Master Informatique

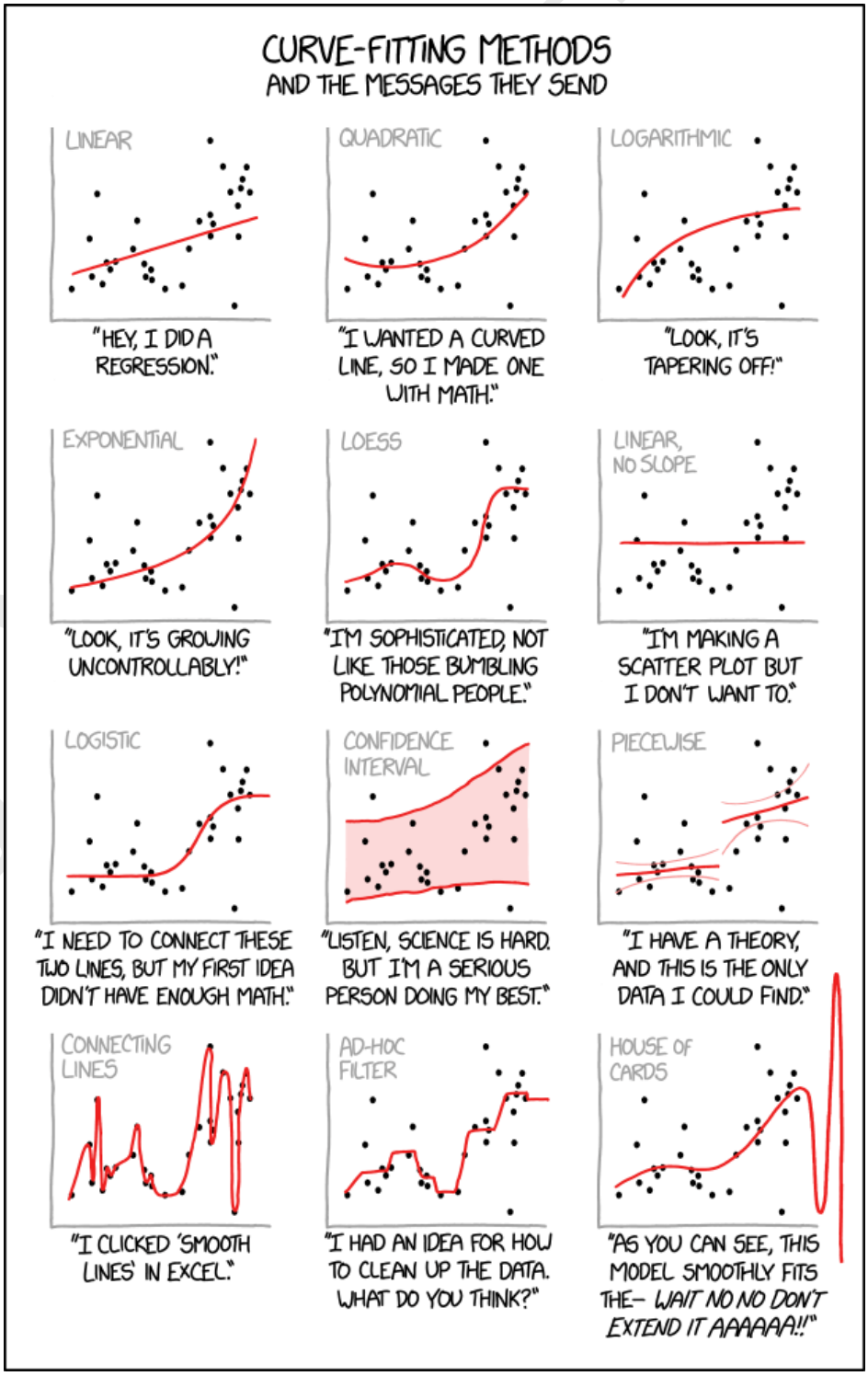
1ère année

UE 731 – Remise à niveau Mathématiques

Annales des CC par équipes

Gloria Faccanoni
http://faccanoni.univ-tln.fr

Dernière mise-à-jour : Vendredi 4 octobre 2024



UNIVERSITÉ DE TOULON

DRAFT

Gloria FACCANONI

IMATH Bâtiment M-117
Université de Toulon
Avenue de l'université
83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 83 16 66 72

✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr
ℹ http://faccanoni.univ-tln.fr

Table des matières

A.A. 2024-2025 5

1 Contrôle par équipe ① 7

2 Contrôle par équipe ② 11

3 Contrôle par équipe ③ 17

4 Contrôle par équipe ④ 25

DRAFT

DRAFT

© 2024-2025 G. Faccanoni

A.A. 2024-2025

1 Contrôle par équipe ① 7

2 Contrôle par équipe ② 11

3 Contrôle par équipe ③ 17

4 Contrôle par équipe ④ 25

DRAFT

DRAFT

CHAPITRE 1

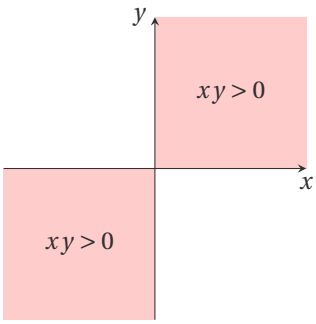
Contrôle par équipe ①

Exercice 1.1
Indiquer le domaine de définition des fonctions $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes et colorier la portion de $\mathbb{R}^2$ correspondante :

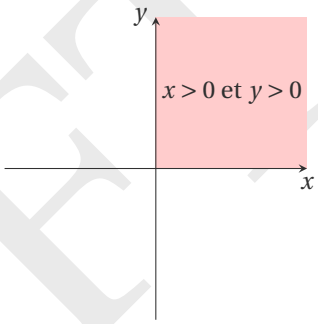
$$f(x,y) = \ln(xy) \quad \text{et} \quad g(x,y) = \ln(x) + \ln(y).$$

Correction

$\mathscr{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$



$\mathscr{D}_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$



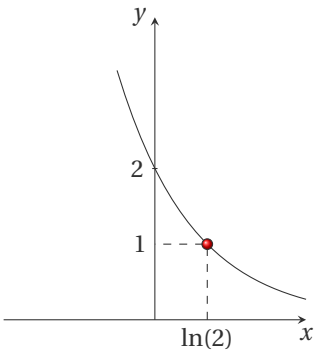
Exercice 1.2
Soit $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y+1}$. Calculer, lorsqu'il est possible, $f(2,1)$, $f(1,2)$, $f(a,a)$, $f(a+1,a)$, $f(a-1,-a)$.

Correction

$$f(2,1) = \frac{1}{4}, \qquad f(1,2) = -\frac{1}{4}, \qquad f(a,a) = 0, \qquad f(a+1,a) = \frac{1}{2(a+1)}, \qquad f(a-1,-a) \text{ n'existe pas}$$

Exercice 1.3
Soit $f(x,y) = ye^x$. Tracer la courbe de niveau qui passe par le point $(\ln(2),1)$.

Correction
$f(\ln(2),1) = 2$. La ligne de niveau $k = 2$ est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = k\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2e^{-x}\}$



DRAFT

Exercice 1.4
On dit que deux fonctions $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfont la condition de Cauchy-Riemann si $\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v, \\ \partial_y u = -\partial_x v. \end{cases}$

Parmi les couples de fonctions suivantes, indiquer lesquels satisfont cette condition :

1. $u(x,y) = x^2 - y^2$ et $v(x,y) = 2xy$
2. $u(x,y) = x^2 + y^2$ et $v(x,y) = -2xy$
3. $u(x,y) = e^x \cos(y)$ et $v(x,y) = e^x \sin(y)$

Correction

$u(x,y) = x^2 - y^2$	$\partial_x u = 2x$	$\partial_y u = -2y$	$v(x,y) = 2xy$	$\partial_x v = 2y$	$\partial_y v = 2x$	oui
$u(x,y) = x^2 + y^2$	$\partial_x u = 2x$	$\partial_y u = 2y$	$v(x,y) = -2xy$	$\partial_x v = -2y$	$\partial_y v = -2x$	non
$u(x,y) = e^x \cos(y)$	$\partial_x u = e^x \cos(y)$	$\partial_y u = -e^x \sin(y)$	$v(x,y) = e^x \sin(y)$	$\partial_x v = e^x \sin(y)$	$\partial_y v = e^x \cos(y)$	oui

Exercice 1.5
Soit $f(x,y) = 4x^3y^2$. Calculer le gradient et la matrice Hessienne de f.

Correction
Le gradient de $f(x,y)$ est

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2y^2 \\ 8x^3y \end{pmatrix}.$$

La matrice hessienne de $f(x,y)$ est

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x(12x^2y^2) & \partial_x(8x^3y) \\ \partial_y(12x^2y^2) & \partial_y(8x^3y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24xy^2 & 24x^2y \\ 24x^2y & 8x^3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.6
Soit $\mathrm{A}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\mathrm{A}(x,y) = xy$. Soit $(x_0, y_0) = (5,6)$. Estimer $\mathrm{A}(5.1, 6.5)$ par linéarisation (c'est-à-dire en utilisant le plan tangent à A en (x_0, y_0)).

Correction
La linéarisation de la fonction $\mathrm{A}(x,y)$ autour du point (x_0, y_0) est donnée par l'approximation :

$$\mathrm{A}(x,y) \simeq \mathrm{A}(x_0,y_0) + (x - x_0)\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Calculons les dérivées partielles de $\mathrm{A}(x,y) = xy$:

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}(x,y) = y \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}(x,y) = x.$$

Nous avons donc l'approximation

$$\mathrm{A}(x_0 + 0.1, y_0 + 0.5) \simeq \mathrm{A}(x_0,y_0) + 0.1 \times y_0 + 0.5 \times x_0.$$

Sachant que $\mathrm{A}(x_0,y_0) = x_0y_0 = 5 \times 6 = 30$, $\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}(x_0,y_0) = 6$ et $\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}(x_0,y_0) = 5$, cela devient

$$\mathrm{A}(5 + 0.1, 6 + 0.5) \simeq 30 + 0.1 \times 6 + 0.5 \times 5 = 30 + 0.6 + 2.5 = 33.1$$

Ainsi, par linéarisation, nous avons $\mathrm{A}(5.1, 6.5) \simeq 33.1$. Notons que $\mathrm{A}(5.1, 6.5) = 33.15$

Exercice 1.7
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction et $(0,0)$ un point critique de f. Compléter les affirmations suivantes :

1. si $\mathrm{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, alors $(0,0)$ est …
2. si $\mathrm{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, alors $(0,0)$ est …
3. si $\mathrm{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, alors $(0,0)$ est …
4. si $\mathrm{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, alors $(0,0)$ est …

DRAFT

 © 2024-2025 G. Faccanoni

Correction
On a

1. $\det(\mathrm{H}_f(0,0)) = 2\times 2 - 2^2 = 0$ donc $(0,0)$ est point critique dont on ne peut pas établir la nature,
2. $\det(\mathrm{H}_f(0,0)) = -2\times 2 - 2^2 = -8 < 0$, donc $(0,0)$ est un point selle,
3. $\det(\mathrm{H}_f(0,0)) = 3\times 2 - 2^2 = 2 > 0$ et $\partial_{xx} f(0,0) = 3 > 0$, donc $(0,0)$ est un minimum,
4. $\det(\mathrm{H}_f(0,0)) = (-3)\times(-2) - 2^2 = 2 > 0$ et $\partial_{xx} f(0,0) = -3 < 0$, donc $(0,0)$ est un maximum.

Exercice 1.8
Calculer les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + xy + y^2$ et étudier leur nature.

Correction

- Recherche des points critiques :

$$\begin{cases} \partial_x f = 0, \\ \partial_y f = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + y = 0, \\ x + 2y = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 3(-2y)^2 + y = 0, \\ x = -2y, \end{cases} \iff \begin{cases} y(12y+1) = 0, \\ x = -2y, \end{cases} \iff (x,y) \in \left\{ (0,0); \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) \right\}.$$

  On a deux points critiques : le point $(0,0)$ et le point $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$.

- Nature des points critiques :

$$\begin{aligned} \partial_{xx} f(x,y) &= 6x & \partial_{xx} f(0,0) &= 0 & \partial_{xx} f\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) &= 1 \\ \partial_{xy} f(x,y) &= 1 & \partial_{xy} f(0,0) &= 1 & \partial_{xy} f\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) &= 1 \\ \partial_{yy} f(x,y) &= 2 & \partial_{yy} f(0,0) &= 2 & \partial_{yy} f\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) &= 2 \\ \det(\mathrm{H}_f)(x,y) &= 12x - 1 & \det(\mathrm{H}_f)(0,0) &= -1 & \det(\mathrm{H}_f)\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) &= 1 \end{aligned}$$

  $(0,0)$ est un point selle, $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$ est un minimum.

Exercice 1.9
Soit $w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \cos\left(\sum_{i=1}^{n} i x_i\right)$. Calculer les dérivées partielles $\partial_{x_j} w$ pour $j = 1, \dots, n$.

Correction

$$\begin{cases} w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \cos(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n) \\ \partial_{x_1} w(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\sin(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n) \\ \partial_{x_2} w(x_1, x_2, \dots, x_n) = -2\sin(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n) \\ \qquad\vdots \\ \partial_{x_j} w(x_1, x_2, \dots, x_n) = -j\sin(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n) \\ \qquad\vdots \\ \partial_{x_n} w(x_1, x_2, \dots, x_n) = -n\sin(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n) \end{cases} \implies \partial_{x_j} w(x_1, x_2, \dots, x_n) = -j\sin\left(\sum_{i=1}^{n} i x_i\right)$$

DRAFT

DRAFT

© 2024-2025 G. Faccanoni

CHAPITRE 2

Contrôle par équipe ②

Exercice 2.1 (Bases de $\mathbb{R}_n[x]$)
Soit le polynôme $p(x) = x^2 - 3x + 2$. Écrire ses cordonnées dans les bases indiquées :

1. $\mathscr{C}_2$ base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$: $\text{coord}(p, \mathscr{C}_2) =$ .....
2. $\mathscr{C}_3$ base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$: $\text{coord}(p, \mathscr{C}_3) =$ .....
3. $\mathscr{A} = \{1, (x-1), x^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$: $\text{coord}(p, \mathscr{A}) =$ .....
4. $\mathscr{B} = \{1, (x-1), (x-1)^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$: $\text{coord}(p, \mathscr{B}) =$ .....
5. $\mathscr{D} = \{1, (x-1), (x-1)(x-2)\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$: $\text{coord}(p, \mathscr{D}) =$ .....

Correction

1. $\mathscr{C}_2 = \{1, x, x^2\}$ donc $\text{coord}(p, \mathscr{C}_2) = (2, -3, 1)$
2. $\mathscr{C}_3 = \{1, x, x^2, x^3\}$ donc $\text{coord}(p, \mathscr{C}_3) = (2, -3, 1, 0)$
3. $\text{coord}(p, \mathscr{A}) = (-1, -3, 1)$.
4. $\text{coord}(p, \mathscr{B}) = (0, -1, 1)$
   On remarque qu'il s'agit des coefficients du développement de Taylor d'ordre 2 en $x_0 = 1$:
$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$
5. $\text{coord}(p, \mathscr{D}) = (0, 0, 1)$

Exercice 2.2 (Interpolation polynomiale : base canonique)

Soit les points

x	0	2	4
y	7	11	55

Écrire dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ le polynôme p qui interpole ces points (suggestion : utiliser la méthode de Gauss pour la résolution du système linéaire). Vérifier la solution obtenue.

Correction
Soit $\mathscr{C} = \{1, x, x^2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. Soient $(a, b, c) = \text{coord}(p, \mathscr{C})$ les coordonnées de p dans la base $\mathscr{C}$. Elles sont solution du système linéaire
$$\begin{cases} a + b \times 0 + c \times 0^2 = 7 \\ a + b \times 2 + c \times 2^2 = 11 \\ a + b \times 4 + c \times 4^2 = 55 \end{cases}$$
Résolvons-le par la méthode de Gauss
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 11 \\ 1 & 4 & 16 & 55 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1]{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 16 & 48 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 40 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} c = 5 \\ b = (4 - 4c)/2 = -8 \\ a = 7 \end{cases}$$
On obtient le polynôme $p(x) = 7 - 8x + 5x^2$.

On vérifie aisément que
$$\begin{cases} p(0) = 7, \\ p(2) = 7 - 8 \times 2 + 5 \times 2^2 = 11, \\ p(4) = 7 - 8 \times 4 + 5 \times 4^2 = 55. \end{cases}$$
Vérifions les calculs avec `sympy` :

DRAFT

```python
import sympy as sp
x = sp.symbols('x')

x_vals = [0, 2, 4]
y_vals = [7, 11, 55]
n = len(x_vals)-1  # Degré du polynôme
coeffs = sp.symbols(f'a0:{n+1}')
poly = sum(coeffs[i] * x**i for i in range(n+1))

eqs = [sp.Eq(poly.subs(x, x_vals[i]),y_vals[i]) for i in range(n+1)]
print("Le système à résoudre :")
print(r"\[\begin{cases}")
for eq in eqs :
    print(sp.latex(eq),r"\\")
print(r"\end{cases}\]")

solution = sp.solve(eqs, coeffs)
p1 = poly.subs(solution)
print("Le polynome d'interpolation : " + r"$p(x) =", sp.latex(poly), "=",
 ↪  sp.latex(p1), r"$")
```

Le système à résoudre :

$$\begin{cases} a_0 = 7 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 11 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 = 55 \end{cases}$$

Le polynome d'interpolation : $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 5x^2 - 8x + 7$

Exercice 2.3 (Interpolation polynomiale composite : spline linéaire)

Soit les points

x	0	2	4
y	7	11	55

Écrire la spline linéaire qui interpole ces même points.

Correction

Une spline linéaire est une fonction affine par morceaux (*i.e.*, les points à interpoler — une fois ordonnés selon les x croissants — sont reliés par des segments). Le point $x = 1$ est compris entre les deux points d'interpolation $(0,7)$ et $(2,11)$ donc $s|_{[0;2]}(x) = \frac{11-7}{2-0}(x-0) + 7 = 2x + 7$ et $s(1) = 9$ tandis que $p(1) = 7 - 8 + 5 = 4$.

Vérifions les calculs avec `sympy` :

```python
import sympy as sp

# Définition des symboles et des valeurs d'interpolation
x = sp.symbols('x')
x_vals = [0, 2, 4]
y_vals = [7, 11, 55]

# Construction des fonctions linéaires par morceaux
splines = []
for i in range(len(x_vals) - 1):
    a, b = sp.symbols(f'a{i} b{i}')
    spline = a * x + b
    splines.append(spline)
```


© 2024-2025 G. Faccanoni

```python
# Les equations
equations = []
for i in range(len(x_vals) - 1):
    equations.append(sp.Eq(splines[i].subs(x, x_vals[i]), y_vals[i]))
    equations.append(sp.Eq(splines[i].subs(x, x_vals[i+1]), y_vals[i+1]))

# Résolution du système
params = [sp.symbols(f'a{i} b{i}') for i in range(len(x_vals) - 1)]
flattened_params = sum(params, ()) # aplatissement de la liste
solution = sp.solve(equations, flattened_params)
splines_solved = [spline.subs(solution) for spline in splines]

print(r"La spline, linéaire par morceaux, a pour équation :")
print(r"\[\begin{cases}")
for i, spline in enumerate(splines_solved):
    print(f"  {sp.latex(spline)} & \\text{{si }} x \\in [{x_vals[i]},
    ↪ {x_vals[i+1]}] \\\\")
print(r"\end{cases}\]")
```

La spline, linéaire par morceaux, a pour équation :

$$\begin{cases} 2x+7 & \text{si } x \in [0,2] \\ 22x-33 & \text{si } x \in [2,4] \end{cases}$$

Exercice 2.4 (Interpolation polynomiale : base de Lagrange)

Soit les points

x	0	2	3
y	7	11	28

Écrire dans la base de Lagrange de $\mathbb{R}_2[x]$ le polynôme p qui interpole ces points.

Correction

Soit $\mathscr{L} = \{L_0, L_1, L_2\}$ la base de Lagrange de $\mathbb{R}_2[x]$ associée aux points donnés. Les coordonnées de p dans la base $\mathscr{L}$ sont tout simplement $\text{coord}(p, \mathscr{L}) = (7, 11, 28)$. Les polynômes L_i s'écrivent

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(0-2)(0-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{6}, \qquad L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(2-0)(2-3)} = -\frac{x(x-3)}{2}, \qquad L_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(3-0)(3-2)} = \frac{x(x-2)}{3}.$$

donc $p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$.

Vérifions les calculs avec `sympy` :

```python
import sympy as sp
x = sp.symbols('x')
n = 2
p1 = sp.polys.specialpolys.interpolating_poly(n+1, x, X='x', Y='y')
p2 = sp.polys.specialpolys.interpolating_poly(n+1, x, X=[0,2,3], Y=[7,11,28])
p3 = sp.simplify(p2)

print(r"\begin{align*} p(x) &= " , sp.latex(p1) , r"\\")
print(r" &= " , sp.latex(p2) , r"\\")
print(r" &= " , sp.latex(p3) , r"\end{align*}")
```

$$p(x) = \frac{y_0\,(x-x_1)\,(x-x_2)}{(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)} + \frac{y_1\,(x-x_0)\,(x-x_2)}{(-x_0+x_1)\,(x_1-x_2)} + \frac{y_2\,(x-x_0)\,(x-x_1)}{(-x_0+x_2)\,(-x_1+x_2)}$$

$$= -\frac{11x(x-3)}{2} + \frac{28x(x-2)}{3} + \frac{7(x-3)(x-2)}{6}$$
$$= 5x^2 - 8x + 7$$

Exercice 2.5 (Interpolation polynomiale : base de Newton)

Soit les points

x	-2	1	4	-1	3	-4
y	-1	2	59	4	24	-53

- Écrire la base de Newton de $\mathbb{R}_5[x]$ associée à ces points.
- Écrire le tableau des différences divisées.
- En déduire les coordonnées du polynôme qui interpole ces points dans la base de Newton.

Correction

- La base de Newton de $\mathbb{R}_5[x]$ associée à ces points est $\mathcal{N} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ où ω_i s'écrit

$$\begin{aligned}
\omega_0(x) &= 1\\
\omega_1(x) &= x+2\\
\omega_2(x) &= (x+2)(x-1)\\
\omega_3(x) &= (x+2)(x-1)(x-4)\\
\omega_4(x) &= (x+2)(x-1)(x-4)(x+1)\\
\omega_5(x) &= (x+2)(x-1)(x-4)(x+1)(x-3)
\end{aligned}$$

- Le tableau des différences divisées est

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},\dots,x_i]$	$f[x_{i-4},\dots,x_i]$	$f[x_{i-5},\dots,x_i]$
0	-2	$\boxed{-1}$					
1	1	2	$\boxed{1}$				
2	4	59	19	$\boxed{3}$			
3	-1	4	11	4	$\boxed{1}$		
4	3	24	5	6	1	$\boxed{0}$	
5	-4	-53	11	-2	1	0	$\boxed{0}$

- $\mathrm{coord}(p,\mathcal{N}) = \{-1,1,3,1,0,0\}$ donc

$$p(x) = -1 + (x+2) + 3(x+2)(x-1) + (x+2)(x-1)(x-4)$$

qu'on peut développer comme suit (ce n'est pas demandé)

$$\begin{aligned}
&= -1 + (x+2)\Big(1 + 3(x-1) + (x-1)(x-4)\Big)\\
&= -1 + (x+2)\Big(1 + \big(3 + (x-4)\big)(x-1)\Big)\\
&= -1 + (x+2)\Big(1 + (x-1)^2\Big)
\end{aligned}$$

Vérifions les calculs avec `sympy` :

```
import sympy as sp

def ddt(xx,yy):
    n=len(yy);t=[[0]*n for _ in range(n)]
    for i in range(n): t[i][0]=yy[i]
    for j in range(1,n):
        for i in range(j,n):
            t[i][j]=(t[i][j-1]-t[i-1][j-1])/sp.S(xx[i]-xx[i-j])
    return t

def nb(x,xx,i):
```

DRAFT

 © 2024-2025 G. Faccanoni

```
    b=1
    for j in range(i):b*=sp.S(x-xx[j])
    return b

def ni(x,xx,yy):
    t=ddt(xx,yy);n=len(xx)
    p=t[0][0]
    for i in range(1,n):p+=t[i][i]*nb(x,xx,i)
    return p

def print_ddt_latex(xx,yy,t):
    n=len(t)
    s="\\[\\begin{array}{|c|c||"+"c|"*n+"}\n"
    s+="i & x_i & " + " & "*(n-2) + "\\\\\n\\hline\n"
    for i in range(n):
        r=[f"{i}",f"{xx[i]}"]
        r+=[f"\\fbox{{{sp.latex(t[i][j])}}}"if j==i else
         ↪  f"{sp.latex(t[i][j])}"if j<=i else ""for j in range(n)]
        s+=" & ".join(r)+" \\\\\n"
    return s+"\\end{array}\\]"

x=sp.symbols('x')
x_data=[-2,1,4,-1,3,-4]
y_data=[-1,2,59,4,24,-53]
t=ddt(x_data,y_data)
p=ni(x,x_data,y_data)

print("Tableau des différences divisées:")
print(print_ddt_latex(x_data,y_data,t))
base_terms = " +
 ↪  ".join([f"{sp.latex(t[i][i])}\\times\\Big({sp.latex(nb(x,x_data,i))}\\Big)"
 ↪  for i in range(1, len(x_data))])
print(f"\n\nPolynôme d'interpolation dans la base de Newton:
 ↪  $p(x)={sp.latex(t[0][0])} +
 ↪  {base_terms}={sp.latex(p)}={sp.latex(p.factor())}$")
```

Tableau des différences divisées :

$$\left[\begin{array}{c|c||c|c|c|c|c|c}
i & x_i & & & & & & \\
\hline
0 & -2 & \boxed{-1} & & & & & \\
1 & 1 & 2 & \boxed{1} & & & & \\
2 & 4 & 59 & 19 & \boxed{3} & & & \\
3 & -1 & 4 & 11 & 4 & \boxed{1} & & \\
4 & 3 & 24 & 5 & 6 & 1 & \boxed{0} & \\
5 & -4 & -53 & 11 & -2 & 1 & 0 & \boxed{0}
\end{array}\right]$$

Polynôme d'interpolation dans la base de Newton : $p(x) = -1 + 1 \times \Big(x+2\Big) + 3 \times \Big((x-1)(x+2)\Big) + 1 \times \Big((x-4)(x-1)(x+2)\Big) + 0 \times \Big((x-4)(x-1)(x+1)(x+2)\Big) + 0 \times \Big((x-4)(x-3)(x-1)(x+1)(x+2)\Big) = x + (x-4)(x-1)(x+2) + 3(x-1)(x+2) + 1 = x^3 - 2x + 3$

Exercice 2.6 (Interpolation non polynomiale)

Soit les points

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
y	5	$1+\sqrt{3}$	-1

Soit $V[x]$ l'espace vectoriel engendré par $\{\cos(x), \cos(2x), \cos(3x)\}$.
Écrire la fonction v qui interpole ces points dans la base donnée.

Correction
On cherche $v(x) = a\cos(x) + b\cos(2x) + c\cos(3x)$ tel que $v(0) = 5$, $v\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1+\sqrt{3}$ et $v\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$. On cherche donc a, b et c tels que

$$\begin{cases} a+b+c=5 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b = 1+\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - c = -1 \end{cases}$$

On obtient la fonction $v(x) = 2\cos(x) + 2\cos(2x) + \cos(3x)$.

Vérifions les calculs avec `sympy` :

```
import sympy as sp
x = sp.symbols('x')

x_vals = [0, sp.pi/6, sp.pi/3]
y_vals = [5, 1+sp.sqrt(3), -1]
coeffs = sp.symbols(f'a,b,c')
n = len(x_vals)-1
v = sum(coeffs[i] * sp.cos((i+1)*x) for i in range(n+1))

eqs = [sp.Eq(v.subs(x, x_vals[i]),y_vals[i]) for i in range(n+1)]
print("Le système à résoudre :")
print(r"\[\begin{cases}")
for eq in eqs :
    print(sp.latex(eq),r"\\")
print(r"\end{cases}\]")

solution = sp.solve(eqs, coeffs)
v1 = v.subs(solution)
print("La fonction d'interpolation est " + r"$v(x) =", sp.latex(v), "=",
 ↪  sp.latex(v1), r"$.")
```

Le système à résoudre :

$$\begin{cases} a+b+c=5 \\ \frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{b}{2} = 1+\sqrt{3} \\ \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - c = -1 \end{cases}$$

La fonction d'interpolation est $v(x) = a\cos(x) + b\cos(2x) + c\cos(3x) = 2\cos(x) + 2\cos(2x) + \cos(3x)$.

DRAFT

 © 2024-2025 G. Faccanoni

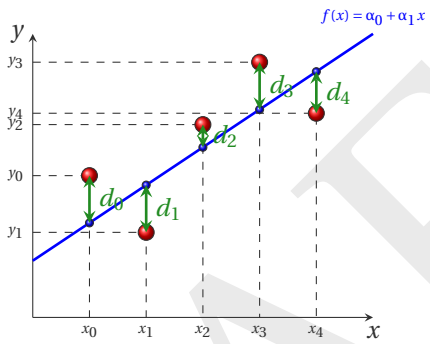
CHAPITRE 3

Contrôle par équipe ③

Exercice 3.1
Connaissant les points (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n), la fonction de meilleure approximation $y = f(x)$ par la méthode des moindres carrés est celle obtenue en minimisant …

1. $\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i)\right)$
2. $\sum_{i=1}^{n} \left|y_i - f(x_i)\right|$
3. $\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i)\right)^2$
4. $\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \left(f(x_i)\right)^2\right)$

Correction
Notons $d_i \equiv y_i - f(x_i)$ l'écart vertical du point (x_i, y_i) par rapport à la fonction f (en figure, on a choisit f affine) :



La méthode des moindres carrés est celle qui minimise *la somme des carrés de ces déviations, i.e.* minimise la quantité $\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i)\right)^2$.

DONNÉES POUR LES EXERCICES DE 2 À 5

x_i	1	20	30	40
y_i	1	400	800	1300

Exercice 3.2
Calculer la droite d'équation $y = \alpha_0 + \alpha_1 x$ de meilleur approximation des données.

Correction
Il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 3+1 & 1+20+30+40 \\ 1+20+30+40 & 1^2+20^2+30^2+40^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+400+800+1300 \\ 1\times 1+20\times 400+30\times 800+40\times 1300 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 91 \\ 91 & 2901 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2501 \\ 84001 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = -\frac{388690}{3323} \simeq -116.97$ et $\alpha_1 = \frac{108413}{3323} \simeq 32.625$.

DRAFT

```python
import sympy as sp

# Définition des données
data = [(1, 1), (20, 400), (30, 800), (40, 1300)]
x_data, y_data = zip(*data)

# Variables pour les coefficients de la droite
alpha_0, alpha_1 = sp.symbols('alpha_0 alpha_1')

# Fonction d'erreur (somme des carrés des écarts)
error = sum((y - (alpha_0 + alpha_1 * x))**2 for x, y in zip(x_data, y_data))

# Calcul des dérivées partielles et égalisation à zéro
grad_alpha_0 = sp.diff(error, alpha_0)
grad_alpha_1 = sp.diff(error, alpha_1)

# Résolution du système d'équations
solution = sp.solve((grad_alpha_0, grad_alpha_1), (alpha_0, alpha_1))

# Affichage des résultats en LaTeX
latex_output = f"Les coefficients de la droite d'ajustement sont : \n"
latex_output += f"$\\alpha_0 = {sp.latex(solution[alpha_0])}, \\quad \\alpha_1 =
↪ {sp.latex(solution[alpha_1])}$"
print(latex_output)
```

Les coefficients de la droite d'ajustement sont : $\alpha_0 = -\frac{388690}{3323}, \quad \alpha_1 = \frac{108413}{3323}$

Exercice 3.3
Calculer la droite d'équation $y = \alpha_1 x$ de meilleur approximation des données.

Correction
On peut retrouver ce résultat en considérant le fitting dans une espace vectoriel quelconque, ici l'espace engendré par $\{\Phi_0 = x\}$. Sinon, on peut reparcourir la construction suivie dans le cas générale, comme ci-dessous : on doit minimiser la fonction $\mathscr{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\mathscr{E}(\alpha_1) = \sum_{i=0}^{n} d_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_1 x_i)^2.$$

Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche d'abord les points stationnaires, *i.e.* les points α_1 qui vérifient $\mathscr{E}'(\alpha_1) = 0$. Puisque

$$\mathscr{E}'(\alpha_1) = -2 \sum_{i=0}^{n} x_i (y_i - \alpha_1 x_i)$$

alors $\mathscr{E}'(\alpha_1) = 0$ ssi

$$\sum_{i=0}^{n} x_i (y_i - \alpha_1 x_i) = 0 \iff \sum_{i=0}^{n} x_i y_i - \alpha_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 0 \iff \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) \alpha_1 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i \iff \alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}$$

Donc $\alpha_1 = \frac{1\times1+20\times400+30\times800+40\times1300}{1^2+20^2+30^2+40^2} = \frac{84001}{2901} \simeq 28.956.$

```python
import sympy as sp

# Définition des données
data = [(1, 1), (20, 400), (30, 800), (40, 1300)]
x_data, y_data = zip(*data)

# Variable pour le coefficient de la droite
alpha_1 = sp.symbols('alpha_1')
```

 © 2024-2025 G. Faccanoni

```
# Fonction d'erreur (somme des carrés des écarts)
error = sum((y - alpha_1 * x)**2 for x, y in zip(x_data, y_data))

# Calcul de la dérivée partielle et égalisation à zéro
grad_alpha_1 = sp.diff(error, alpha_1)

# Résolution de l'équation
solution = sp.solve(grad_alpha_1, alpha_1)[0]  # Prendre la première solution

# Affichage des résultats en LaTeX
latex_output = f"Le coefficient de la droite d'ajustement est : \n"
latex_output += f"$\\alpha_1 = {sp.latex(solution)}$"
print(latex_output)
```

Le coefficient de la droite d'ajustement est: $\alpha_1 = \frac{84001}{2901}$

Exercice 3.4
Calculer la parabole d'équation $y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ de meilleur approximation des données.

Correction
Il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 3+1 & 1+20+30+40 & 1^2+20^2+30^2+40^2 \\ 1+20+30+40 & 1^2+20^2+30^2+40^2 & 1^3+20^3+30^3+40^3 \\ 1^2+20^2+30^2+40^2 & 1^3+20^3+30^3+40^3 & 1^4+20^4+30^4+40^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+400+800+1300 \\ 1\times 1+20\times 400+30\times 800+40\times 1300 \\ 1\times 1+20^2\times 400+30^2\times 800+40^2\times 1300 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 91 & 2901 \\ 91 & 2901 & 99001 \\ 2901 & 99001 & 3530001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2501 \\ 84001 \\ 2960001 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 \simeq -9.129$, $\alpha_1 \simeq 8.629$ et $\alpha_2 \simeq 0.604$.

Nous allons voir deux façons de résoudre ce problème avec SymPy. Dans le premier cas, nous résolvons explicitement le système d'équations linéaires. Dans le second cas, nous calculons directement le point critique de l'erreur (le minimum de l'erreur quadratique) en utilisant les dérivées partielles.

```
import sympy as sp

# Définir les symboles pour les inconnues
alpha_0, alpha_1, alpha_2 = sp.symbols('alpha_0 alpha_1 alpha_2')

# Matrice des coefficients
A = sp.Matrix([
    [4, 91, 2901],
    [91, 2901, 99001],
    [2901, 99001, 3530001]
])

# Vecteur du côté droit
b = sp.Matrix([2501, 84001, 2960001])

# Résolution du système A * alpha = b
solutions = list(sp.linsolve((A, b), [alpha_0, alpha_1, alpha_2]))[0]

# Affichage des résultats en LaTeX
```

```
latex_output = f"Les coefficients estimés sont : \n"
latex_output += f"$\\alpha_0={sp.latex(solutions[0])} \\approx
 ↪ {solutions[0].evalf():.3f}$, "
latex_output += f"$\\alpha_1={sp.latex(solutions[1])}  \\approx
 ↪ {solutions[1].evalf():.3f}$, "
latex_output += f"$\\alpha_2={sp.latex(solutions[2])}  \\approx
 ↪ {solutions[2].evalf():.3f}$"
print(latex_output)
```

Les coefficients estimés sont: $\alpha_0 = -\frac{17432050}{1909543} \approx -9.129$, $\alpha_1 = \frac{16478205}{1909543} \approx 8.629$, $\alpha_2 = \frac{1153388}{1909543} \approx 0.604$

```
import sympy as sp

# Définition des données
x_data = [1, 20, 30, 40]
y_data = [1, 400, 800, 1300]

# Variables pour les coefficients de la parabole
alpha_0, alpha_1, alpha_2 = sp.symbols('alpha_0 alpha_1 alpha_2')

# Fonction d'erreur (somme des carrés des écarts)
error = sum((y_data[i] - (alpha_0 + alpha_1 * x_data[i] + alpha_2 *
 ↪  x_data[i]**2))**2 for i in range(len(x_data)))

# Calcul des dérivées partielles
grad_alpha_0 = sp.diff(error, alpha_0)
grad_alpha_1 = sp.diff(error, alpha_1)
grad_alpha_2 = sp.diff(error, alpha_2)

# Résolution du système d'équations
solution = sp.solve((grad_alpha_0, grad_alpha_1, grad_alpha_2), (alpha_0,
 ↪  alpha_1, alpha_2))

# Affichage des résultats en LaTeX
latex_output = f"Les coefficients estimés sont : \n"
latex_output += f"$\\alpha_0={sp.latex(solutions[0])} \\approx
 ↪ {solutions[0].evalf():.3f}$, "
latex_output += f"$\\alpha_1={sp.latex(solutions[1])}  \\approx
 ↪ {solutions[1].evalf():.3f}$, "
latex_output += f"$\\alpha_2={sp.latex(solutions[2])}  \\approx
 ↪ {solutions[2].evalf():.3f}$"
print(latex_output)
```

Les coefficients estimés sont: $\alpha_0 = -\frac{17432050}{1909543} \approx -9.129$, $\alpha_1 = \frac{16478205}{1909543} \approx 8.629$, $\alpha_2 = \frac{1153388}{1909543} \approx 0.604$

Exercice 3.5
Calculer le polynôme de degré 3 d'équation $y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$ de meilleur approximation des données.

Correction
Le polynôme de degré au plus 3 de meilleur approximation d'un ensemble de 4 points n'est rien d'autre que le polynôme d'interpolation qu'on peut écrire par exemple dans la base de Lagrange:

$$y = 1\frac{(x-20)(x-30)(x-40)}{(1-20)(1-30)(1-40)} + 400\frac{(x-1)(x-30)(x-40)}{(20-1)(20-30)(20-40)} + 800\frac{(x-1)(x-20)(x-40)}{(30-1)(30-20)(30-40)} + 1300\frac{(x-1)(x-20)(x-30)}{(40-1)(40-20)(40-30)}$$

 © 2024-2025 G. Faccanoni

```
import sympy as sp
x = sp.symbols('x')
n = 3
p1 = sp.polys.specialpolys.interpolating_poly(n+1, x, X='x', Y='y')
p2 = sp.polys.specialpolys.interpolating_poly(n+1, x, X=[1,20,30,40],
 ↪  Y=[1,400,800,1300])
p3 = sp.simplify(p2)

print(r"\begin{align*} p(x) &= " , sp.latex(p1) , r"\\")
print(r" &= " , sp.latex(p2) , r"\\")
print(r" &= " , sp.latex(p3) , r"\end{align*}")
```

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \frac{y_0\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)}{(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)\,(x_0-x_3)} + \frac{y_1\,(x-x_0)\,(x-x_2)\,(x-x_3)}{(-x_0+x_1)\,(x_1-x_2)\,(x_1-x_3)} + \frac{y_2\,(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_3)}{(-x_0+x_2)\,(-x_1+x_2)\,(x_2-x_3)} + \frac{y_3\,(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)}{(-x_0+x_3)\,(-x_1+x_3)\,(-x_2+x_3)} \\
&= -\frac{(x-40)\,(x-30)\,(x-20)}{21489} + \frac{2\,(x-40)\,(x-30)\,(x-1)}{19} - \frac{8\,(x-40)\,(x-20)\,(x-1)}{29} + \frac{(x-30)\,(x-20)\,(x-1)}{6} \\
&= -\frac{3x^3}{754} + \frac{647x^2}{754} + \frac{135x}{29} - \frac{1700}{377}
\end{aligned}
$$

DONNÉES POUR LES EXERCICES 6 ET 7

t_i	1	2	3	4	5	6
P_i	7.2	9.6	12.9	17.1	23.2	31.4

Exercice 3.6
Un modèle qui décrit l'évolution de la population en fonction du temps est $P(t) = ce^{rt}$. Estimer c et r à partir des données. Modifier les données pour utiliser une régression linéaire. (Le temps t_i est mesuré en décennies et la population $P_i = P(t_i)$ en millions.)

Correction
Si on calcule le logarithme de cette fonction on trouve $\ln(P) = \ln(c) + rt$. On peut alors calculer la droite de meilleur approximation sur l'ensemble $\{(1,\ln(7.2)),(2,\ln(9.6)),(3,\ln(12.9)),(4,\ln(17.1)),(5,\ln(23.2)),(6,\ln(31.4))\}$ et obtenir ainsi r et $\ln(c)$. Notons $\alpha_0 = \ln(c)$ et $\alpha_1 = r$, il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$
\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \ln(y_i) \\ \sum_{i=0}^n x_i \ln(y_i) \end{pmatrix} \implies
$$

$$
\begin{pmatrix} 5+1 & 1+2+3+4+5+6 \\ 1+2+3+4+5+6 & 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} \ln(7.2)+\ln(9.6)+\ln(12.9)+\ln(17.1)+\ln(23.2)+\ln(31.4) \\ 1\times\ln(7.2)+2\times\ln(9.6)+3\times\ln(12.9)+4\times\ln(17.1)+5\times\ln(23.2)+6\times\ln(31.4) \end{pmatrix}
$$

$$
\implies \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 21 & 91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 16.22311007 \\ 61.92721176 \end{pmatrix}
$$

Donc $\alpha_0 \simeq 1.67459$ et $\alpha_1 \simeq 0.29408$ et enfin $c = e^{\alpha_0}$ et $r = \alpha_1$.

```
import sympy as sp
alpha, r = sp.symbols('alpha r')

t_data = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
P_data = [72/sp.S(10), 96/sp.S(10), 129/sp.S(10), 171/sp.S(10), 232/sp.S(10),
 ↪  314/sp.S(10)]

ln_P_data = [sp.log(p) for p in P_data]
```

```
# Fonction d'erreur (somme des carrés des écarts)
error = sum((ln_P_data[i] - (alpha + r * t_data[i]))**2 for i in
 ↪  range(len(t_data)))

# Calcul des dérivées partielles
grad_alpha = sp.diff(error, alpha)
grad_r = sp.diff(error, r)

# Résolution du système d'équations
solution = sp.solve((grad_alpha, grad_r), (alpha, r))

# Affichage des résultats en LaTeX
latex_output = f"Les coefficients estimés sont : \n"
latex_output += f"$\\ln(c) \\approx {solution[alpha].evalf():.3f}$, $r \\approx
 ↪  {solution[r].evalf():.3f}$."
print(latex_output)
```

Les coefficients estimés sont: $\ln(c) \approx 1.675$, $r \approx 0.294$.

Exercice 3.7
Un modèle qui décrit l'évolution de la population en fonction du temps est $\mathrm{P}(t) = 5.3e^{rt}$. Estimer r à partir des données. Attention, il n'y a pas de formule toute prête dans le cours, il faut réfléchir!

Correction
Si on calcule le logarithme de cette fonction on trouve $\ln(\mathrm{P}) = \ln(5.3) + rt$.

On doit minimiser la fonction $\mathscr{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\mathscr{E}(r) = \sum_{i=0}^{n} d_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (\ln(\mathrm{P}_i) - \ln(5.3) - r\,t_i)^2 = \sum_{i=0}^{n} \left(\ln\left(\frac{\mathrm{P}_i}{5.3}\right) - r\,t_i\right)^2.$$

Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche d'abord les points stationnaires, *i.e.* les points r qui vérifient $\mathscr{E}'(r) = 0$. Puisque

$$\mathscr{E}'(r) = -2\sum_{i=0}^{n} t_i \left(\ln\left(\frac{\mathrm{P}_i}{5.3}\right) - r\,t_i\right)$$

alors $\mathscr{E}'(r) = 0$ ssi

$$\sum_{i=0}^{n} t_i \left(\ln\left(\frac{\mathrm{P}_i}{5.3}\right) - r\,t_i\right) = 0 \iff \sum_{i=0}^{n} t_i \ln\left(\frac{\mathrm{P}_i}{5.3}\right) - r\sum_{i=0}^{n} t_i^2 = 0 \iff r = \frac{\sum_{i=0}^{n} t_i \ln\left(\frac{\mathrm{P}_i}{5.3}\right)}{\sum_{i=0}^{n} t_i^2}$$

Donc $r \simeq 0.296$

```
import sympy as sp
r = sp.symbols('r')

t_data = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
P_data = [72/sp.S(10), 96/sp.S(10), 129/sp.S(10), 171/sp.S(10), 232/sp.S(10),
 ↪  314/sp.S(10)] # Données en millions

# Fonction d'erreur (somme des carrés des écarts)
error = sum( (sp.log(p/5.3) - r * t)**2 for t,p in zip(t_data,P_data))

# Calcul de la dérivée par rapport à r
grad_r = sp.diff(error, r)

# Résolution de l'équation
solution = sp.solve(grad_r, r)

latex_output = f"Le coefficient estimé est : \n"
latex_output += f"$r \\approx {solution[0].evalf():.3f}$\n"
```


© 2024-2025 G. Faccanoni

```
print(latex_output)
```

Le coefficient estimé est : $r \approx 0.296$

DRAFT

DRAFT

© 2024-2025 G. Faccanoni

CHAPITRE 4

Contrôle par équipe ④

Exercice 4.1
36 personnes sont interrogées sur le nombre de pièces dans leur logement. Les 36 réponses obtenues sont résumé dans la série statistique suivante :

$$[1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,3,3,3,4,4,4,4,4,4,5,5,5,6,6,6].$$

1. Donner la distribution statistique associée à cette série (effectifs n_i et fréquences f_i).
2. Déterminer la moyenne, le mode, la médiane, la variance et l'écart type.

Correction

1. Distribution statistique et fréquences relatives :

Nombre de pièces (α_i)	Effectif (n_i)	Fréquence (f_i)
1	5	5/36
2	11	11/36
3	8	8/36
4	6	6/36
5	3	3/36
6	3	3/36
	$\sum_i n_i = 36$	$\sum_i f_i = 1$

2. Moyenne, mode, médiane et variance
   - **Moyenne** : $\mu = 3.0$
   - **Mode** : 2 (fréquence la plus élevée)
   - **Médiane** : 3.0 (car, après les avoir classées en ordre croissant, la 18ème et la 19ème valeur sont égales à 3)
   - **Variance** : $\mathrm{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{36}(x_i - \mu)^2 = 2.11111$
   - **Écart type** : $s(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathrm{V}(\mathbf{x})} = 1.45297$

Exercice 4.2
Étant donnée la série de données quantitatives discrètes

$$\mathbf{x} = [3,5,1,1,0,2,8,2,3,x]$$

avec $x \in \mathbb{R}$, trouver au moins une valeur à attribuer à x pour que

1. la moyenne arithmétique soit $\bar{\mathbf{x}} = 3$;
2. le mode soit $\tilde{\mathbf{x}} = 2$;
3. la médiane soit $\hat{\mathbf{x}} = 2.5$;
4. la médiane soit inférieure à la moyenne arithmétique $\hat{\mathbf{x}} < \bar{\mathbf{x}}$.

Correction
La série $\mathbf{x}$ contient $n = 10$ éléments. On notera $\mathbf{y}$ la suite constituée des éléments de $\mathbf{x}$ sans l'élément inconnu x, triée par ordre croissant :

$$\mathbf{y} = [0,1,1,2,2,3,3,5,8].$$

On a $\sum_{i=1}^{n-1} y_i = 25$.

DRAFT

1. **Moyenne:**
   Pour que la moyenne arithmétique soit égale à 3, il faut que $x = 5$, car l'équation suivante doit être vérifiée:
$$\frac{1}{n}\left(x + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = 3.$$
2. **Mode:**
   Le couples (α_i, n_i) pour les éléments de $\mathbf{y}$ sont
$$[(0,1),(1,2),(2,2),(3,2),(5,1),(8,1)]$$
   Les éléments 1, 2 et 3 apparaissent chacun 2 fois. Pour que 2 devienne le mode, il faut attribuer à x la valeur 2.
3. **Médiane:**
$$\begin{cases} \frac{2+3}{2} = 2.5 & \text{si } x \geq 3, \\ 2 & \text{si } x \leq 2, \\ \frac{2+x}{2} & \text{si } 2 < x < 3. \end{cases}$$
4. **Médiane inférieure à la moyenne:**
   La moyenne vaut $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\left(x + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = \frac{x}{10} + 2.5$ donc
   - si $x \geq 3$ on a $\bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} = \frac{x}{10} + 2.5 - 2.5 = \frac{x}{10} > 0$;
   - si $x \leq 2$ on a $\bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} = \frac{x}{10} + 2.5 - 2 = \frac{x}{10} + 0.5 > 0$ ssi $x > -5$;
   - si $2 < x < 3$ on a $\bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} = \frac{x}{10} + 2.5 - 1 - \frac{x}{2} > 0$ ssi $x < \frac{15}{4}$ donc pour tout $x \in]2;3[$.

   En conclusion, l'inégalité est satisfaite pour tout $x > -5$.

Exercice 4.3
Une série statistique est définie partiellement dans le tableau ci-dessous.

x_k :	2	3	4	5	6
y_k :	26	y_1	y_2	y_3	45

On sait aussi que l'équation de la droite de régression de y en fonction de x est
$$y = \frac{18}{5} + \frac{23}{5}x = 3.6 + 4.6x.$$

1. En déduire $\bar{\mathbf{x}}$ et $\bar{\mathbf{y}}$.
2. Si toutes les valeurs de x augmentent de 3, quelle est l'équation de la nouvelle droite de régression de y en fonction de x?
3. Si toutes les valeurs de y augmentent de 3, quelle est l'équation de la nouvelle droite de régression de y en fonction de x?

Correction

1. On a $n = 5$ ainsi
$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = 4.$$
   On sait que le point $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ appartient à la droite de régression qui a pour équation $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ avec $\gamma_0 = \frac{18}{5}$ et $\gamma_1 = \frac{23}{5}$, donc
$$\bar{\mathbf{y}} = \gamma_0 + \gamma_1 \bar{\mathbf{x}} = 22.$$
2. Si toutes les valeurs de x augmentent de 3, alors
   - la moyenne $\bar{\mathbf{x}}_{\text{new}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k + 3) = \bar{\mathbf{x}}_{\text{old}} + 3$ augmente de 3,
   - la variance $\mathrm{V}(\mathbf{x}_{\text{new}}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}((x_k+3) - \bar{\mathbf{x}}_{\text{new}})^2 = \mathrm{V}(\mathbf{x}_{\text{old}})$ ne change pas,
   - la covariance $\mathrm{C}(\mathbf{x}_{\text{new}}, \mathbf{y}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}((x_k+3) - \bar{\mathbf{x}}_{\text{new}})(y_k - \bar{\mathbf{y}}) = \mathrm{C}(\mathbf{x}_{\text{old}}, \mathbf{y})$ ne change pas,
   - la pente $(\gamma_1)_{\text{new}}$ de la nouvelle droite de régression ne change pas non plus car
$$(\gamma_1)_{\text{new}} = \frac{\mathrm{C}(\mathbf{x}_{\text{new}}, \mathbf{y})}{\mathrm{V}(\mathbf{x}_{\text{new}})} = \frac{\mathrm{C}(\mathbf{x}_{\text{old}}, \mathbf{y})}{\mathrm{V}(\mathbf{x}_{\text{old}})} = \gamma_1 = \frac{23}{5};$$

© 2024-2025 G. Faccanoni

- comme la moyenne $\bar{\mathbf{x}}_{\text{new}}$ a changé, alors la nouvelle ordonnée à l'origine est

$$(\gamma_0)_{\text{new}} = \bar{\mathbf{y}} - \gamma_1 \bar{\mathbf{x}}_{\text{new}} = \gamma_0 + \gamma_1 \bar{\mathbf{x}}_{\text{old}} - \gamma_1 \bar{\mathbf{x}}_{\text{new}} = \gamma_0 - 3\gamma_1.$$

En conclusion, l'équation de la nouvelle droite de régression de y en fonction de x est

$$y = (\gamma_0)_{\text{new}} + (\gamma_1)_{\text{new}} x = -\frac{51}{5} + \frac{23}{5} x = -10.2 + 4.6x.$$

On aurait pu l'obtenir directement en observant que, si toutes les valeurs de x augmentent de 3, alors la droite est translatée vers la droite de 3, autrement dit

$$y = \gamma_0 + \gamma_1 (x-3) = \underbrace{(\gamma_0 - 3\gamma_1)}_{(\gamma_0)_{\text{new}}} + \underbrace{\gamma_1}_{(\gamma_1)_{\text{new}}} x.$$

3. De la même manière, si toutes les valeurs de y augmentent de 3, alors
   - la moyenne $\bar{\mathbf{y}}_{\text{new}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(y_k+3) = \bar{\mathbf{y}}_{\text{old}} + 3$ augmente de 3,
   - la covariance $\mathrm{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{\text{new}}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{\mathbf{x}})((y_k+3) - \bar{\mathbf{y}}_{\text{new}}) = \mathrm{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{\text{old}})$ ne change pas,
   - la pente $(\gamma_1)_{\text{new}}$ de la nouvelle droite de régression ne change pas non plus car

$$(\gamma_1)_{\text{new}} = \frac{\mathrm{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{\text{new}})}{\mathrm{V}(\mathbf{x})} = \frac{\mathrm{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{\text{old}})}{\mathrm{V}(\mathbf{x})} = \gamma_1 = \frac{23}{5};$$

   - comme la moyenne $\bar{\mathbf{y}}_{\text{new}}$ a changé, alors la nouvelle ordonnée à l'origine est

$$(\gamma_0)_{\text{new}} = \bar{\mathbf{y}}_{\text{new}} - \gamma_1 \bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{y}}_{\text{old}} + 3) - (\bar{\mathbf{y}}_{\text{old}} - \gamma_0) = \gamma_0 + 3.$$

En conclusion, l'équation de la nouvelle droite de régression de y en fonction de x est

$$y = (\gamma_0)_{\text{new}} + (\gamma_1)_{\text{new}} x = \frac{33}{5} + \frac{23}{5} x = 6.6 + 4.6x.$$

On aurait pu l'obtenir directement en observant que, si toutes les valeurs de y augmentent de 3, alors la droite est translatée vers le haut de 3, autrement dit

$$y = (\gamma_0 + \gamma_1 x) + 3 = \underbrace{(\gamma_0 + 3)}_{(\gamma_0)_{\text{new}}} + \underbrace{\gamma_1}_{(\gamma_1)_{\text{new}}} x.$$

Exercice 4.4 (Distribution statistique bivariée)
On considère les données suivantes :

$$\{(x_i, y_i)\} = [(1,2), (2,2), (2,2), (2,3), (2,3), (1,3)].$$

Compléter les tableaux/valeurs/graphique suivants directement sur cette feuille.

1. Tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$:

$\mathscr{A}$ \ $\mathscr{B}$	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$
$\alpha_1 = 1$ $\alpha_2 = 2$	$n_{1,1} =$ $n_{2,1} =$	$n_{1,2} =$ $n_{2,2} =$

2. Tableau des fréquences :

$\mathscr{A}$ \ $\mathscr{B}$	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	Fréquence marginale de α_i
$\alpha_1 = 1$ $\alpha_2 = 2$	$f_{1,1} =$ $f_{2,1} =$	$f_{1,2} =$ $f_{2,2} =$	$f_{1,\cdot} =$ $f_{2,\cdot} =$
Fréquence marginale de β_j	$f_{\cdot,1} =$	$f_{\cdot,2} =$	1

3. Tableau des profiles…

DRAFT

Profiles en colonne $f_{i\|j}$		
$\mathscr{A}$ \ $\mathscr{B}$	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$
$\alpha_1 = 1$	$f_{1\|1} =$	$f_{1\|2} =$
$\alpha_2 = 2$	$f_{2\|1} =$	$f_{2\|2} =$
	1	1

Profiles en ligne $f_{j\|i}$			
$\mathscr{A}$ \ $\mathscr{B}$	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	
$\alpha_1 = 1$	$f_{1\|1} =$	$f_{1\|2} =$	1
$\alpha_2 = 2$	$f_{2\|1} =$	$f_{2\|2} =$	1

4. Calculer les moyennes, variances et covariances indiquées :

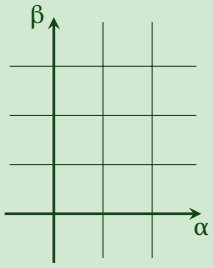
$\bar{\mathbf{x}} =$ $\quad$ $V(\mathbf{x}) =$ $\quad$ $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =$

$\bar{\mathbf{y}} =$ $\quad$ $V(\mathbf{y}) =$ $\quad$ $C(\mathbf{y}, \mathbf{x}) =$

5. Calculer la droite de régression de $\mathbf{y} = \gamma_0 + \gamma_1 x$ et le coefficient de corrélation :

$\gamma_1 =$ $\quad$ $\gamma_0 =$ $\quad$ $r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =$

6. Représenter la distribution conjointe sur un plan comme un nuage de points (chaque point avec son poids). Représenter aussi le point $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ et la droite de régression.



Correction

1. Tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$:

$\mathscr{A}$ \ $\mathscr{B}$	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$
$\alpha_1 = 1$	$n_{1,1} = 1$	$n_{1,2} = 1$
$\alpha_2 = 2$	$n_{2,1} = 2$	$n_{2,2} = 2$

2. Tableau des fréquences :

$\mathscr{A}$ \ $\mathscr{B}$	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	Fréquence marginale de α_i
$\alpha_1 = 1$	$f_{1,1} = \frac{1}{6}$	$f_{1,2} = \frac{1}{6}$	$f_{1,\cdot} = \frac{1}{3}$
$\alpha_2 = 2$	$f_{2,1} = \frac{1}{3}$	$f_{2,2} = \frac{1}{3}$	$f_{2,\cdot} = \frac{2}{3}$
Fréquence marginale de β_j	$f_{\cdot,1} = \frac{1}{2}$	$f_{\cdot,2} = \frac{1}{2}$	1

© 2024-2025 G. Faccanoni

3. Tableau des profiles en colonne $f_{i|j}$:

Profiles en colonne $f_{i\|j}$		
$\mathscr{A}$ \ $\mathscr{B}$	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$
$\alpha_1 = 1$	$f_{1\|1} = \frac{1}{3}$	$f_{1\|2} = \frac{1}{3}$
$\alpha_2 = 2$	$f_{2\|1} = \frac{2}{3}$	$f_{2\|2} = \frac{2}{3}$
	1	1

4. Tableau des profiles en ligne $f_{j|i}$:

Profiles en ligne $f_{j\|i}$			
$\mathscr{A}$ \ $\mathscr{B}$	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	
$\alpha_1 = 1$	$f_{1\|1} = \frac{1}{2}$	$f_{1\|2} = \frac{1}{2}$	1
$\alpha_2 = 2$	$f_{2\|1} = \frac{1}{2}$	$f_{2\|2} = \frac{1}{2}$	1

5. Calcule des moyennes, variances et covariances :

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_{i,.}\alpha_i = \frac{5}{3}$$
$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q} n_{.,j}\beta_j = \frac{5}{2}$$
$$\mathrm{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_{i,.}\alpha_i^2 - \bar{\mathbf{x}}^2 = \frac{2}{9}$$
$$\mathrm{V}(\mathbf{y}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q} n_{.,j}\beta_j^2 - \bar{\mathbf{y}}^2 = \frac{1}{4}$$
$$\mathrm{C}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{i,j}\alpha_i\beta_j - \bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}} = 0$$
$$\mathrm{C}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \mathrm{C}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

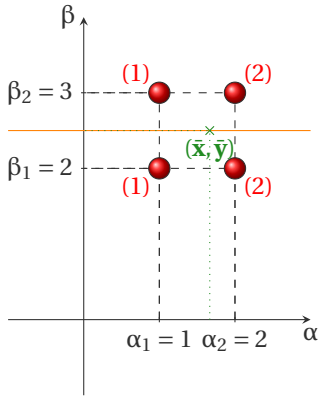
6. Calcule de la droite de régression de $\mathbf{y}$ par rapport à $\mathbf{x}$ et du coefficient de corrélation r :

$$\gamma_1 = \frac{\mathrm{C}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\mathrm{V}(\mathbf{x})} = 0$$
$$\gamma_0 = \bar{\mathbf{y}} - \gamma_1\bar{\mathbf{x}} = \frac{5}{2}$$
$$r(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\mathrm{C}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{\mathrm{V}(\mathbf{x})\mathrm{V}(\mathbf{y})}} = 0$$

La droite cherchée a donc pour équation $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ et le coefficient de corrélation est r.

7. On peut représenter la distribution conjointe sur un plan comme un nuage de points : chaque point correspond à un couple (α_i, β_j) affecté de son poids $n_{i,j}$, autrement dit chaque point correspond à une observation (x_k, y_k) et à coté on indique combien de fois cette observation apparaît. Il y aura donc $p \times q$ points (autant que de cases que dans le tableau de contingence), chaque point se trouvant sur un coin de la grille de coordonnées (α_i, β_j).

DRAFT



DRAFT

 © 2024-2025 G. Faccanoni