = \dfrac{1}{1+e^{-z}}$, avec tous les poids fixés sauf un :



Calculer le poids c_2 minimisant l'erreur quadratique sur l'ensemble d'entraînement

$$\mathscr{A} = \left\{ (2,0), \left(0, \frac{1}{1+e^2}\right) \right\}.$$

Indication : écrire l'erreur quadratique $\mathrm{E}(c_2)$ *; c'est une fonction d'une seule variable, donc la minimiser revient à résoudre* $\mathrm{E}'(c_2) = 0$.

Correction
Avec les poids fixés, les sorties de la couche cachée sont $y_1(x) = x$ et $y_2(x) = x - 2$, et la sortie du réseau s'écrit

$$\mathrm{F}(x) = \sigma\big(y_1(x) + c_2 y_2(x)\big) = \sigma\big(x + c_2(x-2)\big).$$

Aux deux points d'entraînement, on a donc

x_i	$\mathrm{F}(x_i)$
2	$\sigma(2)$
0	$\sigma(-2c_2)$

L'erreur quadratique totale sur l'ensemble d'entraînement est

$$\mathrm{E}(c_2) = \big(\mathrm{F}(2) - 0\big)^2 + \left(\mathrm{F}(0) - \frac{1}{1+e^2}\right)^2 = \big(\sigma(2)\big)^2 + \left(\sigma(-2c_2) - \frac{1}{1+e^2}\right)^2,$$

ainsi

$$\mathrm{E}'(c_2) = 2\left(\sigma(-2c_2) - \frac{1}{1+e^2}\right) \times \sigma'(-2c_2) \times (-2).$$

Rappelons que $\sigma'(z) = \sigma(z)\big(1 - \sigma(z)\big) > 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}$, donc

$$\mathrm{E}'(c_2) = 0 \iff \sigma(-2c_2) = \frac{1}{1+e^2} \iff \frac{1}{1+e^{2c_2}} = \frac{1}{1+e^2} \iff -2c_2 = -2 \iff \boxed{c_2^\star = 1.}$$

Notons que l'erreur minimale correspondante est

$$\mathrm{E}_{\min} = \sigma(2)^2 = \left(\frac{1}{1+e^{-2}}\right)^2 \simeq 0.776 > 0;$$

le point $(2,0)$ n'est pas interpolé exactement (et ne peut pas l'être, puisque sa pré-activation ne dépend pas de c_2).

Remarque
Contrairement aux cas précédents, F dépend ici de c_2 par l'intermédiaire de la fonction *non linéaire* σ : l'équation $\mathrm{E}'(c_2) = 0$ n'est donc plus une équation linéaire en c_2. Elle reste néanmoins résoluble explicitement grâce à la stricte monotonie (donc l'injectivité) de σ, qui permet de « passer à travers » la non-linéarité.

Exercice 13.4 (4 poids libres, 2 points d'entraînement)
On considère un réseau de neurones à une couche cachée, avec l'architecture suivante



Ce réseau possède 4 paramètres : a, b, c, d. On cherche à ajuster ces paramètres à partir de deux points d'entraînement

$$(x_1, y_1) = (0, 0), \quad (x_2, y_2) = (1, 1)$$

1. Écrire l'expression de la sortie du réseau $\mathrm{F}(x)$ en fonction de a, b, c, d, x.
2. Écrire l'expression de l'erreur quadratique $\mathrm{E}(a, b, c, d)$.
3. Écrire les expressions des dérivées partielles de E par rapport à a, b, c, d. *Indication : commencez par la dérivée la plus simple (par rapport à d, qui est la variable « la plus externe » dans* F*), puis traitez c, puis b, puis a (la plus « interne »), en appliquant chaque fois la règle de dérivation en chaîne.*
4. Résoudre le système d'équations obtenu en annulant ces dérivées dans le cas particulier où f et g sont la fonction identité $x \mapsto x$.

Correction
Expression de la sortie du réseau :

$$\mathrm{F}(x; a, b, c, d) = g\Big(c \cdot f\big(ax + b\big) + d\Big)$$

Erreur quadratique :

$$\mathrm{E}(a, b, c, d) = \sum_i \big(\mathrm{F}(x_i; a, b, c, d) - y_i\big)^2 = \sum_i \big(g\left(c \cdot f(ax_i + b) + d\right) - y_i\big)^2$$

Dérivées partielles : pour simplifier, posons

$$z_i = ax_i + b, \quad h_i = f(z_i), \quad u_i = ch_i + d, \quad \mathrm{F}(x_i) = g(u_i).$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a} &= 2\sum_i \big(\mathrm{F}(x_i) - y_i\big) \cdot g'(u_i) \cdot c \cdot f'(z_i) \cdot x_i \\
\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial b} &= 2\sum_i \big(\mathrm{F}(x_i) - y_i\big) \cdot g'(u_i) \cdot c \cdot f'(z_i) \\
\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial c} &= 2\sum_i \big(\mathrm{F}(x_i) - y_i\big) \cdot g'(u_i) \cdot f(z_i) \\
\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial d} &= 2\sum_i \big(\mathrm{F}(x_i) - y_i\big) \cdot g'(u_i)
\end{aligned}$$

Passons maintenant au cas particulier où les fonctions d'activation sont les fonctions identités : $f(x) = g(x) = x$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x) &= c(ax + b) + d = acx + bc + d \\
\mathrm{E}(a, b, c, d) &= (bc + d)^2 + (ac + bc + d - 1)^2
\end{aligned}$$

et

$$h_i = z_i = ax_i + b, \quad \mathrm{F}(x_i) = u_i = ch_i + d = c(ax_i + b) + d = (ac)x_i + (bc + d).$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a} &= 2\sum_i \big(\mathrm{F}(x_i) - y_i\big) \cdot c \cdot x_i = 2c\sum_i \big((ac)x_i + (bc + d) - y_i\big) \cdot x_i \\
\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial b} &= 2\sum_i \big(\mathrm{F}(x_i) - y_i\big) \cdot c = 2c\sum_i \big((ac)x_i + (bc + d) - y_i\big) \\
\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial c} &= 2\sum_i \big(\mathrm{F}(x_i) - y_i\big) \cdot f(z_i) = 2\sum_i \big((ac)x_i + (bc + d) - y_i\big) \cdot (ax_i + b) \\
\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial d} &= 2\sum_i \big(\mathrm{F}(x_i) - y_i\big) = 2\sum_i \big((ac)x_i + (bc + d) - y_i\big)
\end{aligned}$$

© 2024-2026 G. Faccanoni

Le gradient de l'erreur s'annule ssi

$$\begin{cases} \sum_i \big((ac)x_i + (bc+d) - y_i\big) \cdot x_i = 0 \\ \sum_i \big((ac)x_i + (bc+d) - y_i\big) = 0 \\ \sum_i \big((ac)x_i + (bc+d) - y_i\big) \cdot (ax_i + b) = 0 \\ \sum_i \big((ac)x_i + (bc+d) - y_i\big) = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \sum_i \big((ac)x_i + (bc+d) - y_i\big) \cdot x_i = 0 \\ \sum_i \big((ac)x_i + (bc+d) - y_i\big) = 0 \\ a\big(\sum_i \big((ac)x_i + (bc+d) - y_i\big) \cdot x_i\big) + b\big(\sum_i \big((ac)x_i + (bc+d) - y_i\big)\big) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \sum_i \big((ac)x_i + (bc+d) - y_i\big) \cdot x_i = 0 \\ \sum_i \big((ac)x_i + (bc+d) - y_i\big) = 0 \end{cases}$$

(cette dernière réduction divise les deux premières équations par c, ce qui suppose $c \neq 0$; le cas $c = 0$, où F est constante, correspond à un autre point critique de E, mais pas au minimum global recherché ici, comme le confirmera la solution obtenue).

Notons $p = ac$ et $q = bc + d$, on cherche alors p, q (avec a et b libres), tels que

$$\begin{cases} \sum_i \big(px_i + q - y_i\big) \cdot x_i = 0 \\ \sum_i \big(px_i + q - y_i\big) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} p\sum_i x_i^2 + q\sum_i x_i = \sum_i x_i y_i \\ p\sum_i x_i + q\sum_i 1 = \sum_i y_i \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & \sum_i 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i x_i y_i \\ \sum_i y_i \end{pmatrix}$$

Autrement dit, ce système est équivalent à un problème de régression linéaire : trouver p, q tels que $\mathrm{F}(x) = px + q$ interpole au mieux les deux points.

Avec les points donnés le système devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad q = 0,\ p = 1$$

Donc toute combinaison satisfaisant $ac = 1$ et $d = -bc$ est solution. Pour une telle combinaison, $\mathrm{F}(x) = px + q = x$, qui interpole exactement les deux points d'entraînement : l'erreur minimale est donc $\mathrm{E}_{\min} = 0$, confirmant que $c = 0$ (vu plus haut) ne correspond pas au minimum global.

NB Le cas $f = g = \mathrm{id}$ correspond à un réseau de neurones purement linéaire. Dans ce cas, il est équivalent à une régression linéaire classique, et il n'y a pas d'avantage à l'utilisation d'une couche cachée. L'intérêt des réseaux apparaît lorsque f et g sont non-linéaires.