Instructions

M1-INFO — UE 731 Remise à niveau - Mathématiques — 7 octobre 2024 Durée : 2h

Sélectionnez les quatre derniers chiffres de votre numéro d'étudiant (par ex., si le numéro est 2200**2681**, cochez 2 sur la première ligne, 6 sur la deuxième, etc.) :

NOM	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Prénom	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- Une feuille A4 recto-verso manuscrite et une calculatrice sont autorisées. Tout autre document est interdit.
- Veuillez **noircir complètement les cases**.
- Il existe trois types de questions :
  - **Questions à choix unique.**
    Choisissez une seule réponse parmi celles proposées. Des points négatifs seront attribués pour une réponse incorrecte.
  - **Questions ouvertes.**
    Répondez en remplissant un tableau. La correction sera effectuée manuellement.
  - **Questions numériques.**
    La réponse est une valeur numérique à coder. Cochez **exactement un chiffre par ligne.**
    - Exemple d'une question où la réponse est un entier :

$+27 \rightsquigarrow$

■ (+)	0	1	■ (2)	3	4	5	6	7	8	9	← Dizaines
−	0	1	2	3	4	5	6	■ (7)	8	9	← Unités

    - Exemple d'une question où la réponse est un nombre décimal :

$-5.9 \rightsquigarrow$

	0	1	2	3	4	■ (5)	6	7	8	9	← Unités
+	.										
■ (−)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	■ (9)	← Dixièmes

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Fonctions de deux variables ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

1 On se donne la fonction

$$f(x,y)=\sqrt{\left(10^{-1}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)^2+10^5}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $xy=10^s$. Que vaut s?

☐ +
■ − ☐ 0 ☐ 1 ■ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication :

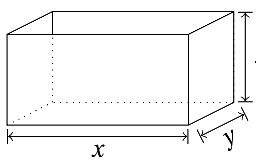
$$f(x,y)=\sqrt{\left(10^{-1}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)^2+10^5}$$

$$\partial_x f(x,y)=\frac{2\left(10^{-1}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)10^{-1}}{2\sqrt{\left(10^{-1}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)^2+10^5}}=0 \qquad \text{ssi} \quad \left(10^{-1}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)=0$$

$$\partial_y f(x,y)=\frac{2\left(10^{-1}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)\frac{-10^{-3}}{y^2}}{2\sqrt{\left(10^{-1}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)^2+10^5}} \qquad \text{ssi} \quad \left(10^{-1}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)=0$$

Donc $xy=\frac{10^{-3}}{10^{-1}}=10^{-2}$.

2 Une boîte *ouverte* a la forme d'un parallélépipède. On cherche les valeurs $x,y,z\in\mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V fixé égale à 4 cm^3. On doit donc minimiser la fonction $S(x,y,z)=xy+2xz+2yz$ sachant que $xyz=4$. Que vaut S dans son minimum (en cm^2)?



☐ 0 ■ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9
☐ 0 ☐ 1 ■ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication : On a $x,y,z>0$. On pose $\sigma(x,y)=S\left(x,y,\frac{4}{xy}\right)=xy+\frac{8}{y}+\frac{8}{x}$.
Calcul des points critiques:

$$\nabla\sigma(x,y)=\begin{pmatrix}y-\frac{8}{x^2}\\ x-\frac{8}{y^2}\end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\sigma(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff(x,y)=(2,2).$$

Il existe un seul point critique qui est $(2,2)$.
Nature des points critiques:

$$H_\sigma(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{16}{x^3} & 1\\ 1 & \frac{16}{y^3}\end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad H_\sigma(2,2)=\begin{pmatrix}2>0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det H_\sigma(2,2)>0.$$

On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a $S\left(2,2,\frac{4}{4}\right)=\sigma(2,2)=12$.

3 Soit la fonction $f(x,y)=e^{10x^5-y^2}$. Parmi les réponses suivantes, laquelle est égale à $\partial_x f$?

☐ $50xe^{10x^5-y^2}$ ☐ $50e^{10x^5-y^2}$ ☐ $-2ye^{10x^5-y^2}$ ☐ $10e^{10x^5-y^2}$ ■ $50x^4e^{10x^5-y^2}$ ☐ Autre

Explication : $f(x,y)=e^{bx^c-ay^d}$ donc la dérivée par rapport à x est $bcx^{c-1}e^{bx^c-ay^d}$.

4 Soient $f(x,y) = 6x + 13y$, $x(u,v) = uv$ et $y(u,v) = u + v$. On définit $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$. Calculer $\partial_u g$.

■ $6v + 13$ ☐ $6v$ ☐ $6u + 13$ ☐ 6 ☐ $13u$ ☐ Autre:

Explication : $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$.

5 Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que (x_0, y_0) est un point critique et que la matrice Hessienne évaluée en ce point est

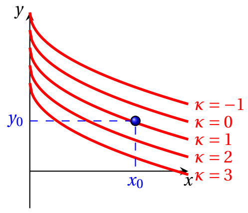
$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

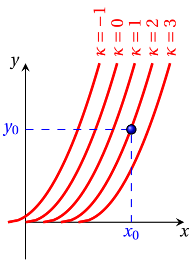
Quelle est la nature du point critique ?

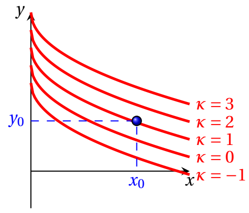
☐ c'est un point selle
☐ c'est un minimum
☐ c'est un maximum
■ la matrice Hessienne ne permet pas de conclure

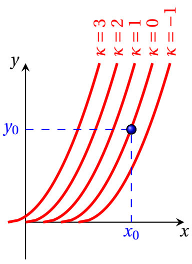
Explication : Puisque le déterminant de la matrice Hessienne est nul, on ne peut pas conclure sur la nature du point critique.

6 Parmi les graphes ci-dessous, lequel pourrait représenter les lignes de niveau d'une fonction $f(x,y)$ telle que $\partial_x f(x_0, y_0) < 0$ et $\partial_y f(x_0, y_0) < 0$?

■ 

☐ 

☐ 

☐ 

Explication : Comme $\partial_x f(x_0, y_0) \le 0$, la fonction $h(x) = f(x, y_0)$ est décroissante. Puisque $\partial_y f(x_0, y_0) \le 0$, la fonction $g(y) = f(x_0, y)$ est décroissante.

7 Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^2 + xy + y$. Calculer l'équation du plan tangent à f en $(-3, 3)$.

☐ $-3x - 6$
☐ $-3x - 2y - 3$
☐ $x^2 + xy - 3x - y - 3$
☐ $-3x - 2y + 3$
■ $-3x - 2y$
☐ Autre:

Explication : $f(x,y) \simeq f(x_0,y_0) + (x - x_0)\partial_x f(x_0,y_0) + (y - y_0)\partial_y f(x_0,y_0)$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Interpolation ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

8 Soit $f : [1;17] \to \mathbb{R}$ la **spline linéaire** qui interpole les points $f(1) = -22$, $f(8) = 13$, $f(13) = -37$, $f(17) = -45$. Que vaut $f(11)$?

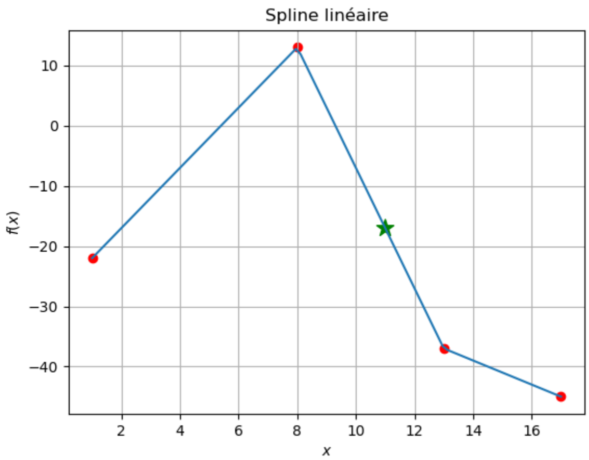
+ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La spline linéaire $f : [1;17] \to \mathbb{R}$ a pour équation :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{13-(-22)}{8-1}(x-1)+(-22) & \text{si } 1 \le x \le 8 \\ \frac{-37-(13)}{13-8}(x-8)+(13) & \text{si } 8 \le x \le 13 \\ \frac{-45-(-37)}{17-13}(x-13)+(-37) & \text{si } 13 \le x \le 17 \end{cases}$$

En substituant $x = 11$, on trouve :

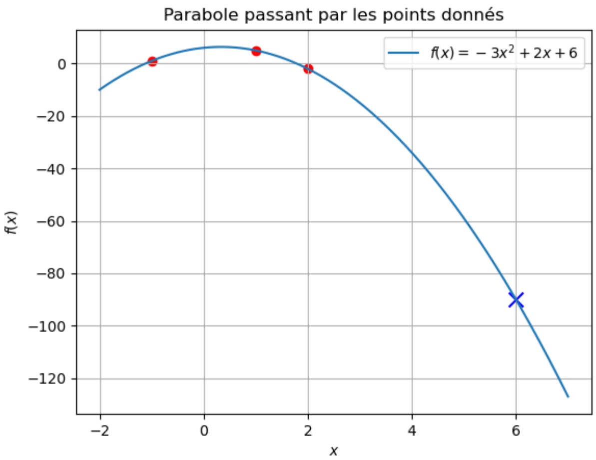
$$f(11) = -17$$



9 Soit f l'unique polynome qui interpole les points $(-1;1)$, $(1;5)$ et $(2;-2)$. Que vaut $f(6)$?

☐ +	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	■ 9
■ −	■ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

Explication : Le seul polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui passe par les trois points est la parabole d'équation $-3x^2+2x+6 = \frac{(x-2)(x-1)}{6} - \frac{5(x-2)(x+1)}{2} - \frac{2(x-1)(x+1)}{3}$. Pour la calculer l'équation de ce polynome on peut utiliser soit la méthode directe (résolution du système linéaire pour trouver les coefficients dans la base canonique), soit l'écrire dans la base de Lagrange ou encore dans la base de Newton.



10 Dans la base de Lagrange, le polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui interpole les trois points $(1,26)$, $(14,17)$ et $(21,34)$ s'écrit $p(x) = 26L_0(x)+17L_1(x)+34L_2(x)$. Que vaut $L_0(17)$?

☐ $-\frac{16}{65}$ ☐ $-\frac{3}{35}$ ☐ $\frac{12}{91}$ ☐ $\frac{12}{35}$ ☐ $-\frac{16}{35}$ ☐ $\frac{12}{65}$ ☐ $-\frac{48}{91}$ ■ $-\frac{3}{65}$ ☐ $\frac{64}{91}$ ☐ Autre

Explication :

$$L_0(x) = \frac{(x-21)(x-14)}{260}, \quad L_1(x) = \frac{(x-21)(x-1)}{-91}, \quad L_2(x) = \frac{(x-14)(x-1)}{140},$$

$$L_0(17) = \frac{-12}{260}, \quad L_1(17) = \frac{-64}{-91}, \quad L_2(17) = \frac{48}{140}.$$

11 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(5,3)$, $(8,24)$, $(11,81)$ et $(14,660)$ s'écrit $p(x) = a+b(x-5)+c(x-5)(x-8)+d(x-5)(x-8)(x-11)$. Que vaut c ?

■ +										
☐ −	☐ 0	☐ 1	■ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

Explication : Les coordonnées dans la base de Newton sont les valeurs encadrées dans le tableau des différences divisées ci-dessous:

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-1},x_i]$
0	5	$\boxed{3=a}$			
1	8	24	$\boxed{7=b}$		
2	11	81	19	$\boxed{2=c}$	
3	14	660	193	29	$\boxed{3=d}$

12 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(5,2)$, $(7,16)$, $(11,92)$ et $(15,1512)$ s'écrit $p(x) = 2+7(x-5)+2(x-5)(x-7)+4(x-5)(x-7)(x-11)$. En déduire l'équation du polynôme de Newton qui n'interpole que les trois points $(5,2)$, $(7,16)$ et $(11,92)$.

0.0 0.5 1 Cases réservées au correcteur

....

Explication : $p(x) = 2+7(x-5)+2(x-5)(x-7)$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Fonction de Meilleure Approximation ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

13 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ la droite de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-1	0	1
y_i	2	0	1

Que vaut α_0 ?

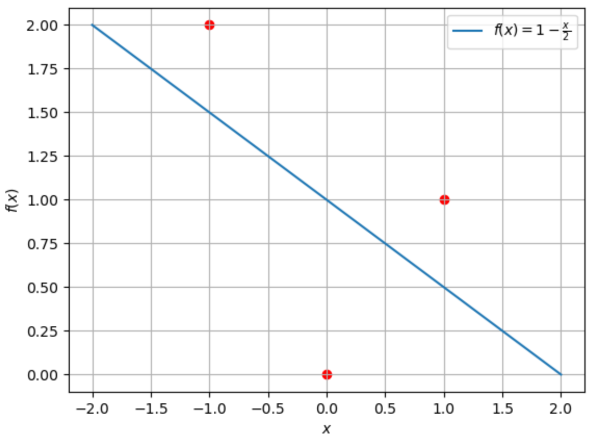
+

− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n = 2$ et il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i\end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_1 = -1/2$.



14 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ la parabole de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	3	-1	-2	-1	1

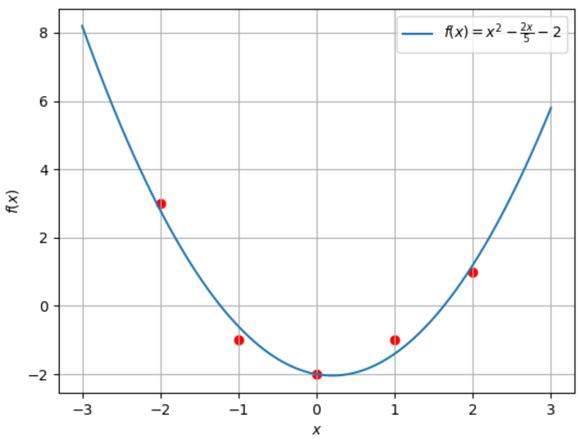
Que vaut α_2?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n = 4$ et il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = -2$, $\alpha_1 = -2/5$ et $\alpha_2 = 1$.



15 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 e^x$ la fonction de meilleure approximation des points suivants :

x_i	$\ln(1)$	$\ln(2)$	$\ln(3)$
y_i	18	6	6

Que vaut α_1 ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : On doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

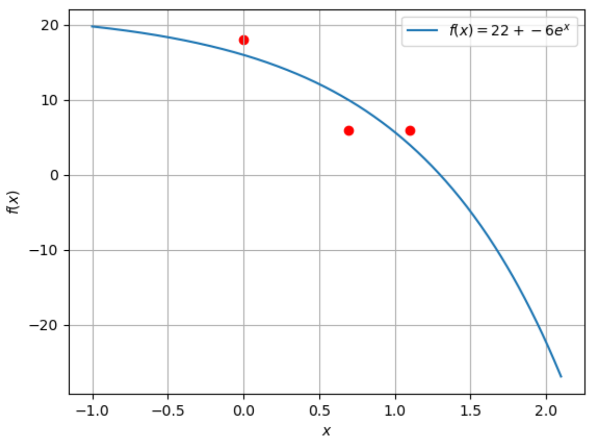
$$\mathscr{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$$

$$(\alpha_0, \alpha_1) \mapsto \mathscr{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^{2} \left(y_i - (\alpha_0 \varphi_0(x_i) + \alpha_1 \varphi_1(x_i))\right)^2.$$

où $\varphi_0(x) = 1$ et $\varphi_1(x) = e^x$. On doit donc résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} \sum \varphi_0^2(x_i) & \sum \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) \\ \sum \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) & \sum \varphi_1^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \varphi_0(x_i) \\ \sum y_i \varphi_1(x_i) \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^2 1 & \sum_{i=0}^2 e^{x_i} \\ \sum_{i=0}^2 e^{x_i} & \sum_{i=0}^2 e^{2*x_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^2 y_i \\ \sum_{i=0}^2 y_i e^{x_i} \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 48 \end{bmatrix}$$

Ainsi $\alpha_0 = 22$ et $\alpha_1 =$-6.



16 Considérons les points

x	1	2	3	4	5	6
y	-812	26	10	60	116	153

Parmi les droites de la forme $f(x) = -4 + \alpha_1 x$, on cherche celle de meilleure approximation des points donnés. Calculer la valeur de α_1.

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication :

- Notons $K = -4$. On doit minimiser la fonction d'une seule variable
$$\mathscr{E}(\alpha_1) = \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right)^2.$$
- On obtient
$$\mathscr{E}'(\alpha_1) = -2\sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right) x_i.$$
- Ainsi,
$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^{5}(y_i - K)x_i}{\sum_{i=0}^{5} x_i^2}.$$

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Statistiques descriptives** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Énoncé commun aux 3 questions suivantes.

On considère le tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2]$ et $\mathbf{y} = [\beta_1, \beta_2]$:

	$\beta_1 = 5$	$\beta_2 = 7$	Effectif marginal de α_i
$\alpha_1 = 1$	$n_{1,1} = 2$	$n_{1,2} = 2$	$n_{1,\cdot} = 4$
$\alpha_2 = 3$	$n_{2,1} = 0$	$n_{2,2} = 1$	$n_{2,\cdot} = 1$
Effectif marginal de β_j	$n_{\cdot,1} = 2$	$n_{\cdot,2} = 3$	$N = 5$

17 Compléter les cases vides du tableau des **fréquences** :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1			
α_2			
Fréq. marg. de β_j			

0.0 0.11 0.22 0.33 0.44 0.56 0.67 0.78 0.89 1 Cases réservées au correcteur

Explication : Les fréquences s'obtiennent en divisant chaque effectif du tableau donné dans l'énoncé par le total $N = 5$. Voici le tableau des fréquences complètes :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1	$f_{1,1} = \frac{2}{5} = 0.400$	$f_{1,2} = \frac{2}{5} = 0.400$	$f_{1,\cdot} = \frac{4}{5} = 0.800$
α_2	$f_{2,1} = \frac{0}{5} = 0.000$	$f_{2,2} = \frac{1}{5} = 0.200$	$f_{2,\cdot} = \frac{1}{5} = 0.200$
Fréq. marg. de β_j	$f_{\cdot,1} = \frac{2}{5} = 0.400$	$f_{\cdot,2} = \frac{3}{5} = 0.600$	1

18 Compléter les tableaux suivants:

Profils en **colonne** $f_{i|j}$ des **fréquences conditionnelles** de α sachant β :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

Profils en **ligne** $f_{j|i}$ des **fréquences conditionnelles** de β sachant α :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

0.0 0.12 0.25 0.38 0.5 0.62 0.75 0.88 1 Cases réservées au correcteur

Explication :

$f_{i|j} = \frac{n_{i,j}}{n_{\cdot,j}}$ pour chaque colonne. Voici le tableau des profils en colonne complètes :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{2} = 1.000$	$\frac{2}{3} = 0.667$
α_2	$\frac{0}{2} = 0.000$	$\frac{1}{3} = 0.333$

$f_{j|i} = \frac{n_{i,j}}{n_{i,\cdot}}$ donc voici le tableau des profils en ligne complètes :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{2}{4} = 0.500$
α_2	$\frac{0}{1} = 0.000$	$\frac{1}{1} = 1.000$

19 Le coefficient de corrélation linéaire vaut ? (arrondir à deux chiffres derrière la virgule)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	.									
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Explication : On calcule d'abord

- les moyennes

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i = \frac{\alpha_1 n_{1,\cdot} + \alpha_2 n_{2,\cdot}}{N} = \frac{1\times 4 + 3\times 1}{5} = \frac{7}{5} = 1.400,$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}\beta_j = \frac{\beta_1 n_{\cdot,1} + \beta_2 n_{\cdot,2}}{N} = \frac{5\times 2 + 7\times 3}{5} = \frac{31}{5} = 6.200,$$

- puis les variances

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i^2 - \bar{\mathbf{x}}^2 = \frac{\alpha_1^2 n_{1,\cdot} + \alpha_2^2 n_{2,\cdot}}{N} - \frac{(7)^2}{5^2} = \frac{1^2\times 4 + 3^2\times 1}{5} - \frac{7^2}{5^2} = \frac{13}{5} - \frac{49}{25} = \frac{13\times 5 - 49}{25} = 0.640,$$

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}(\beta_j)^2 - \bar{\mathbf{y}}^2 = \frac{\beta_1^2 n_{\cdot,1} + \beta_2^2 n_{\cdot,2}}{N} - \frac{(31)^2}{5^2} = \frac{5^2\times 2 + 7^2\times 3}{5} - \frac{31^2}{5^2} = \frac{197}{5} - \frac{961}{25} = \frac{197\times 5 - 961}{25} = 0.960$$

et enfin la covariance

$$C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_{i,j}(\alpha_i - \bar{\mathbf{x}})(\beta_j - \bar{\mathbf{y}}) = \frac{n_{1,1}(\alpha_1-\bar{\mathbf{x}})(\beta_1-\bar{\mathbf{y}}) + n_{1,2}(\alpha_1-\bar{\mathbf{x}})(\beta_2-\bar{\mathbf{y}}) + n_{2,1}(\alpha_2-\bar{\mathbf{x}})(\beta_1-\bar{\mathbf{y}}) + n_{2,2}(\alpha_2-\bar{\mathbf{x}})(\beta_2-\bar{\mathbf{y}})}{N}$$

$$= \frac{2\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(5-\bar{\mathbf{y}}) + 2\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(7-\bar{\mathbf{y}}) + 0\times(3-\bar{\mathbf{x}})\times(5-\bar{\mathbf{y}}) + 1\times(3-\bar{\mathbf{x}})\times(7-\bar{\mathbf{y}})}{5}$$

$$= 0.320.$$

On trouve alors le coefficient de corrélation en utilisant la formule $r = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{V(\mathbf{x})V(\mathbf{y})}} = 0.408.$

Énoncé commun aux 4 questions suivantes :

Une série statistique est définie partiellement dans le tableau ci-dessous.

x	2	3	4	5	6
y	26	y_1	y_2	y_3	45

On nous dit que l'équation de la droite de régression de y en fonction de x est $y = \frac{31}{5} + \frac{47}{10}x$.

20 Quelle est la variance $V(\mathbf{x})$ de la série $\mathbf{x}$?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La variance est calculée en utilisant la formule $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

21 Quelle est la moyenne $\overline{y}$ de la série $\mathbf{y}$?

\+ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dizaines
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à la droite de régression, $\overline{y}$ est calculé comme $\overline{y} = \frac{31}{5} + \frac{47}{10} \times 4 = 25$.

22 Quelle est la covariance entre les séries $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque la pente de la droite de regression de y par rapport à x est égale à $\gamma_1 = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$, nous pouvons calculer la covariance $C(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en multipliant γ_1 par $V(\mathbf{x})$.

23 Si toutes les valeurs de y augmentent de 2, notons $y = q + mx$ la nouvelle équation de la droite de régression de y en fonction x. Que vaut q ?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités
\+ .
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dixièmes

Explication : Notons $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ la droite de regression donnée dans l'énoncé. Elle se réécrit aussi comme $y = \overline{y} + \gamma_1(x - \overline{x})$ avec $\gamma_0 = \overline{y} - \gamma_1\overline{x}$. Si on augmente toutes les valeurs de $\mathbf{y}$ de K, sa moyenne augmente de K et la droite est translatée vers le haut de K. Ainsi, la pente de la nouvelle droite de régression ne change pas, mais l'ordonnée à l'origine augmente de K. La nouvelle équation est donc $y = \overline{y} + K + \gamma_1(x - \overline{x}) = (\gamma_0 + K) + \gamma_1 x$ ainsi $q = \gamma_0 + K = \frac{31}{5} + 2 = \frac{41}{5} = 8.2$.

INSTRUCTIONS

M1-INFO — UE 731 Remise à niveau - Mathématiques — 7 octobre 2024 Durée : 2h

Sélectionnez les quatre derniers chiffres de votre numéro d'étudiant (par ex., si le numéro est 2200**2681**, cochez 2 sur la première ligne, 6 sur la deuxième, etc.) :

NOM	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Prénom	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- Une feuille A4 recto-verso manuscrite et une calculatrice sont autorisées. Tout autre document est interdit.
- Veuillez **noircir complètement les cases**.
- Il existe trois types de questions :
  - **Questions à choix unique.**
    Choisissez une seule réponse parmi celles proposées. Des points négatifs seront attribués pour une réponse incorrecte.
  - **Questions ouvertes.**
    Répondez en remplissant un tableau. La correction sera effectuée manuellement.
  - **Questions numériques.**
    La réponse est une valeur numérique à coder. Cochez **exactement un chiffre par ligne.**
    - Exemple d'une question où la réponse est un entier :

$+27 \rightsquigarrow$

■ +	0	1	■ 2	3	4	5	6	7	8	9	← Dizaines
−	0	1	2	3	4	5	6	■ 7	8	9	← Unités

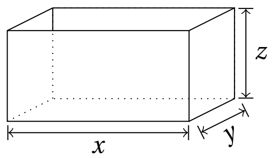
    - Exemple d'une question où la réponse est un nombre décimal :

$-5.9 \rightsquigarrow$

+	0	1	2	3	4	■ 5	6	7	8	9	← Unités
.											
■ −	0	1	2	3	4	5	6	7	8	■ 9	← Dixièmes

Fonctions de deux variables

1 Une boîte *ouverte* a la forme d'un parallélépipède. On cherche les valeurs $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V fixé égale à 32 cm^3. On doit donc minimiser la fonction $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ sachant que $xyz = 32$. Que vaut S dans son minimum (en cm^2)?



0 1 2 3 ■ 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 ■ 9

Explication : On a $x, y, z > 0$. On pose $\sigma(x, y) = S\left(x, y, \frac{32}{xy}\right) = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$.
Calcul des points critiques:

$$\nabla\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} y - \frac{64}{x^2} \\ x - \frac{64}{y^2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = (4, 4).$$

Il existe un seul point critique qui est $(4, 4)$.
Nature des points critiques:

$$H_\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{128}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{128}{y^3} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad H_\sigma(4, 4) = \begin{pmatrix} 2 > 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det H_\sigma(4, 4) > 0.$$

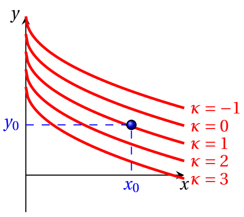
On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a $S\left(4, 4, \frac{32}{16}\right) = \sigma(4, 4) = 48$.

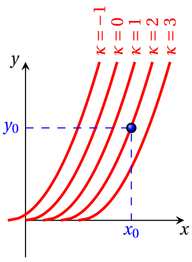
2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = xy + x + y$. Calculer l'équation du plan tangent à f en $(-3, 3)$.

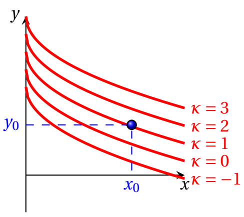
- ☐ $4x - 2y - 9$
- ■ $4x - 2y + 9$
- ☐ $4x - 2y + 18$
- ☐ $4x + 3$
- ☐ $xy + 5x - y + 18$
- ☐ Autre:

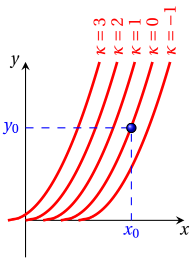
Explication : $f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + (x - x_0)\partial_x f(x_0, y_0) + (y - y_0)\partial_y f(x_0, y_0)$.

3 Parmi les graphes ci-dessous, lequel pourrait représenter les lignes de niveau d'une fonction $f(x, y)$ telle que $\partial_x f(x_0, y_0) < 0$ et $\partial_y f(x_0, y_0) < 0$?

■ 

☐ 

☐ 

☐ 

Explication : Comme $\partial_x f(x_0, y_0) \leq 0$, la fonction $h(x) = f(x, y_0)$ est décroissante. Puisque $\partial_y f(x_0, y_0) \leq 0$, la fonction $g(y) = f(x_0, y)$ est décroissante.

4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que (x_0, y_0) est un point critique et que la matrice Hessienne évaluée en ce point est

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la nature du point critique ?

- ■ c'est un maximum
- ☐ c'est un minimum
- ☐ c'est un point selle
- ☐ la matrice Hessienne ne permet pas de conclure

Explication :

- Le déterminant de la matrice Hessienne est $\det(H_f) = (-2) \times (-1) - (-1)^2 = 1$.
- Puisque $\det(H_f) = 1$ et que $\partial_{xx} f(x_0, y_0) = -2$, on en conclut que c'est un maximum.

5 On se donne la fonction

$$f(x,y)=\sqrt{\left(10^3x-\frac{10^{-4}}{y}\right)^2+10^5}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $xy=10^s$. Que vaut s?

☐ + ■ − | ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ■ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication :

$$f(x,y)=\sqrt{\left(10^3x-\frac{10^{-4}}{y}\right)^2+10^5}$$

$$\partial_x f(x,y)=\frac{2\left(10^3x-\frac{10^{-4}}{y}\right)10^3}{2\sqrt{\left(10^3x-\frac{10^{-4}}{y}\right)^2+10^5}}=0 \qquad \text{ssi } \left(10^3x-\frac{10^{-4}}{y}\right)=0$$

$$\partial_y f(x,y)=\frac{2\left(10^3x-\frac{10^{-4}}{y}\right)\frac{-10^{-4}}{y^2}}{2\sqrt{\left(10^3x-\frac{10^{-4}}{y}\right)^2+10^5}} \qquad \text{ssi } \left(10^3x-\frac{10^{-4}}{y}\right)=0$$

Donc $xy=\frac{10^{-4}}{10^3}=10^{-7}$.

6 Soit la fonction $f(x,y)=\log\left(7x^4-y^2\right)$. Parmi les réponses suivantes, laquelle est égale à $\partial_x f$?

■ $\frac{28x^3}{7x^4-y^2}$ ☐ $28x^3$ ☐ $7x^4-y^2$ ☐ $-\frac{2y}{7x^4-y^2}$ ☐ $\frac{1}{7x^4-y^2}$ ☐ Autre

Explication : $f(x,y)=\ln(bx^c-ay^2)$ donc la dérivée par rapport à x est $\frac{bcx^{c-1}}{bx^c-ay^2}$.

7 Soient $f(x,y)=-4x+12y$, $x(u,v)=uv$ et $y(u,v)=u+v$. On définit $g(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$. Calculer $\partial_v g$.

■ $12-4u$ ☐ $12-4v$ ☐ $-4v$ ☐ -4 ☐ $12u$ ☐ Autre:

Explication : $\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Interpolation** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

8 Soit $f : [1;17] \to \mathbb{R}$ la **spline linéaire** qui interpole les points $f(1) = -22$, $f(8) = 13$, $f(13) = -37$, $f(17) = -45$. Que vaut $f(16)$?

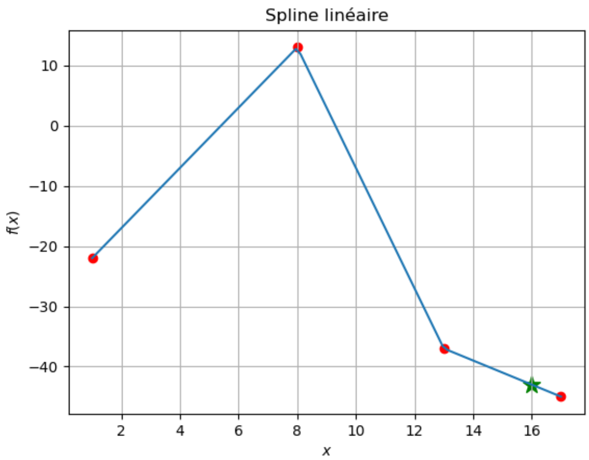
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Explication : La spline linéaire $f : [1;17] \to \mathbb{R}$ a pour équation :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{13-(-22)}{8-1}(x-1)+(-22) & \text{si } 1 \leq x \leq 8 \\ \frac{-37-(13)}{13-8}(x-8)+(13) & \text{si } 8 \leq x \leq 13 \\ \frac{-45-(-37)}{17-13}(x-13)+(-37) & \text{si } 13 \leq x \leq 17 \end{cases}$$

En substituant $x = 16$, on trouve :

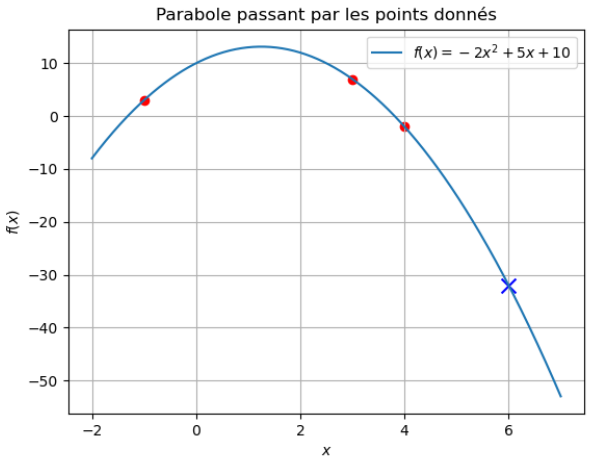
$$f(16) = -43$$



9 Soit f l'unique polynome qui interpole les points $(-1;3)$, $(3;7)$ et $(4;-2)$. Que vaut $f(6)$?

☐ +	☐ 0	☐ 1	☐ 2	■ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9
■ −	☐ 0	☐ 1	■ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

Explication : Le seul polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui passe par les trois points est la parabole d'équation $-2x^2+5x+10 = \frac{3(x-4)(x-3)}{20} - \frac{7(x-4)(x+1)}{4} - \frac{2(x-3)(x+1)}{5}$. Pour la calculer l'équation de ce polynome on peut utiliser soit la méthode directe (résolution du système linéaire pour trouver les coefficients dans la base canonique), soit l'écrire dans la base de Lagrange ou encore dans la base de Newton.



10 Dans la base de Lagrange, le polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui interpole les trois points $(1,20)$, $(14,17)$ et $(21,34)$ s'écrit $p(x) = 20L_0(x)+17L_1(x)+34L_2(x)$. Que vaut $L_1(20)$?

☐ $-\dfrac{19}{140}$ ☐ $-\dfrac{3}{130}$ ☐ $\dfrac{57}{70}$ ☐ $\dfrac{6}{91}$ ☐ $-\dfrac{3}{70}$ ☐ $-\dfrac{114}{91}$ ■ $\dfrac{19}{91}$ ☐ $\dfrac{57}{130}$ ☐ $-\dfrac{19}{260}$ ☐ Autre

Explication :

$$L_0(x) = \frac{(x-21)(x-14)}{260}, \qquad L_1(x) = \frac{(x-21)(x-1)}{-91}, \qquad L_2(x) = \frac{(x-14)(x-1)}{140},$$

$$L_0(20) = \frac{-6}{260}, \qquad L_1(20) = \frac{-19}{-91}, \qquad L_2(20) = \frac{114}{140}.$$

11 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(6,5)$, $(9,23)$, $(12,149)$ et $(16,1325)$ s'écrit $p(x) = a+b(x-6)+c(x-6)(x-9)+d(x-6)(x-9)(x-12)$. Que vaut c ?

■ +										
☐ −	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	■ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

Explication : Les coordonnées dans la base de Newton sont les valeurs encadrées dans le tableau des différences divisées ci-dessous:

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-1},x_i]$
0	6	$\boxed{5=a}$			
1	9	23	$\boxed{6=b}$		
2	12	149	42	$\boxed{6=c}$	
3	16	1325	294	36	$\boxed{3=d}$

12 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(1,5)$, $(6,25)$, $(9,85)$ et $(12,775)$ s'écrit $p(x)=5+4(x-1)+2(x-1)(x-6)+3(x-1)(x-6)(x-9)$. En déduire l'équation du polynôme de Newton qui n'interpole que les trois points $(1,5)$, $(6,25)$ et $(9,85)$.

0.0 0.5 1 Cases réservées au correcteur

....

Explication : $p(x)=5+4(x-1)+2(x-1)(x-6)$.

Fonction de Meilleure Approximation

13 Soit $f(x)=\alpha_0+\alpha_1 x$ la droite de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-1	0	1
y_i	4	0	2

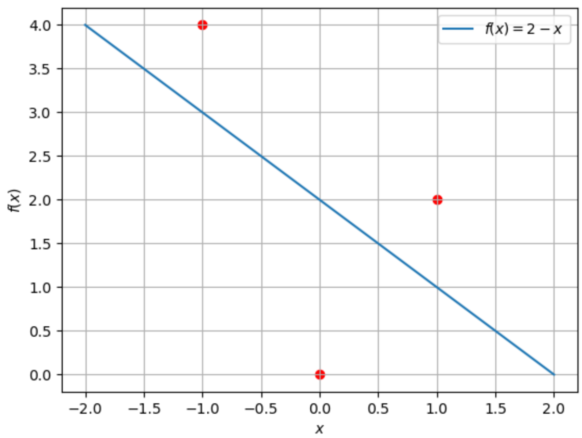
Que vaut α_1 ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n=2$ et il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^n y_i\\ \sum_{i=0}^n x_i y_i\end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ -2\end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0=2$ et $\alpha_1=-1$.



14 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ la parabole de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	3	-1	-2	-1	1

Que vaut α_0?

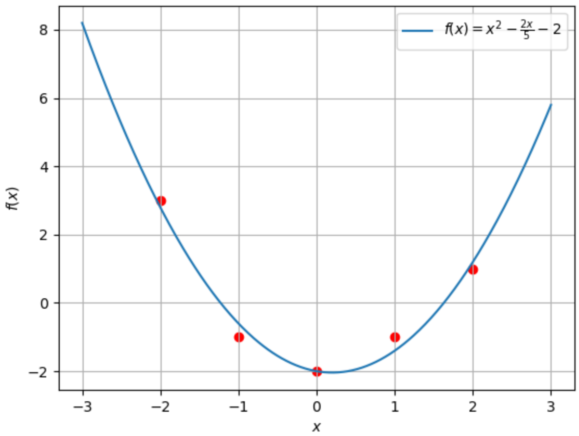
+

− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n = 4$ et il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = -2$, $\alpha_1 = -2/5$ et $\alpha_2 = 1$.



15 Soit $f(x) = \alpha_0 \cos(x) + \alpha_1 \cos(2x)$ la fonction de meilleure approximation des points suivants :

x_i	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y_i	5	4	4	5	5

Que vaut α_0 ?

+ / − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : On doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\begin{aligned} \mathscr{E} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}_+ \\ (\alpha_0, \alpha_1) &\mapsto \mathscr{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^{4} \big(y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \cos(2x_i)\big)^2. \end{aligned}$$

Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche ses points stationnaires. Puisque

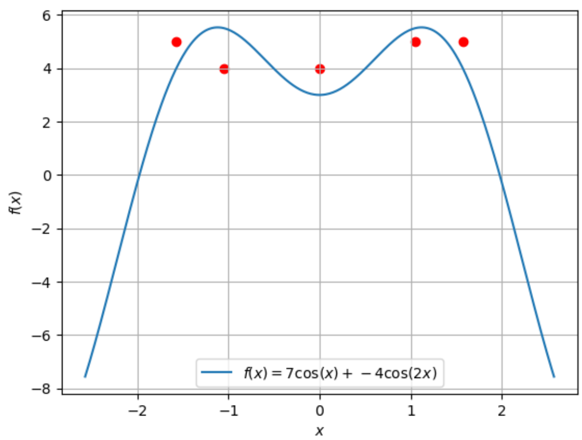
$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{4} \big(y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \cos(2x_i)\big)\cos(x_i)\right),$$

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{4} \big(y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \cos(2x_i)\big)\cos(2x_i)\right),$$

on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^{4} \big(y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \cos(2x_i)\big)\cos(x_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^{4} \big(y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \cos(2x_i)\big)\cos(2x_i) = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ -\frac{21}{2} \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 7$ et $\alpha_1 = -4$.



16 Considérons les points

x	1	2	3	4	5	6
y	-1401	21	8	64	133	167

Parmi les droites de la forme $f(x) = 1 + \alpha_1 x$, on cherche celle de meilleure approximation des points donnés. Calculer la valeur de α_1.

☒ + ☐ −   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication :

- Notons $K = 1$. On doit minimiser la fonction d'une seule variable
$$\mathscr{E}(\alpha_1) = \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right)^2.$$
- On obtient
$$\mathscr{E}'(\alpha_1) = -2\sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right) x_i.$$
- Ainsi,
$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^{5} (y_i - K) x_i}{\sum_{i=0}^{5} x_i^2}.$$

Statistiques descriptives

Énoncé commun aux 3 questions suivantes.

On considère le tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2]$ et $\mathbf{y} = [\beta_1, \beta_2]$:

	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	Effectif marginal de α_i
$\alpha_1 = 1$	$n_{1,1} = 2$	$n_{1,2} = 1$	$n_{1,\cdot} = 3$
$\alpha_2 = 2$	$n_{2,1} = 2$	$n_{2,2} = 3$	$n_{2,\cdot} = 5$
Effectif marginal de β_j	$n_{\cdot,1} = 4$	$n_{\cdot,2} = 4$	$N = 8$

17 Compléter les cases vides du tableau des **fréquences** :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1			
α_2			
Fréq. marg. de β_j			

0.0 0.11 0.22 0.33 0.44 0.56 0.67 0.78 0.89 1 Cases réservées au correcteur

Explication : Les fréquences s'obtiennent en divisant chaque effectif du tableau donné dans l'énoncé par le total $N = 8$. Voici le tableau des fréquences complètes :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1	$f_{1,1} = \frac{2}{8} = 0.250$	$f_{1,2} = \frac{1}{8} = 0.125$	$f_{1,\cdot} = \frac{3}{8} = 0.375$
α_2	$f_{2,1} = \frac{2}{8} = 0.250$	$f_{2,2} = \frac{3}{8} = 0.375$	$f_{2,\cdot} = \frac{5}{8} = 0.625$
Fréq. marg. de β_j	$f_{\cdot,1} = \frac{4}{8} = 0.500$	$f_{\cdot,2} = \frac{4}{8} = 0.500$	1

18 Compléter les tableaux suivants:

Profils en **colonne** $f_{i|j}$ des **fréquences conditionnelles** de α sachant β :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

Profils en **ligne** $f_{j|i}$ des **fréquences conditionnelles** de β sachant α :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

0.0 0.12 0.25 0.38 0.5 0.62 0.75 0.88 1 Cases réservées au correcteur

Explication :

$f_{i|j} = \frac{n_{i,j}}{n_{\cdot,j}}$ pour chaque colonne. Voici le tableau des profils en colonne complètes :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{1}{4} = 0.250$
α_2	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{3}{4} = 0.750$

$f_{j|i} = \frac{n_{i,j}}{n_{i,\cdot}}$ donc voici le tableau des profils en ligne complètes :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{3} = 0.667$	$\frac{1}{3} = 0.333$
α_2	$\frac{2}{5} = 0.400$	$\frac{3}{5} = 0.600$

19 Le coefficient de corrélation linéaire vaut ? (arrondir à deux chiffres derrière la virgule)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	.									
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Explication : On calcule d'abord

- les moyennes

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i = \frac{\alpha_1 n_{1,\cdot} + \alpha_2 n_{2,\cdot}}{N} = \frac{1\times 3 + 2\times 5}{8} = \frac{13}{8} = 1.625,$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}\beta_j = \frac{\beta_1 n_{\cdot,1} + \beta_2 n_{\cdot,2}}{N} = \frac{2\times 4 + 3\times 4}{8} = \frac{20}{8} = 2.500,$$

- puis les variances

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i^2 - \bar{\mathbf{x}}^2 = \frac{\alpha_1^2 n_{1,\cdot} + \alpha_2^2 n_{2,\cdot}}{N} - \frac{(13)^2}{8^2} = \frac{1^2\times 3 + 2^2\times 5}{8} - \frac{13^2}{8^2} = \frac{23}{8} - \frac{169}{64} = \frac{23\times 8 - 169}{64} = 0.234,$$

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}(\beta_j)^2 - \bar{\mathbf{y}}^2 = \frac{\beta_1^2 n_{\cdot,1} + \beta_2^2 n_{\cdot,2}}{N} - \frac{(20)^2}{8^2} = \frac{2^2\times 4 + 3^2\times 4}{8} - \frac{20^2}{8^2} = \frac{52}{8} - \frac{400}{64} = \frac{52\times 8 - 400}{64} = 0.250$$

et enfin la covariance

$$C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_{i,j}(\alpha_i - \bar{\mathbf{x}})(\beta_j - \bar{\mathbf{y}}) = \frac{n_{1,1}(\alpha_1-\bar{\mathbf{x}})(\beta_1-\bar{\mathbf{y}}) + n_{1,2}(\alpha_1-\bar{\mathbf{x}})(\beta_2-\bar{\mathbf{y}}) + n_{2,1}(\alpha_2-\bar{\mathbf{x}})(\beta_1-\bar{\mathbf{y}}) + n_{2,2}(\alpha_2-\bar{\mathbf{x}})(\beta_2-\bar{\mathbf{y}})}{N}$$

$$= \frac{2\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(2-\bar{\mathbf{y}}) + 1\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(3-\bar{\mathbf{y}}) + 2\times(2-\bar{\mathbf{x}})\times(2-\bar{\mathbf{y}}) + 3\times(2-\bar{\mathbf{x}})\times(3-\bar{\mathbf{y}})}{8}$$

$= 0.062.$

On trouve alors le coefficient de corrélation en utilisant la formule $r = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{V(\mathbf{x})V(\mathbf{y})}} = 0.258.$

Énoncé commun aux 4 questions suivantes :

Une série statistique est définie partiellement dans le tableau ci-dessous.

x	2	3	4	5	6
y	26	y_1	y_2	y_3	45

On nous dit que l'équation de la droite de régression de y en fonction de x est $y = \dfrac{21}{5} + \dfrac{47}{10}x$.

20 Quelle est la variance $V(\mathbf{x})$ de la série **x** ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La variance est calculée en utilisant la formule $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

21 Quelle est la moyenne $\overline{y}$ de la série **y** ?

+ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dizaines
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à la droite de régression, $\overline{y}$ est calculé comme $\overline{y} = \frac{21}{5} + \frac{47}{10} \times 4 = 23$.

22 Quelle est la covariance entre les séries **x** et **y** ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque la pente de la droite de regression de y par rapport à x est égale à $\gamma_1 = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$, nous pouvons calculer la covariance $C(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en multipliant γ_1 par $V(\mathbf{x})$.

23 Si toutes les valeurs de **x** augmentent de 3, notons $y = q + mx$ la nouvelle équation de la droite de régression de y en fonction x. Que vaut q ?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités
+ − .
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dixièmes

Explication : Notons $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ la droite de regression donnée dans l'énoncé. Elle se réécrit aussi comme $y = \overline{y} + \gamma_1(x - \overline{x})$ avec $\gamma_0 = \overline{y} - \gamma_1\overline{x}$. Si on augmente toutes les valeurs de **x** de K, sa moyenne augmente de K et la droite est translatée à droite de K. Ainsi, la pente de la nouvelle droite de régression ne change pas, mais l'ordonnée à l'origine change. La nouvelle équation est donc $y = \overline{y} + \gamma_1(x - (\overline{x} + K)) = \gamma_0 + \gamma_1\overline{x} + \gamma_1(x - (\overline{x} + K)) = (\gamma_0 - \gamma_1 K) + \gamma_1 x$ ainsi $q = \gamma_0 - \gamma_1 K = \frac{21}{5} - \frac{47}{10} \times 3 = -\frac{99}{10} = -9.9$.

INSTRUCTIONS

M1-INFO — UE 731 Remise à niveau - Mathématiques — 7 octobre 2024 Durée : 2h

Sélectionnez les quatre derniers chiffres de votre numéro d'étudiant (par ex., si le numéro est 2200**2681**, cochez 2 sur la première ligne, 6 sur la deuxième, etc.) :

NOM	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Prénom..	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- Une feuille A4 recto-verso manuscrite et une calculatrice sont autorisées. Tout autre document est interdit.
- Veuillez **noircir complètement les cases**.
- Il existe trois types de questions :
  - **Questions à choix unique.**
    Choisissez une seule réponse parmi celles proposées. Des points négatifs seront attribués pour une réponse incorrecte.
  - **Questions ouvertes.**
    Répondez en remplissant un tableau. La correction sera effectuée manuellement.
  - **Questions numériques.**
    La réponse est une valeur numérique à coder. Cochez **exactement un chiffre par ligne.**
    - Exemple d'une question où la réponse est un entier :

$+27 \leadsto$

■ (+)	0	1	■ (2)	3	4	5	6	7	8	9	← Dizaines
−	0	1	2	3	4	5	6	■ (7)	8	9	← Unités

    - Exemple d'une question où la réponse est un nombre décimal :

$-5.9 \leadsto$

+	0	1	2	3	4	■ (5)	6	7	8	9	← Unités
	.										
■ (−)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	■ (9)	← Dixièmes

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Fonctions de deux variables ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

1 Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^3 + xy + y$. Calculer l'équation du plan tangent à f en $(-3,3)$.

■ $30x-2y+63$ ☐ $30x-2y+96$ ☐ $x^3+xy+30x-y+96$
☐ $30x-2y-33$ ☐ $30x+57$ ☐ Autre:

Explication : $f(x,y) \simeq f(x_0,y_0) + (x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0) + (y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0)$.

2 On se donne la fonction

$$f(x,y) = \sqrt{\left(10^{-2}x - \frac{10^4}{y}\right)^2 + 10^5}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $xy = 10^s$. Que vaut s?

■ + ☐ − ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ■ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication :

$$f(x,y) = \sqrt{\left(10^{-2}x - \frac{10^4}{y}\right)^2 + 10^5}$$

$$\partial_x f(x,y) = \frac{2\left(10^{-2}x - \frac{10^4}{y}\right)10^{-2}}{2\sqrt{\left(10^{-2}x - \frac{10^4}{y}\right)^2 + 10^5}} = 0 \qquad \text{ssi} \quad \left(10^{-2}x - \frac{10^4}{y}\right) = 0$$

$$\partial_y f(x,y) = \frac{2\left(10^{-2}x - \frac{10^4}{y}\right)\frac{-10^4}{y^2}}{2\sqrt{\left(10^{-2}x - \frac{10^4}{y}\right)^2 + 10^5}} \qquad \text{ssi} \quad \left(10^{-2}x - \frac{10^4}{y}\right) = 0$$

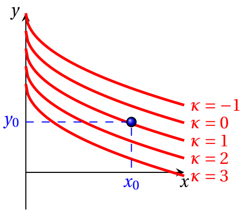
Donc $xy = \frac{10^4}{10^{-2}} = 10^6$.

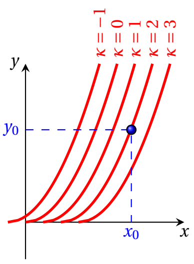
3 Soit la fonction $f(x,y) = \log\left(8x^6 - 2y^2\right)$. Parmi les réponses suivantes, laquelle est égale à $\partial_x f$?

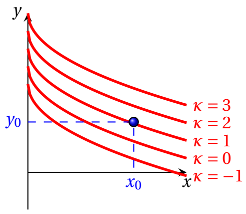
☐ $\dfrac{1}{8x^6-2y^2}$ ☐ $48x^5$ ■ $\dfrac{48x^5}{8x^6-2y^2}$ ☐ $8x^6-2y^2$ ☐ $-\dfrac{4y}{8x^6-2y^2}$ ☐ Autre

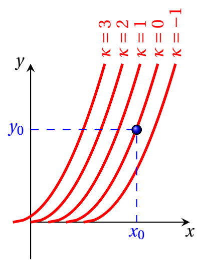
Explication : $f(x,y) = \ln(bx^c - ay^2)$ donc la dérivée par rapport à x est $\frac{bcx^{c-1}}{bx^c - ay^2}$.

4 Parmi les graphes ci-dessous, lequel pourrait représenter les lignes de niveau d'une fonction $f(x,y)$ telle que $\partial_x f(x_0,y_0) < 0$ et $\partial_y f(x_0,y_0) < 0$?

■ 

☐ 

☐ 

☐ 

Explication : Comme $\partial_x f(x_0,y_0) \leq 0$, la fonction $h(x) = f(x,y_0)$ est décroissante. Puisque $\partial_y f(x_0,y_0) \leq 0$, la fonction $g(y) = f(x_0,y)$ est décroissante.

5 Soient $f(x,y) = 3x + 13y$, $x(u,v) = uv$ et $y(u,v) = u + v$. On définit $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$. Calculer $\partial_u g$.

■ $3v + 13$ ☐ $3v$ ☐ $13u$ ☐ 3 ☐ $3u + 13$ ☐ Autre:

Explication : $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$.

6 Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que (x_0, y_0) est un point critique et que la matrice Hessienne évaluée en ce point est

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

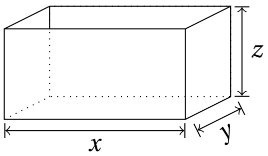
Quelle est la nature du point critique ?

☐ c'est un minimum
■ c'est un point selle
☐ la matrice Hessienne ne permet pas de conclure
☐ c'est un maximum

Explication :

- Le déterminant de la matrice Hessienne est $\det(H_f) = (-2)\times(1) - (-1)^2 = -3$.
- Puisque $\det(H_f) = -3$ et que $\partial_{xx} f(x_0, y_0) = -2$, on en conclut que c'est un point selle.

7 Une boîte *ouverte* a la forme d'un parallélépipède. On cherche les valeurs $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V fixé égale à 32 cm^3. On doit donc minimiser la fonction $S(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$ sachant que $xyz = 32$. Que vaut S dans son minimum (en cm^2)?



0	1	2	3	■	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	■	9

Explication : On a $x, y, z > 0$. On pose $\sigma(x,y) = S\left(x, y, \frac{32}{xy}\right) = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$.
Calcul des points critiques:

$$\nabla\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} y - \frac{64}{x^2} \\ x - \frac{64}{y^2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x,y) = (4,4).$$

Il existe un seul point critique qui est $(4,4)$.
Nature des points critiques:

$$H_\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{128}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{128}{y^3} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad H_\sigma(4,4) = \begin{pmatrix} 2 > 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det H_\sigma(4,4) > 0.$$

On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a $S\left(4, 4, \frac{32}{16}\right) = \sigma(4,4) = 48$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Interpolation ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

8 Soit $f\colon [1;17] \to \mathbb{R}$ la **spline linéaire** qui interpole les points $f(1) = -18$, $f(8) = 10$, $f(13) = -40$, $f(17) = -36$. Que vaut $f(14)$?

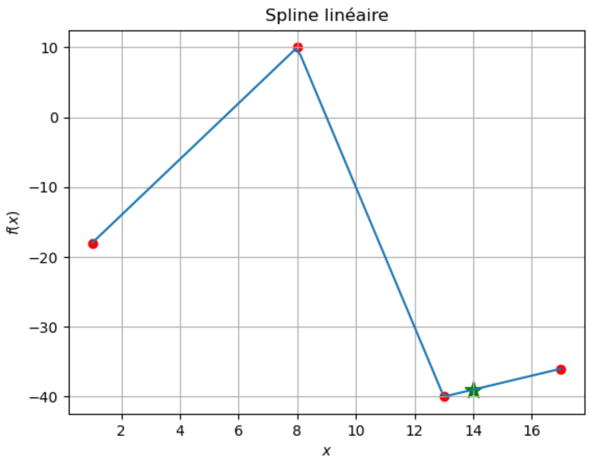
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Explication : La spline linéaire $f\colon [1;17] \to \mathbb{R}$ a pour équation :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10-(-18)}{8-1}(x-1)+(-18) & \text{si } 1 \le x \le 8 \\ \frac{-40-(10)}{13-8}(x-8)+(10) & \text{si } 8 \le x \le 13 \\ \frac{-36-(-40)}{17-13}(x-13)+(-40) & \text{si } 13 \le x \le 17 \end{cases}$$

En substituant $x = 14$, on trouve :

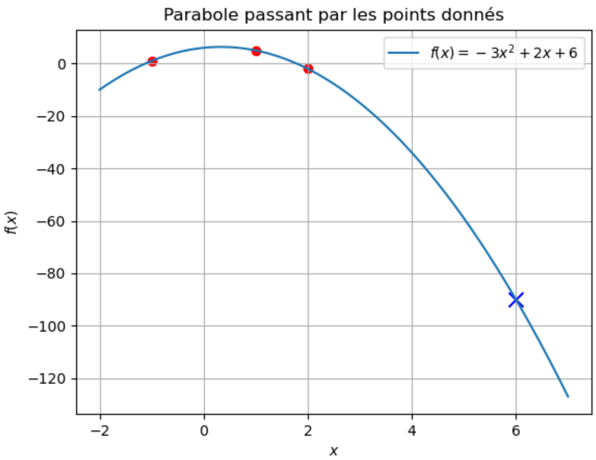
$$f(14) = -39$$



9 Soit f l'unique polynome qui interpole les points $(-1;1)$, $(1;5)$ et $(2;-2)$. Que vaut $f(6)$?

☐ +	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	■ 9
■ −	■ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

Explication : Le seul polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui passe par les trois points est la parabole d'équation $-3x^2+2x+6 = \frac{(x-2)(x-1)}{6} - \frac{5(x-2)(x+1)}{2} - \frac{2(x-1)(x+1)}{3}$. Pour la calculer l'équation de ce polynome on peut utiliser soit la méthode directe (résolution du système linéaire pour trouver les coefficients dans la base canonique), soit l'écrire dans la base de Lagrange ou encore dans la base de Newton.



10 Dans la base de Lagrange, le polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui interpole les trois points $(1,27)$, $(14,17)$ et $(21,34)$ s'écrit $p(x) = 27L_0(x)+17L_1(x)+34L_2(x)$. Que vaut $L_2(17)$?

■ $\frac{12}{35}$ ☐ $\frac{64}{91}$ ☐ $\frac{12}{65}$ ☐ $-\frac{16}{65}$ ☐ $-\frac{3}{35}$ ☐ $\frac{12}{91}$ ☐ $-\frac{3}{65}$ ☐ $-\frac{48}{91}$ ☐ $-\frac{16}{35}$ ☐ Autre

Explication :

$$L_0(x) = \frac{(x-21)(x-14)}{260}, \qquad L_1(x) = \frac{(x-21)(x-1)}{-91}, \qquad L_2(x) = \frac{(x-14)(x-1)}{140},$$

$$L_0(17) = \frac{-12}{260}, \qquad L_1(17) = \frac{-64}{-91}, \qquad L_2(17) = \frac{48}{140}.$$

11 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(6,1)$, $(7,2)$, $(8,15)$ et $(9,15)$ s'écrit $p(x) = a+b(x-6)+c(x-6)(x-7)+d(x-6)(x-7)(x-8)$. Que vaut c ?

■ +										
☐ −	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	■ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

Explication : Les coordonnées dans la base de Newton sont les valeurs encadrées dans le tableau des différences divisées ci-dessous:

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-1},x_i]$
0	6	$\boxed{1=a}$			
1	7	2	$\boxed{1=b}$		
2	8	15	13	$\boxed{6=c}$	
3	9	15	0	$-\frac{13}{2}$	$\boxed{-\frac{25}{6}=d}$

12 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(9,7)$, $(14,42)$, $(19,377)$ et $(21,1099)$ s'écrit $p(x) = 7 + 7(x-9) + 6(x-9)(x-14) + 3(x-9)(x-14)(x-19)$. En déduire l'équation du polynôme de Newton qui n'interpole que les trois points $(9,7)$, $(14,42)$ et $(19,377)$.

0.0 0.5 1 Cases réservées au correcteur

....

Explication : $p(x) = 7 + 7(x-9) + 6(x-9)(x-14)$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Fonction de Meilleure Approximation ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

13 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ la droite de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-1	0	1
y_i	2	0	-4

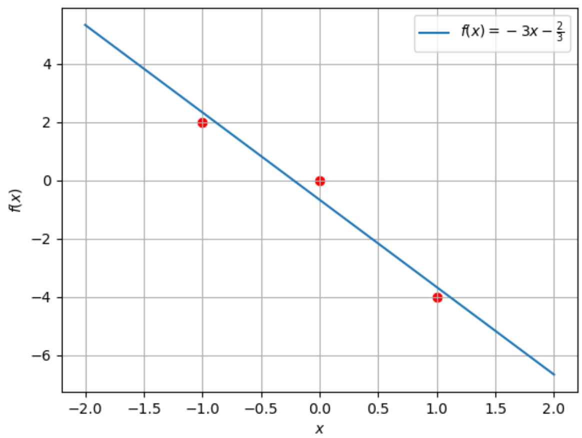
Que vaut α_1 ?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n = 2$ et il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = -2/3$ et $\alpha_1 = -3$.



14 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ la parabole de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-1	1	2	1	-3

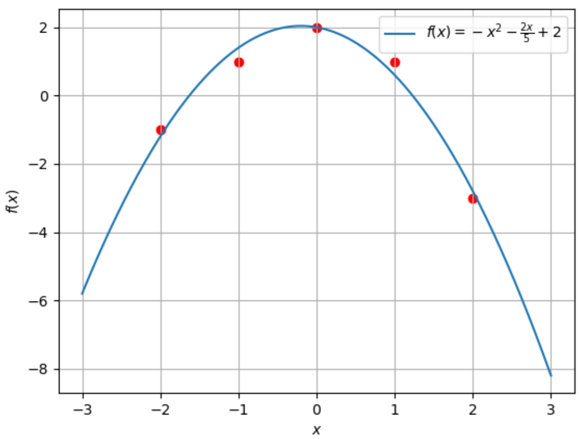
Que vaut α_0?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n=4$ et il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = -2/5$ et $\alpha_2 = -1$.



15 Soit $f(x) = \alpha_0 \cos(x) + \alpha_1 \sin(x)$ la fonction de meilleure approximation des points suivants:

x_i	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
y_i	2	4	0

Que vaut α_0 ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : On doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\mathscr{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$$
$$(\alpha_0, \alpha_1) \mapsto \mathscr{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i)\right)^2.$$

Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche ses points stationnaires. Puisque

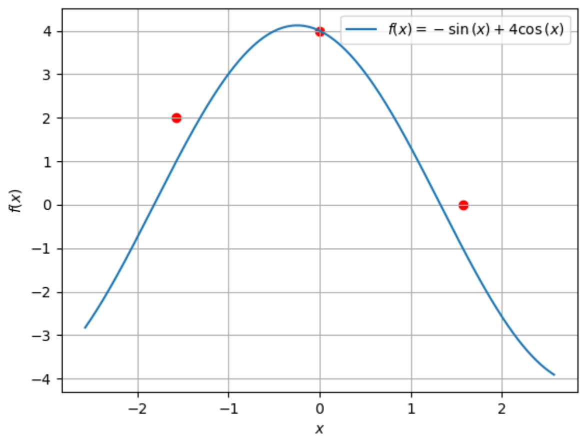
$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i))\cos(x_i)\right),$$
$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i))\sin(x_i)\right),$$

on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i))\cos(x_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i))\sin(x_i) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} \cos^2(x_i) & \sum_{i=0}^{n} \cos(x_i)\sin(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} \cos(x_i)\sin(x_i) & \sum_{i=0}^{n} \sin^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \cos(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} y_i \sin(x_i) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 4$ et $\alpha_1 = -1$.



16 Considérons les points

x	1	2	3	4	5	6
y	-1791	32	46	52	147	187

Parmi les droites de la forme $f(x) = -3 + \alpha_1 x$, on cherche celle de meilleure approximation des points donnés. Calculer la valeur de α_1.

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication :

- Notons $K = -3$. On doit minimiser la fonction d'une seule variable

$$\mathscr{E}(\alpha_1) = \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right)^2.$$

- On obtient

$$\mathscr{E}'(\alpha_1) = -2 \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right) x_i.$$

- Ainsi,

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^{5} (y_i - K) x_i}{\sum_{i=0}^{5} x_i^2}.$$

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Statistiques descriptives ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Énoncé commun aux 3 questions suivantes.

On considère le tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2]$ et $\mathbf{y} = [\beta_1, \beta_2]$:

	$\beta_1 = 5$	$\beta_2 = 7$	Effectif marginal de α_i
$\alpha_1 = 1$	$n_{1,1} = 2$	$n_{1,2} = 3$	$n_{1,\cdot} = 5$
$\alpha_2 = 3$	$n_{2,1} = 1$	$n_{2,2} = 1$	$n_{2,\cdot} = 2$
Effectif marginal de β_j	$n_{\cdot,1} = 3$	$n_{\cdot,2} = 4$	$N = 7$

17 Compléter les cases vides du tableau des **fréquences** :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1			
α_2			
Fréq. marg. de β_j			

0.0 0.11 0.22 0.33 0.44 0.56 0.67 0.78 0.89 1 Cases réservées au correcteur

Explication : Les fréquences s'obtiennent en divisant chaque effectif du tableau donné dans l'énoncé par le total $N = 7$. Voici le tableau des fréquences complètes :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1	$f_{1,1} = \frac{2}{7} = 0.286$	$f_{1,2} = \frac{3}{7} = 0.429$	$f_{1,\cdot} = \frac{5}{7} = 0.714$
α_2	$f_{2,1} = \frac{1}{7} = 0.143$	$f_{2,2} = \frac{1}{7} = 0.143$	$f_{2,\cdot} = \frac{2}{7} = 0.286$
Fréq. marg. de β_j	$f_{\cdot,1} = \frac{3}{7} = 0.429$	$f_{\cdot,2} = \frac{4}{7} = 0.571$	1

18 Compléter les tableaux suivants:

Profils en **colonne** $f_{i|j}$ des **fréquences conditionnelles** de α sachant β :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

Profils en **ligne** $f_{j|i}$ des **fréquences conditionnelles** de β sachant α :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

0.0 0.12 0.25 0.38 0.5 0.62 0.75 0.88 1 Cases réservées au correcteur

Explication :

$f_{i|j} = \frac{n_{i,j}}{n_{\cdot,j}}$ pour chaque colonne. Voici le tableau des profils en colonne complètes :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{3} = 0.667$	$\frac{3}{4} = 0.750$
α_2	$\frac{1}{3} = 0.333$	$\frac{1}{4} = 0.250$

$f_{j|i} = \frac{n_{i,j}}{n_{i,\cdot}}$ donc voici le tableau des profils en ligne complètes :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{5} = 0.400$	$\frac{3}{5} = 0.600$
α_2	$\frac{1}{2} = 0.500$	$\frac{1}{2} = 0.500$

19 Le coefficient de corrélation linéaire vaut ? (arrondir à deux chiffres derrière la virgule)

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

.

\+ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : On calcule d'abord

- les moyennes

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i = \frac{\alpha_1 n_{1,\cdot} + \alpha_2 n_{2,\cdot}}{N} = \frac{1\times 5 + 3\times 2}{7} = \frac{11}{7} = 1.571,$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}\beta_j = \frac{\beta_1 n_{\cdot,1} + \beta_2 n_{\cdot,2}}{N} = \frac{5\times 3 + 7\times 4}{7} = \frac{43}{7} = 6.143,$$

- puis les variances

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i^2 - \bar{\mathbf{x}}^2 = \frac{\alpha_1^2 n_{1,\cdot} + \alpha_2^2 n_{2,\cdot}}{N} - \frac{(11)^2}{7^2} = \frac{1^2\times 5 + 3^2\times 2}{7} - \frac{11^2}{7^2} = \frac{23}{7} - \frac{121}{49} = \frac{23\times 7 - 121}{49} = 0.816,$$

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}(\beta_j)^2 - \bar{\mathbf{y}}^2 = \frac{\beta_1^2 n_{\cdot,1} + \beta_2^2 n_{\cdot,2}}{N} - \frac{(43)^2}{7^2} = \frac{5^2\times 3 + 7^2\times 4}{7} - \frac{43^2}{7^2} = \frac{271}{7} - \frac{1849}{49} = \frac{271\times 7 - 1849}{49} = 0.980$$

et enfin la covariance

$$C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_{i,j}(\alpha_i - \bar{\mathbf{x}})(\beta_j - \bar{\mathbf{y}}) = \frac{n_{1,1}(\alpha_1-\bar{\mathbf{x}})(\beta_1-\bar{\mathbf{y}}) + n_{1,2}(\alpha_1-\bar{\mathbf{x}})(\beta_2-\bar{\mathbf{y}}) + n_{2,1}(\alpha_2-\bar{\mathbf{x}})(\beta_1-\bar{\mathbf{y}}) + n_{2,2}(\alpha_2-\bar{\mathbf{x}})(\beta_2-\bar{\mathbf{y}})}{N}$$

$$= \frac{2\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(5-\bar{\mathbf{y}}) + 3\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(7-\bar{\mathbf{y}}) + 1\times(3-\bar{\mathbf{x}})\times(5-\bar{\mathbf{y}}) + 1\times(3-\bar{\mathbf{x}})\times(7-\bar{\mathbf{y}})}{7}$$

$$= -0.082.$$

On trouve alors le coefficient de corrélation en utilisant la formule $r = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{V(\mathbf{x})V(\mathbf{y})}} = -0.091$.

Énoncé commun aux 4 questions suivantes :

Une série statistique est définie partiellement dans le tableau ci-dessous.

x	2	3	4	5	6
y	26	y_1	y_2	y_3	45

On nous dit que l'équation de la droite de régression de y en fonction de x est $y = \frac{51}{5} + \frac{47}{10}x$.

20 Quelle est la variance $V(\mathbf{x})$ de la série $\mathbf{x}$?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La variance est calculée en utilisant la formule $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

21 Quelle est la moyenne $\overline{y}$ de la série $\mathbf{y}$?

+ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dizaines
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à la droite de régression, $\overline{y}$ est calculé comme $\overline{y} = \frac{51}{5} + \frac{47}{10} \times 4 = 29$.

22 Quelle est la covariance entre les séries $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque la pente de la droite de regression de y par rapport à x est égale à $\gamma_1 = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$, nous pouvons calculer la covariance $C(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en multipliant γ_1 par $V(\mathbf{x})$.

23 Si toutes les valeurs de $\mathbf{x}$ augmentent de 3, notons $y = q + mx$ la nouvelle équation de la droite de régression de y en fonction x. Que vaut q ?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités
+ .
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dixièmes

Explication : Notons $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ la droite de regression donnée dans l'énoncé. Elle se réécrit aussi comme $y = \overline{y} + \gamma_1(x - \overline{x})$ avec $\gamma_0 = \overline{y} - \gamma_1\overline{x}$. Si on augmente toutes les valeurs de $\mathbf{x}$ de K, sa moyenne augmente de K et la droite est translatée à droite de K. Ainsi, la pente de la nouvelle droite de régression ne change pas, mais l'ordonnée à l'origine change. La nouvelle équation est donc $y = \overline{y} + \gamma_1(x - (\overline{x} + K)) = \gamma_0 + \gamma_1\overline{x} + \gamma_1(x - (\overline{x} + K)) = (\gamma_0 - \gamma_1 K) + \gamma_1 x$ ainsi $q = \gamma_0 - \gamma_1 K = \frac{51}{5} - \frac{47}{10} \times 3 = -\frac{39}{10} = -3.9$.

Instructions

M1-INFO — UE 731 Remise à niveau - Mathématiques — 7 octobre 2024 Durée : 2h

Sélectionnez les quatre derniers chiffres de votre numéro d'étudiant (par ex., si le numéro est 2200**2681**, cochez 2 sur la première ligne, 6 sur la deuxième, etc.) :

NOM	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Prénom	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Une feuille A4 recto-verso manuscrite et une calculatrice sont autorisées. Tout autre document est interdit.
- Veuillez **noircir complètement les cases**.
- Il existe trois types de questions :
  - **Questions à choix unique.**
    Choisissez une seule réponse parmi celles proposées. Des points négatifs seront attribués pour une réponse incorrecte.
  - **Questions ouvertes.**
    Répondez en remplissant un tableau. La correction sera effectuée manuellement.
  - **Questions numériques.**
    La réponse est une valeur numérique à coder. Cochez **exactement un chiffre par ligne.**
    - Exemple d'une question où la réponse est un entier :

+27 ⇝

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	← Dizaines
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	← Unités

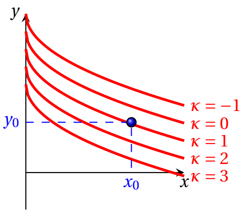
    - Exemple d'une question où la réponse est un nombre décimal :

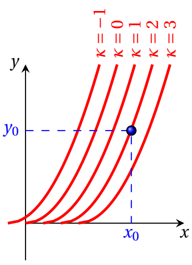
−5.9 ⇝

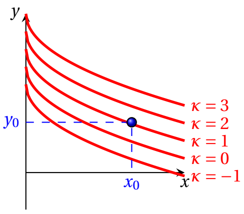
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	← Unités
+	.										
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	← Dixièmes

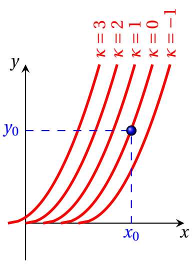
Fonctions de deux variables

1 Parmi les graphes ci-dessous, lequel pourrait représenter les lignes de niveau d'une fonction $f(x, y)$ telle que $\partial_x f(x_0, y_0) < 0$ et $\partial_y f(x_0, y_0) < 0$?

■ 

□ 

□ 

□ 

Explication : Comme $\partial_x f(x_0, y_0) \leq 0$, la fonction $h(x) = f(x, y_0)$ est décroissante. Puisque $\partial_y f(x_0, y_0) \leq 0$, la fonction $g(y) = f(x_0, y)$ est décroissante.

2 On se donne la fonction

$$f(x, y) = \sqrt{\left(10^3 x - \frac{10^{-4}}{y}\right)^2 + 10^3}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $xy = 10^s$. Que vaut s?

□ +
■ − □ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □ 6 ■ 7 □ 8 □ 9

Explication :

$$f(x, y) = \sqrt{\left(10^3 x - \frac{10^{-4}}{y}\right)^2 + 10^3}$$

$$\partial_x f(x, y) = \frac{2\left(10^3 x - \frac{10^{-4}}{y}\right) 10^3}{2\sqrt{\left(10^3 x - \frac{10^{-4}}{y}\right)^2 + 10^3}} = 0 \qquad \text{ssi } \left(10^3 x - \frac{10^{-4}}{y}\right) = 0$$

$$\partial_y f(x, y) = \frac{2\left(10^3 x - \frac{10^{-4}}{y}\right) \frac{-10^{-4}}{y^2}}{2\sqrt{\left(10^3 x - \frac{10^{-4}}{y}\right)^2 + 10^3}} \qquad \text{ssi } \left(10^3 x - \frac{10^{-4}}{y}\right) = 0$$

Donc $xy = \frac{10^{-4}}{10^3} = 10^{-7}$.

3 Soit la fonction $f(x, y) = e^{9x^5 - 2y^2}$. Parmi les réponses suivantes, laquelle est égale à $\partial_x f$?

■ $45x^4 e^{9x^5-2y^2}$ □ $45xe^{9x^5-2y^2}$ □ $9e^{9x^5-2y^2}$ □ $45e^{9x^5-2y^2}$ □ $-4ye^{9x^5-2y^2}$ □ Autre

Explication : $f(x, y) = e^{bx^c - ay^d}$ donc la dérivée par rapport à x est $bcx^{c-1}e^{bx^c - ay^d}$.

4 Soient $f(x, y) = 5x + 17y$, $x(u, v) = uv$ et $y(u, v) = u + v$. On définit $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$. Calculer $\partial_u g$.

□ $5v$ □ $5u + 17$ □ $17u$ □ 5 ■ $5v + 17$ □ Autre:

Explication : $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$.

5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que (x_0, y_0) est un point critique et que la matrice Hessienne évaluée en ce point est

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la nature du point critique ?

- ☐ c'est un maximum
- ☐ c'est un minimum
- ☐ la matrice Hessienne ne permet pas de conclure
- ■ c'est un point selle

Explication :

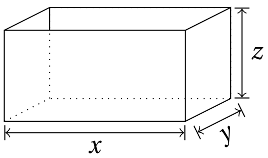
- Le déterminant de la matrice Hessienne est $\det(H_f) = (-1) \times (2) - (1)^2 = -3$.
- Puisque $\det(H_f) = -3$ et que $\partial_{xx} f(x_0, y_0) = -1$, on en conclut que c'est un point selle.

6 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^3 + xy + y^2$. Calculer l'équation du plan tangent à f en $(-3, 3)$.

- ☐ $30x + 3y + 81$
- ■ $30x + 3y + 54$
- ☐ $30x + 63$
- ☐ $30x + 3y - 27$
- ☐ $x^3 + xy + 30x + y^2 + 3y + 81$
- ☐ Autre:

Explication : $f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + (x - x_0)\partial_x f(x_0, y_0) + (y - y_0)\partial_y f(x_0, y_0)$.

7 Une boîte *ouverte* a la forme d'un parallélépipède. On cherche les valeurs $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V fixé égale à 4 cm^3. On doit donc minimiser la fonction $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ sachant que $xyz = 4$. Que vaut S dans son minimum (en cm^2)?



☐0 ■1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

☐0 ☐1 ■2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

Explication : On a $x, y, z > 0$. On pose $\sigma(x, y) = S\left(x, y, \frac{4}{xy}\right) = xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x}$.
Calcul des points critiques:

$$\nabla\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} y - \frac{8}{x^2} \\ x - \frac{8}{y^2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = (2, 2).$$

Il existe un seul point critique qui est $(2, 2)$.
Nature des points critiques:

$$H_\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{16}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{16}{y^3} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad H_\sigma(2, 2) = \begin{pmatrix} 2 > 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det H_\sigma(2, 2) > 0.$$

On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a $S\left(2, 2, \frac{4}{4}\right) = \sigma(2, 2) = 12$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Interpolation ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

8 Soit $f : [1; 17] \to \mathbb{R}$ la **spline linéaire** qui interpole les points $f(1) = -31$, $f(8) = 11$, $f(13) = -19$, $f(17) = -39$. Que vaut $f(11)$?

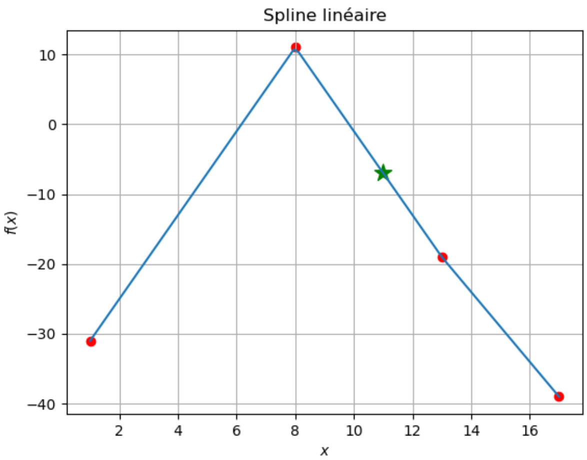
+
− | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La spline linéaire $f : [1;17] \to \mathbb{R}$ a pour équation :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{11-(-31)}{8-1}(x-1)+(-31) & \text{si } 1 \le x \le 8 \\ \frac{-19-(11)}{13-8}(x-8)+(11) & \text{si } 8 \le x \le 13 \\ \frac{-39-(-19)}{17-13}(x-13)+(-19) & \text{si } 13 \le x \le 17 \end{cases}$$

En substituant $x = 11$, on trouve :

$$f(11) = -7$$

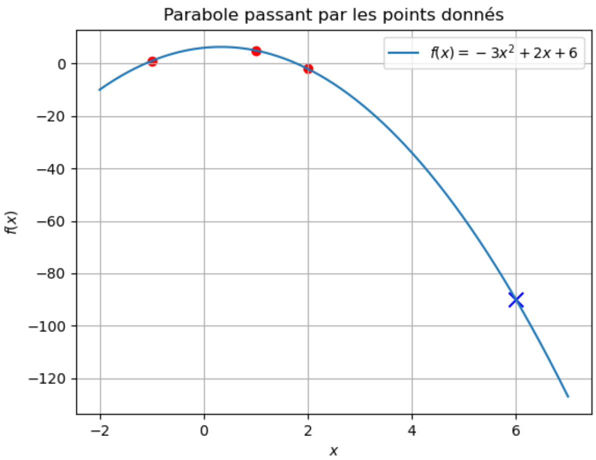


9 Soit f l'unique polynome qui interpole les points $(-1;1)$, $(1;5)$ et $(2;-2)$. Que vaut $f(6)$?

+ | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

− | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : Le seul polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui passe par les trois points est la parabole d'équation $-3x^2+2x+6 = \frac{(x-2)(x-1)}{6} - \frac{5(x-2)(x+1)}{2} - \frac{2(x-1)(x+1)}{3}$. Pour la calculer l'équation de ce polynome on peut utiliser soit la méthode directe (résolution du système linéaire pour trouver les coefficients dans la base canonique), soit l'écrire dans la base de Lagrange ou encore dans la base de Newton.



10 Dans la base de Lagrange, le polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui interpole les trois points $(1,26)$, $(14,17)$ et $(21,34)$ s'écrit $p(x) = 26L_0(x)+17L_1(x)+34L_2(x)$. Que vaut $L_1(17)$?

☐ $-\frac{3}{35}$ ☐ $-\frac{3}{65}$ ■ $\frac{64}{91}$ ☐ $-\frac{16}{65}$ ☐ $\frac{12}{91}$ ☐ $\frac{12}{65}$ ☐ $\frac{12}{35}$ ☐ $-\frac{16}{35}$ ☐ $-\frac{48}{91}$ ☐ Autre

Explication :

$$L_0(x) = \frac{(x-21)(x-14)}{260}, \qquad L_1(x) = \frac{(x-21)(x-1)}{-91}, \qquad L_2(x) = \frac{(x-14)(x-1)}{140},$$

$$L_0(17) = \frac{-12}{260}, \qquad L_1(17) = \frac{-64}{-91}, \qquad L_2(17) = \frac{48}{140}.$$

11 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(6,1)$, $(7,2)$, $(8,15)$ et $(9,15)$ s'écrit $p(x) = a+b(x-6)+c(x-6)(x-7)+d(x-6)(x-7)(x-8)$. Que vaut c ?

+

− | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : Les coordonnées dans la base de Newton sont les valeurs encadrées dans le tableau des différences divisées ci-dessous:

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-1},x_i]$
0	6	$\boxed{1=a}$			
1	7	2	$\boxed{1=b}$		
2	8	15	13	$\boxed{6=c}$	
3	9	15	0	$-\frac{13}{2}$	$\boxed{-\frac{25}{6}=d}$

12 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(3,3)$, $(8,38)$, $(11,203)$ et $(14,1070)$ s'écrit $p(x) = 3+7(x-3)+6(x-3)(x-8)+3(x-3)(x-8)(x-11)$. En déduire l'équation du polynôme de Newton qui n'interpole que les trois points $(3,3)$, $(8,38)$ et $(11,203)$.

0.0 0.5 1 Cases réservées au correcteur

....

Explication : $p(x) = 3+7(x-3)+6(x-3)(x-8)$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Fonction de Meilleure Approximation ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

13 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ la droite de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-1	0	1
y_i	-2	0	-1

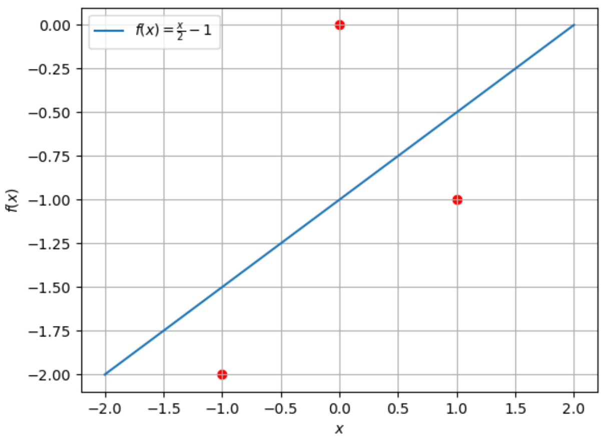
Que vaut α_0 ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n=2$ et il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_1 = 1/2$.



14 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ la parabole de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-1	1	2	1	-3

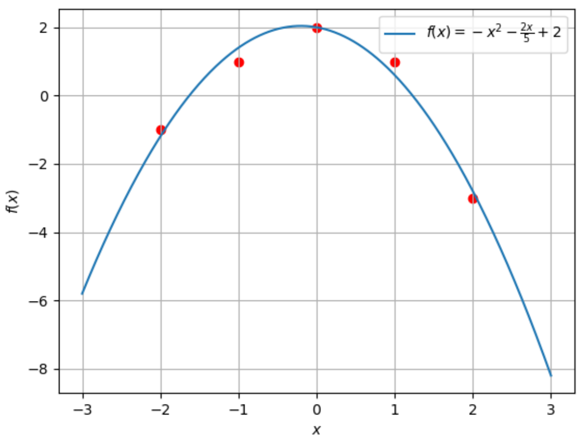
Que vaut α_0?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n=4$ et il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = -2/5$ et $\alpha_2 = -1$.



15 Soit $f(x) = \alpha_0 \cos(x) + \alpha_1 \sin(x)$ la fonction de meilleure approximation des points suivants:

x_i	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
y_i	4	8	0

Que vaut α_1 ?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : On doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\mathscr{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$$
$$(\alpha_0, \alpha_1) \mapsto \mathscr{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i))^2.$$

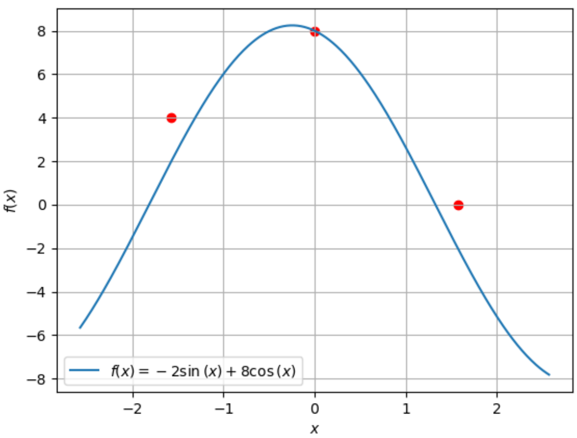
Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche ses points stationnaires. Puisque

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i)) \cos(x_i)\right),$$
$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i)) \sin(x_i)\right),$$

on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i)) \cos(x_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i)) \sin(x_i) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} \cos^2(x_i) & \sum_{i=0}^{n} \cos(x_i)\sin(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} \cos(x_i)\sin(x_i) & \sum_{i=0}^{n} \sin^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \cos(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} y_i \sin(x_i) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 8$ et $\alpha_1 = -2$.



16 Considérons les points

x	1	2	3	4	5	6
y	-1721	30	39	70	132	166

Parmi les droites de la forme $f(x) = -1 + \alpha_1 x$, on cherche celle de meilleure approximation des points donnés. Calculer la valeur de α_1.

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication :

- Notons $K = -1$. On doit minimiser la fonction d'une seule variable

$$\mathscr{E}(\alpha_1) = \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right)^2.$$

- On obtient

$$\mathscr{E}'(\alpha_1) = -2 \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right) x_i.$$

- Ainsi,

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^{5} (y_i - K) x_i}{\sum_{i=0}^{5} x_i^2}.$$

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Statistiques descriptives ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Énoncé commun aux 3 questions suivantes.

On considère le tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2]$ et $\mathbf{y} = [\beta_1, \beta_2]$:

	$\beta_1 = 5$	$\beta_2 = 7$	Effectif marginal de α_i
$\alpha_1 = 1$	$n_{1,1} = 2$	$n_{1,2} = 4$	$n_{1,\cdot} = 6$
$\alpha_2 = 3$	$n_{2,1} = 2$	$n_{2,2} = 1$	$n_{2,\cdot} = 3$
Effectif marginal de β_j	$n_{\cdot,1} = 4$	$n_{\cdot,2} = 5$	$N = 9$

17 Compléter les cases vides du tableau des **fréquences** :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1			
α_2			
Fréq. marg. de β_j			

0.0 0.11 0.22 0.33 0.44 0.56 0.67 0.78 0.89 1 Cases réservées au correcteur

Explication : Les fréquences s'obtiennent en divisant chaque effectif du tableau donné dans l'énoncé par le total $N = 9$. Voici le tableau des fréquences complètes :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1	$f_{1,1} = \frac{2}{9} = 0.222$	$f_{1,2} = \frac{4}{9} = 0.444$	$f_{1,\cdot} = \frac{6}{9} = 0.667$
α_2	$f_{2,1} = \frac{2}{9} = 0.222$	$f_{2,2} = \frac{1}{9} = 0.111$	$f_{2,\cdot} = \frac{3}{9} = 0.333$
Fréq. marg. de β_j	$f_{\cdot,1} = \frac{4}{9} = 0.444$	$f_{\cdot,2} = \frac{5}{9} = 0.556$	1

18 Compléter les tableaux suivants:

Profils en **colonne** $f_{i|j}$ des **fréquences conditionnelles** de α sachant β :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

Profils en **ligne** $f_{j|i}$ des **fréquences conditionnelles** de β sachant α :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

0.0 0.12 0.25 0.38 0.5 0.62 0.75 0.88 1 Cases réservées au correcteur

Explication :

$f_{i|j} = \frac{n_{i,j}}{n_{\cdot,j}}$ pour chaque colonne. Voici le tableau des profils en colonne complètes :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{4}{5} = 0.800$
α_2	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{1}{5} = 0.200$

$f_{j|i} = \frac{n_{i,j}}{n_{i,\cdot}}$ donc voici le tableau des profils en ligne complètes :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{6} = 0.333$	$\frac{4}{6} = 0.667$
α_2	$\frac{2}{3} = 0.667$	$\frac{1}{3} = 0.333$

19 Le coefficient de corrélation linéaire vaut ? (arrondir à deux chiffres derrière la virgule)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	■									
+	0	1	2	**■**	4	5	6	7	8	9
■ −	0	1	**■**	3	4	5	6	7	8	9

Explication : On calcule d'abord

- les moyennes

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i = \frac{\alpha_1 n_{1,\cdot} + \alpha_2 n_{2,\cdot}}{N} = \frac{1\times 6 + 3\times 3}{9} = \frac{15}{9} = 1.667,$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}\beta_j = \frac{\beta_1 n_{\cdot,1} + \beta_2 n_{\cdot,2}}{N} = \frac{5\times 4 + 7\times 5}{9} = \frac{55}{9} = 6.111,$$

- puis les variances

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i^2 - \bar{\mathbf{x}}^2 = \frac{\alpha_1^2 n_{1,\cdot} + \alpha_2^2 n_{2,\cdot}}{N} - \frac{(15)^2}{9^2} = \frac{1^2\times 6 + 3^2\times 3}{9} - \frac{15^2}{9^2} = \frac{33}{9} - \frac{225}{81} = \frac{33\times 9 - 225}{81} = 0.889,$$

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}(\beta_j)^2 - \bar{\mathbf{y}}^2 = \frac{\beta_1^2 n_{\cdot,1} + \beta_2^2 n_{\cdot,2}}{N} - \frac{(55)^2}{9^2} = \frac{5^2\times 4 + 7^2\times 5}{9} - \frac{55^2}{9^2} = \frac{345}{9} - \frac{3025}{81} = \frac{345\times 9 - 3025}{81} = 0.988$$

et enfin la covariance

$$C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_{i,j}(\alpha_i - \bar{\mathbf{x}})(\beta_j - \bar{\mathbf{y}}) = \frac{n_{1,1}(\alpha_1-\bar{\mathbf{x}})(\beta_1-\bar{\mathbf{y}}) + n_{1,2}(\alpha_1-\bar{\mathbf{x}})(\beta_2-\bar{\mathbf{y}}) + n_{2,1}(\alpha_2-\bar{\mathbf{x}})(\beta_1-\bar{\mathbf{y}}) + n_{2,2}(\alpha_2-\bar{\mathbf{x}})(\beta_2-\bar{\mathbf{y}})}{N}$$

$$= \frac{2\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(5-\bar{\mathbf{y}}) + 4\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(7-\bar{\mathbf{y}}) + 2\times(3-\bar{\mathbf{x}})\times(5-\bar{\mathbf{y}}) + 1\times(3-\bar{\mathbf{x}})\times(7-\bar{\mathbf{y}})}{9}$$

$$= -0.296.$$

On trouve alors le coefficient de corrélation en utilisant la formule $r = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{V(\mathbf{x})V(\mathbf{y})}} = -0.316.$

Énoncé commun aux 4 questions suivantes :

Une série statistique est définie partiellement dans le tableau ci-dessous.

x	2	3	4	5	6
y	26	y_1	y_2	y_3	45

On nous dit que l'équation de la droite de régression de y en fonction de x est $y = \frac{26}{5} + \frac{47}{10}x$.

20 Quelle est la variance $V(\mathbf{x})$ de la série **x** ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La variance est calculée en utilisant la formule $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

21 Quelle est la moyenne $\overline{y}$ de la série **y** ?

+ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dizaines
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à la droite de régression, $\overline{y}$ est calculé comme $\overline{y} = \frac{26}{5} + \frac{47}{10} \times 4 = 24$.

22 Quelle est la covariance entre les séries **x** et **y** ?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque la pente de la droite de regression de y par rapport à x est égale à $\gamma_1 = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$, nous pouvons calculer la covariance $C(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en multipliant γ_1 par $V(\mathbf{x})$.

23 Si toutes les valeurs de **x** augmentent de 3, notons $y = q + mx$ la nouvelle équation de la droite de régression de y en fonction x. Que vaut q ?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités
+ .
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dixièmes

Explication : Notons $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ la droite de regression donnée dans l'énoncé. Elle se réécrit aussi comme $y = \overline{y} + \gamma_1(x - \overline{x})$ avec $\gamma_0 = \overline{y} - \gamma_1\overline{x}$. Si on augmente toutes les valeurs de **x** de K, sa moyenne augmente de K et la droite est translatée à droite de K. Ainsi, la pente de la nouvelle droite de régression ne change pas, mais l'ordonnée à l'origine change. La nouvelle équation est donc $y = \overline{y} + \gamma_1(x - (\overline{x} + K)) = \gamma_0 + \gamma_1\overline{x} + \gamma_1(x - (\overline{x} + K)) = (\gamma_0 - \gamma_1 K) + \gamma_1 x$ ainsi $q = \gamma_0 - \gamma_1 K = \frac{26}{5} - \frac{47}{10} \times 3 = -\frac{89}{10} = -8.9$.

Instructions

M1-INFO — UE 731 Remise à niveau - Mathématiques — 7 octobre 2024 Durée : 2h

Sélectionnez les quatre derniers chiffres de votre numéro d'étudiant (par ex., si le numéro est 2200**2681**, cochez 2 sur la première ligne, 6 sur la deuxième, etc.) :

NOM	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Prénom...	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- Une feuille A4 recto-verso manuscrite et une calculatrice sont autorisées. Tout autre document est interdit.
- Veuillez **noircir complètement les cases**.
- Il existe trois types de questions :
  - **Questions à choix unique.**
    Choisissez une seule réponse parmi celles proposées. Des points négatifs seront attribués pour une réponse incorrecte.
  - **Questions ouvertes.**
    Répondez en remplissant un tableau. La correction sera effectuée manuellement.
  - **Questions numériques.**
    La réponse est une valeur numérique à coder. Cochez **exactement un chiffre par ligne.**
    - Exemple d'une question où la réponse est un entier :

$+27 \rightsquigarrow$

■ +	0 1 ■ 3 4 5 6 7 8 9	← Dizaines
−	0 1 2 3 4 5 6 ■ 8 9	← Unités

    - Exemple d'une question où la réponse est un nombre décimal :

$-5.9 \rightsquigarrow$

	0 1 2 3 4 ■ 6 7 8 9	← Unités
+	.	
■ −	0 1 2 3 4 5 6 7 8 ■	← Dixièmes

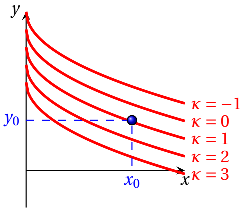
Fonctions de deux variables

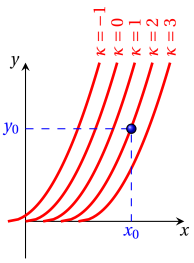
1 Soit la fonction $f(x, y) = \log\left(8x^4 - y^2\right)$. Parmi les réponses suivantes, laquelle est égale à $\partial_x f$?

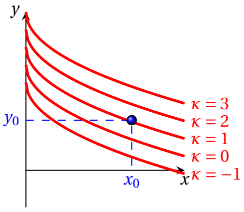
- [ ] $\dfrac{1}{8x^4 - y^2}$
- [ ] $8x^4 - y^2$
- [ ] $-\dfrac{2y}{8x^4 - y^2}$
- [x] $\dfrac{32x^3}{8x^4 - y^2}$
- [ ] $32x^3$
- [ ] Autre

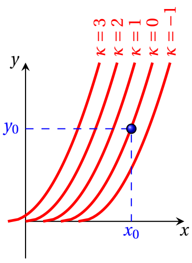
Explication : $f(x, y) = \ln(bx^c - ay^2)$ donc la dérivée par rapport à x est $\frac{bcx^{c-1}}{bx^c - ay^2}$.

2 Parmi les graphes ci-dessous, lequel pourrait représenter les lignes de niveau d'une fonction $f(x, y)$ telle que $\partial_x f(x_0, y_0) < 0$ et $\partial_y f(x_0, y_0) < 0$?

- [x] 

- [ ] 

- [ ] 

- [ ] 

Explication : Comme $\partial_x f(x_0, y_0) \le 0$, la fonction $h(x) = f(x, y_0)$ est décroissante. Puisque $\partial_y f(x_0, y_0) \le 0$, la fonction $g(y) = f(x_0, y)$ est décroissante.

3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = xy + x + y$. Calculer l'équation du plan tangent à f en $(-3, 3)$.

- [ ] $xy + 5x - y + 18$
- [ ] $4x - 2y - 9$
- [ ] $4x + 3$
- [ ] $4x - 2y + 18$
- [x] $4x - 2y + 9$
- [ ] Autre:

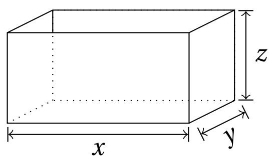
Explication : $f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + (x - x_0)\partial_x f(x_0, y_0) + (y - y_0)\partial_y f(x_0, y_0)$.

4 Soient $f(x, y) = 3x + 12y$, $x(u, v) = uv$ et $y(u, v) = u - v$. On définit $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$. Calculer $\partial_u g$.

- [x] $3v + 12$
- [ ] $3u - 12$
- [ ] $3v$
- [ ] $12u$
- [ ] 3
- [ ] Autre:

Explication : $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$.

5 Une boîte *ouverte* a la forme d'un parallélépipède. On cherche les valeurs $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V fixé égale à 108 cm^3. On doit donc minimiser la fonction $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ sachant que $xyz = 108$. Que vaut S dans son minimum (en cm^2)?



0	■ 1	2	3	4	5	6	7	8	9
■ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	■ 8	9

Explication : On a $x, y, z > 0$. On pose $\sigma(x, y) = S\left(x, y, \frac{108}{xy}\right) = xy + \frac{216}{y} + \frac{216}{x}$.
Calcul des points critiques:

$$\nabla\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} y - \frac{216}{x^2} \\ x - \frac{216}{y^2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = (6, 6).$$

Il existe un seul point critique qui est $(6, 6)$.
Nature des points critiques:

$$H_\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{432}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{432}{y^3} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad H_\sigma(6, 6) = \begin{pmatrix} 2 > 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det H_\sigma(6, 6) > 0.$$

On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a $S\left(6, 6, \frac{108}{36}\right) = \sigma(6, 6) = 108$.

6 Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que (x_0, y_0) est un point critique et que la matrice Hessienne évaluée en ce point est

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la nature du point critique ?

- ■ c'est un point selle
- ☐ c'est un minimum
- ☐ la matrice Hessienne ne permet pas de conclure
- ☐ c'est un maximum

Explication :

- Le déterminant de la matrice Hessienne est $\det(H_f) = (2) \times (-2) - (-1)^2 = -5$.
- Puisque $\det(H_f) = -5$ et que $\partial_{xx} f(x_0, y_0) = 2$, on en conclut que c'est un point selle.

7 On se donne la fonction

$$f(x, y) = \sqrt{\left(10^2 x - \frac{10^3}{y}\right)^2 + 10^4}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $xy = 10^s$. Que vaut s?

■ + ☐ − ☐ 0 ■ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication :

$$f(x, y) = \sqrt{\left(10^2 x - \frac{10^3}{y}\right)^2 + 10^4}$$

$$\partial_x f(x, y) = \frac{2\left(10^2 x - \frac{10^3}{y}\right) 10^2}{2\sqrt{\left(10^2 x - \frac{10^3}{y}\right)^2 + 10^4}} = 0 \qquad \text{ssi } \left(10^2 x - \frac{10^3}{y}\right) = 0$$

$$\partial_y f(x, y) = \frac{2\left(10^2 x - \frac{10^3}{y}\right) \frac{-10^3}{y^2}}{2\sqrt{\left(10^2 x - \frac{10^3}{y}\right)^2 + 10^4}} \qquad \text{ssi } \left(10^2 x - \frac{10^3}{y}\right) = 0$$

Donc $xy = \dfrac{10^3}{10^2} = 10^1$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Interpolation** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

8 Soit $f\colon [1;17] \to \mathbb{R}$ la **spline linéaire** qui interpole les points $f(1) = -31$, $f(8) = 11$, $f(13) = -19$, $f(17) = -39$. Que vaut $f(3)$?

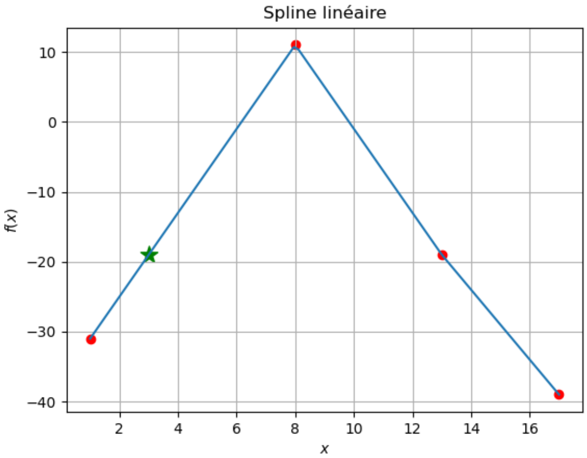
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Explication : La spline linéaire $f\colon [1;17] \to \mathbb{R}$ a pour équation :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{11-(-31)}{8-1}(x-1) + (-31) & \text{si } 1 \le x \le 8 \\ \frac{-19-(11)}{13-8}(x-8) + (11) & \text{si } 8 \le x \le 13 \\ \frac{-39-(-19)}{17-13}(x-13) + (-19) & \text{si } 13 \le x \le 17 \end{cases}$$

En substituant $x = 3$, on trouve :

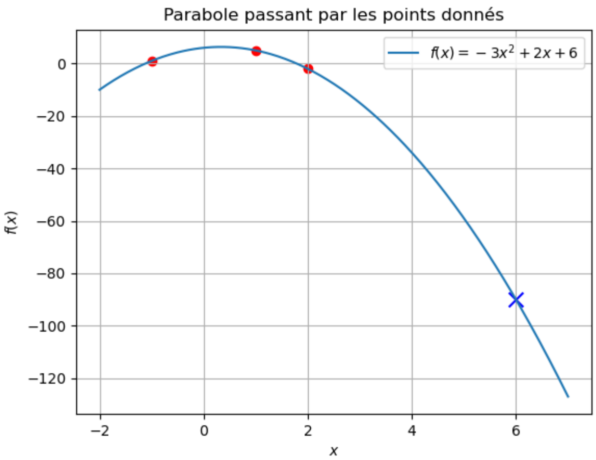
$$f(3) = -19$$



9 Soit f l'unique polynome qui interpole les points $(-1;1)$, $(1;5)$ et $(2;-2)$. Que vaut $f(6)$?

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	■ 9
■ −	■ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Explication : Le seul polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui passe par les trois points est la parabole d'équation $-3x^2+2x+6 = \frac{(x-2)(x-1)}{6} - \frac{5(x-2)(x+1)}{2} - \frac{2(x-1)(x+1)}{3}$. Pour la calculer l'équation de ce polynome on peut utiliser soit la méthode directe (résolution du système linéaire pour trouver les coefficients dans la base canonique), soit l'écrire dans la base de Lagrange ou encore dans la base de Newton.



10 Dans la base de Lagrange, le polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui interpole les trois points $(1,26)$, $(14,17)$ et $(21,34)$ s'écrit $p(x) = 26L_0(x)+17L_1(x)+34L_2(x)$. Que vaut $L_0(17)$?

☐ $\frac{12}{65}$ ■ $-\frac{3}{65}$ ☐ $\frac{12}{35}$ ☐ $-\frac{16}{65}$ ☐ $-\frac{16}{35}$ ☐ $-\frac{3}{35}$ ☐ $\frac{12}{91}$ ☐ $-\frac{48}{91}$ ☐ $\frac{64}{91}$ ☐ Autre

Explication :

$$L_0(x) = \frac{(x-21)(x-14)}{260}, \quad L_1(x) = \frac{(x-21)(x-1)}{-91}, \quad L_2(x) = \frac{(x-14)(x-1)}{140},$$

$$L_0(17) = \frac{-12}{260}, \quad L_1(17) = \frac{-64}{-91}, \quad L_2(17) = \frac{48}{140}.$$

11 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(6,1)$, $(7,2)$, $(8,33)$ et $(9,33)$ s'écrit $p(x) = a+b(x-6)+c(x-6)(x-7)+d(x-6)(x-7)(x-8)$. Que vaut c ?

■ +	0	■ 1	2	3	4	5	6	7	8	9
−	0	1	2	3	4	■ 5	6	7	8	9

Explication : Les coordonnées dans la base de Newton sont les valeurs encadrées dans le tableau des différences divisées ci-dessous:

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-1},x_i]$
0	6	$\boxed{1=a}$			
1	7	2	$\boxed{1=b}$		
2	8	33	31	$\boxed{15=c}$	
3	9	33	0	$-\frac{31}{2}$	$\boxed{-\frac{61}{6}=d}$

12 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(1,5)$, $(6,25)$, $(9,85)$ et $(12,775)$ s'écrit $p(x) = 5 + 4(x-1) + 2(x-1)(x-6) + 3(x-1)(x-6)(x-9)$. En déduire l'équation du polynôme de Newton qui n'interpole que les trois points $(1,5)$, $(6,25)$ et $(9,85)$.

0.0 0.5 1 Cases réservées au correcteur

....

Explication : $p(x) = 5 + 4(x-1) + 2(x-1)(x-6)$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Fonction de Meilleure Approximation** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

13 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ la droite de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-1	0	1
y_i	2	0	4

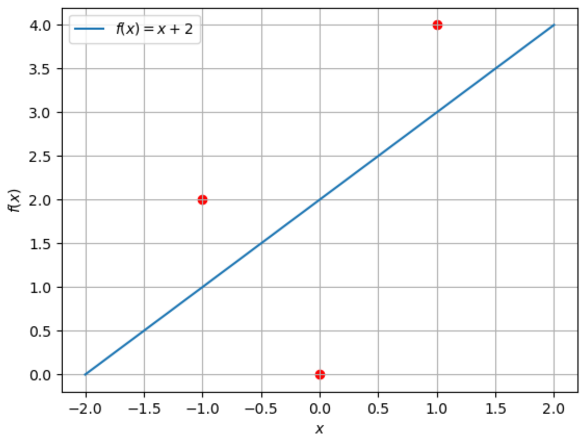
Que vaut α_0 ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n = 2$ et il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 2$ et $\alpha_1 = 1$.



14 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ la parabole de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-3	1	2	1	-1

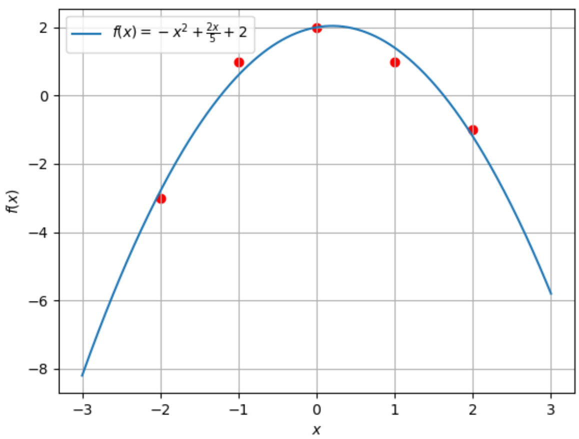
Que vaut α_2?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n=4$ et il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 2/5$ et $\alpha_2 = -1$.



15 Soit $f(x) = \alpha_0 \cos(x) + \alpha_1 \sin(x)$ la fonction de meilleure approximation des points suivants:

x_i	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
y_i	5	6	0

Que vaut α_0 ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : On doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\mathscr{E}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$$
$$(\alpha_0, \alpha_1) \mapsto \mathscr{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i))^2.$$

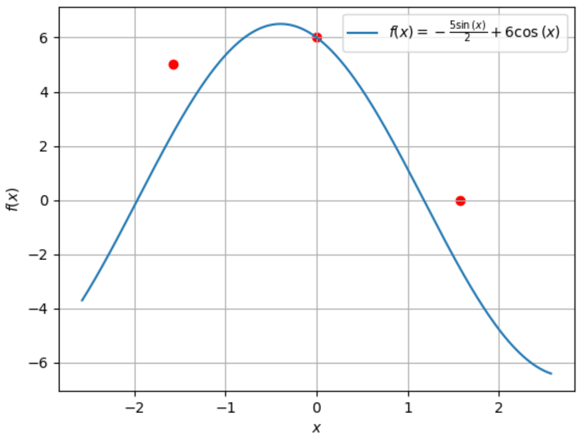
Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche ses points stationnaires. Puisque

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i))\cos(x_i)\right),$$
$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i))\sin(x_i)\right),$$

on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i))\cos(x_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i))\sin(x_i) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} \cos^2(x_i) & \sum_{i=0}^{n} \cos(x_i)\sin(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} \cos(x_i)\sin(x_i) & \sum_{i=0}^{n} \sin^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \cos(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} y_i \sin(x_i) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 6$ et $\alpha_1 = -\frac{5}{2}$.



16 Considérons les points

x	1	2	3	4	5	6
y	-1431	36	38	91	111	157

Parmi les droites de la forme $f(x) = -3 + \alpha_1 x$, on cherche celle de meilleure approximation des points donnés. Calculer la valeur de α_1.

■ + | ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ■ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9
☐ −

Explication :

- Notons $K = -3$. On doit minimiser la fonction d'une seule variable

$$\mathscr{E}(\alpha_1) = \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right)^2.$$

- On obtient

$$\mathscr{E}'(\alpha_1) = -2 \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right) x_i.$$

- Ainsi,

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^{5} (y_i - K) x_i}{\sum_{i=0}^{5} x_i^2}.$$

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Statistiques descriptives** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Énoncé commun aux 3 questions suivantes.

On considère le tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2]$ et $\mathbf{y} = [\beta_1, \beta_2]$:

	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	Effectif marginal de α_i
$\alpha_1 = 1$	$n_{1,1} = 0$	$n_{1,2} = 1$	$n_{1,\cdot} = 1$
$\alpha_2 = 2$	$n_{2,1} = 2$	$n_{2,2} = 1$	$n_{2,\cdot} = 3$
Effectif marginal de β_j	$n_{\cdot,1} = 2$	$n_{\cdot,2} = 2$	$N = 4$

17 Compléter les cases vides du tableau des **fréquences** :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1			
α_2			
Fréq. marg. de β_j			

0.0 0.11 0.22 0.33 0.44 0.56 0.67 0.78 0.89 1 Cases réservées au correcteur

Explication : Les fréquences s'obtiennent en divisant chaque effectif du tableau donné dans l'énoncé par le total $N = 4$. Voici le tableau des fréquences complètes :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1	$f_{1,1} = \frac{0}{4} = 0.000$	$f_{1,2} = \frac{1}{4} = 0.250$	$f_{1,\cdot} = \frac{1}{4} = 0.250$
α_2	$f_{2,1} = \frac{2}{4} = 0.500$	$f_{2,2} = \frac{1}{4} = 0.250$	$f_{2,\cdot} = \frac{3}{4} = 0.750$
Fréq. marg. de β_j	$f_{\cdot,1} = \frac{2}{4} = 0.500$	$f_{\cdot,2} = \frac{2}{4} = 0.500$	1

18 Compléter les tableaux suivants:

Profils en **colonne** $f_{i|j}$ des **fréquences conditionnelles** de α sachant β :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

Profils en **ligne** $f_{j|i}$ des **fréquences conditionnelles** de β sachant α :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

0.0 0.12 0.25 0.38 0.5 0.62 0.75 0.88 1 Cases réservées au correcteur

Explication :

$f_{i|j} = \frac{n_{i,j}}{n_{\cdot,j}}$ pour chaque colonne. Voici le tableau des profils en colonne complètes :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{0}{2} = 0.000$	$\frac{1}{2} = 0.500$
α_2	$\frac{2}{2} = 1.000$	$\frac{1}{2} = 0.500$

$f_{j|i} = \frac{n_{i,j}}{n_{i,\cdot}}$ donc voici le tableau des profils en ligne complètes :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{0}{1} = 0.000$	$\frac{1}{1} = 1.000$
α_2	$\frac{2}{3} = 0.667$	$\frac{1}{3} = 0.333$

19 Le coefficient de corrélation linéaire vaut ? (arrondir à deux chiffres derrière la virgule)

	■ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	.									
+	0	1	2	3	4	■ 5	6	7	8	9
■ −	0	1	2	3	4	5	6	7	■ 8	9

Explication : On calcule d'abord

- les moyennes

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i = \frac{\alpha_1 n_{1,\cdot} + \alpha_2 n_{2,\cdot}}{N} = \frac{1\times 1 + 2\times 3}{4} = \frac{7}{4} = 1.750,$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}\beta_j = \frac{\beta_1 n_{\cdot,1} + \beta_2 n_{\cdot,2}}{N} = \frac{2\times 2 + 3\times 2}{4} = \frac{10}{4} = 2.500,$$

- puis les variances

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i^2 - \bar{\mathbf{x}}^2 = \frac{\alpha_1^2 n_{1,\cdot} + \alpha_2^2 n_{2,\cdot}}{N} - \frac{(7)^2}{4^2} = \frac{1^2\times 1 + 2^2\times 3}{4} - \frac{7^2}{4^2} = \frac{13}{4} - \frac{49}{16} = \frac{13\times 4 - 49}{16} = 0.188,$$

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}(\beta_j)^2 - \bar{\mathbf{y}}^2 = \frac{\beta_1^2 n_{\cdot,1} + \beta_2^2 n_{\cdot,2}}{N} - \frac{(10)^2}{4^2} = \frac{2^2\times 2 + 3^2\times 2}{4} - \frac{10^2}{4^2} = \frac{26}{4} - \frac{100}{16} = \frac{26\times 4 - 100}{16} = 0.250$$

et enfin la covariance

$$C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_{i,j}(\alpha_i - \bar{\mathbf{x}})(\beta_j - \bar{\mathbf{y}}) = \frac{n_{1,1}(\alpha_1-\bar{\mathbf{x}})(\beta_1-\bar{\mathbf{y}}) + n_{1,2}(\alpha_1-\bar{\mathbf{x}})(\beta_2-\bar{\mathbf{y}}) + n_{2,1}(\alpha_2-\bar{\mathbf{x}})(\beta_1-\bar{\mathbf{y}}) + n_{2,2}(\alpha_2-\bar{\mathbf{x}})(\beta_2-\bar{\mathbf{y}})}{N}$$

$$= \frac{0\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(2-\bar{\mathbf{y}}) + 1\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(3-\bar{\mathbf{y}}) + 2\times(2-\bar{\mathbf{x}})\times(2-\bar{\mathbf{y}}) + 1\times(2-\bar{\mathbf{x}})\times(3-\bar{\mathbf{y}})}{4}$$

$$= -0.125.$$

On trouve alors le coefficient de corrélation en utilisant la formule $r = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{V(\mathbf{x})V(\mathbf{y})}} = -0.577.$

Énoncé commun aux 4 questions suivantes :

Une série statistique est définie partiellement dans le tableau ci-dessous.

x	2	3	4	5	6
y	26	y_1	y_2	y_3	45

On nous dit que l'équation de la droite de régression de y en fonction de x est $y = \frac{8}{5} + \frac{23}{5}x$.

20 Quelle est la variance $V(\mathbf{x})$ de la série $\mathbf{x}$?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La variance est calculée en utilisant la formule $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

21 Quelle est la moyenne $\overline{y}$ de la série $\mathbf{y}$?

+ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dizaines
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à la droite de régression, $\overline{y}$ est calculé comme $\overline{y} = \frac{8}{5} + \frac{23}{5} \times 4 = 20$.

22 Quelle est la covariance entre les séries $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque la pente de la droite de regression de y par rapport à x est égale à $\gamma_1 = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$, nous pouvons calculer la covariance $C(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en multipliant γ_1 par $V(\mathbf{x})$.

23 Si toutes les valeurs de y augmentent de 2, notons $y = q + mx$ la nouvelle équation de la droite de régression de y en fonction x. Que vaut q ?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités
+ .
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dixièmes

Explication : Notons $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ la droite de regression donnée dans l'énoncé. Elle se réécrit aussi comme $y = \overline{y} + \gamma_1(x - \overline{x})$ avec $\gamma_0 = \overline{y} - \gamma_1\overline{x}$. Si on augmente toutes les valeurs de $\mathbf{y}$ de K, sa moyenne augmente de K et la droite est translatée vers le haut de K. Ainsi, la pente de la nouvelle droite de régression ne change pas, mais l'ordonnée à l'origine augmente de K. La nouvelle équation est donc $y = \overline{y} + K + \gamma_1(x - \overline{x}) = (\gamma_0 + K) + \gamma_1 x$ ainsi $q = \gamma_0 + K = \frac{8}{5} + 2 = \frac{18}{5} = 3.6$.

Instructions

M1-INFO — UE 731 Remise à niveau - Mathématiques — 7 octobre 2024 Durée : 2h

Sélectionnez les quatre derniers chiffres de votre numéro d'étudiant (par ex., si le numéro est 2200**2681**, cochez 2 sur la première ligne, 6 sur la deuxième, etc.) :

NOM	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Prénom..	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Une feuille A4 recto-verso manuscrite et une calculatrice sont autorisées. Tout autre document est interdit.
- Veuillez **noircir complètement les cases**.
- Il existe trois types de questions :
  - **Questions à choix unique.**
    Choisissez une seule réponse parmi celles proposées. Des points négatifs seront attribués pour une réponse incorrecte.
  - **Questions ouvertes.**
    Répondez en remplissant un tableau. La correction sera effectuée manuellement.
  - **Questions numériques.**
    La réponse est une valeur numérique à coder. Cochez **exactement un chiffre par ligne.**
    - Exemple d'une question où la réponse est un entier :

+27 ⇝

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	← Dizaines
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	← Unités

    - Exemple d'une question où la réponse est un nombre décimal :

−5.9 ⇝

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	← Unités
+	.										
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	← Dixièmes

Fonctions de deux variables

1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que (x_0, y_0) est un point critique et que la matrice Hessienne évaluée en ce point est

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

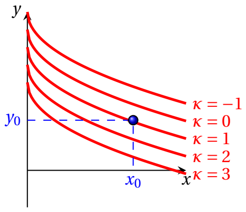
Quelle est la nature du point critique ?

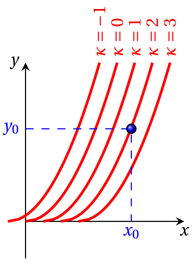
- ☐ la matrice Hessienne ne permet pas de conclure
- ☐ c'est un maximum
- ☐ c'est un point selle
- ■ c'est un minimum

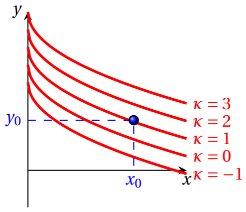
Explication :

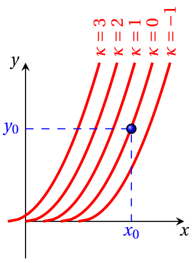
- Le déterminant de la matrice Hessienne est $\det(H_f) = (1) \times (2) - (1)^2 = 1$.
- Puisque $\det(H_f) = 1$ et que $\partial_{xx} f(x_0, y_0) = 1$, on en conclut que c'est un minimum.

2 Parmi les graphes ci-dessous, lequel pourrait représenter les lignes de niveau d'une fonction $f(x, y)$ telle que $\partial_x f(x_0, y_0) < 0$ et $\partial_y f(x_0, y_0) < 0$?

■ 

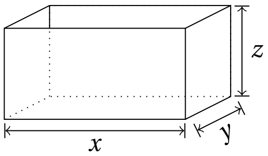
☐ 

☐ 

☐ 

Explication : Comme $\partial_x f(x_0, y_0) \le 0$, la fonction $h(x) = f(x, y_0)$ est décroissante. Puisque $\partial_y f(x_0, y_0) \le 0$, la fonction $g(y) = f(x_0, y)$ est décroissante.

3 Une boîte *ouverte* a la forme d'un parallélépipède. On cherche les valeurs $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V fixé égale à 32 cm^3. On doit donc minimiser la fonction $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ sachant que $xyz = 32$. Que vaut S dans son minimum (en cm^2)?



0	1	2	3	■ 4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	■ 8	9

Explication : On a $x, y, z > 0$. On pose $\sigma(x, y) = S\left(x, y, \frac{32}{xy}\right) = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$.
Calcul des points critiques:

$$\nabla\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} y - \frac{64}{x^2} \\ x - \frac{64}{y^2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = (4, 4).$$

Il existe un seul point critique qui est $(4, 4)$.
Nature des points critiques:

$$H_\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{128}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{128}{y^3} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad H_\sigma(4, 4) = \begin{pmatrix} 2 > 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det H_\sigma(4, 4) > 0.$$

On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a $S\left(4, 4, \frac{32}{16}\right) = \sigma(4, 4) = 48$.

4 On se donne la fonction

$$f(x,y)=\sqrt{\left(10^{-4}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)^2+10^5}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $xy=10^s$. Que vaut s?

■ + ☐ − ☐ 0 ■ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication :

$$f(x,y)=\sqrt{\left(10^{-4}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)^2+10^5}$$

$$\partial_x f(x,y)=\frac{2\left(10^{-4}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)10^{-4}}{2\sqrt{\left(10^{-4}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)^2+10^5}}=0 \qquad \text{ssi } \left(10^{-4}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)=0$$

$$\partial_y f(x,y)=\frac{2\left(10^{-4}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)\frac{-10^{-3}}{y^2}}{2\sqrt{\left(10^{-4}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)^2+10^5}} \qquad \text{ssi } \left(10^{-4}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)=0$$

Donc $xy=\frac{10^{-3}}{10^{-4}}=10^1$.

5 Soient $f(x,y)=3x+14y$, $x(u,v)=uv$ et $y(u,v)=u+v$. On définit $g(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$. Calculer $\partial_u g$.

☐ 3 ☐ $14u$ ■ $3v+14$ ☐ $3v$ ☐ $3u+14$ ☐ Autre:

Explication : $\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$.

6 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=x^3+xy+y^2$. Calculer l'équation du plan tangent à f en $(-3,1)$.

☐ $x^3+xy+28x+y^2-y+85$ ☐ $28x-y+85$ ☐ $28x+55$
☐ $28x-y-29$ ■ $28x-y+56$ ☐ Autre:

Explication : $f(x,y)\simeq f(x_0,y_0)+(x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0)+(y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0)$.

7 Soit la fonction $f(x,y)=e^{7x^4-2y^2}$. Parmi les réponses suivantes, laquelle est égale à $\partial_y f$?

☐ $28e^{7x^4-2y^2}$ ■ $-4ye^{7x^4-2y^2}$ ☐ $28x^3e^{7x^4-2y^2}$ ☐ $7e^{7x^4-2y^2}$ ☐ $28ye^{7x^4-2y^2}$ ☐ Autre

Explication : $f(x,y)=e^{bx^c-ay^d}$ donc la dérivée par rapport à y est $-ady^{d-1}e^{bx^c-ay^d}$.

✎ ✎ ✎ Interpolation ✎ ✎ ✎

8 Soit $f\colon [1;17] \to \mathbb{R}$ la **spline linéaire** qui interpole les points $f(1) = -21$, $f(8) = 14$, $f(13) = -21$, $f(17) = -9$. Que vaut $f(6)$?

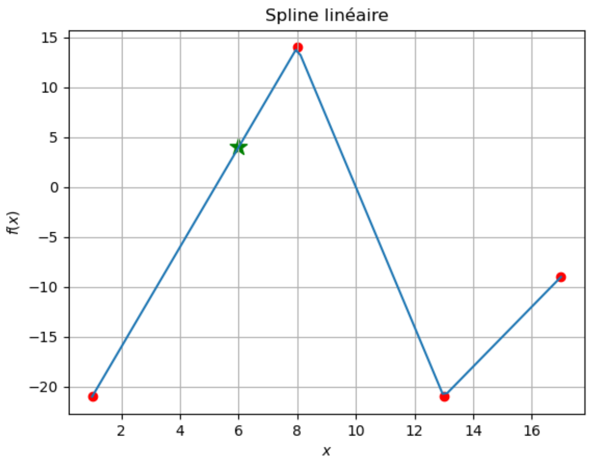
+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La spline linéaire $f\colon [1;17] \to \mathbb{R}$ a pour équation :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{14-(-21)}{8-1}(x-1)+(-21) & \text{si } 1 \le x \le 8 \\ \frac{-21-(14)}{13-8}(x-8)+(14) & \text{si } 8 \le x \le 13 \\ \frac{-9-(-21)}{17-13}(x-13)+(-21) & \text{si } 13 \le x \le 17 \end{cases}$$

En substituant $x = 6$, on trouve :

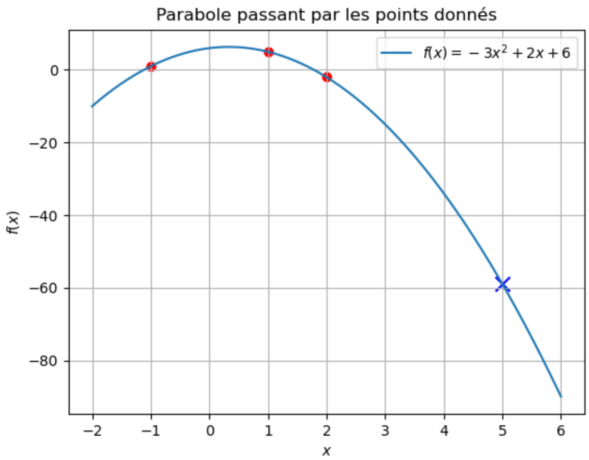
$$f(6) = 4$$



9 Soit f l'unique polynome qui interpole les points $(-1;1)$, $(1;5)$ et $(2;-2)$. Que vaut $f(5)$?

☐ +	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	■ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9
■ −	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	■ 9

Explication : Le seul polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui passe par les trois points est la parabole d'équation $-3x^2+2x+6 = \frac{(x-2)(x-1)}{6} - \frac{5(x-2)(x+1)}{2} - \frac{2(x-1)(x+1)}{3}$. Pour la calculer l'équation de ce polynome on peut utiliser soit la méthode directe (résolution du système linéaire pour trouver les coefficients dans la base canonique), soit l'écrire dans la base de Lagrange ou encore dans la base de Newton.



10 Dans la base de Lagrange, le polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui interpole les trois points $(1,22)$, $(14,17)$ et $(21,34)$ s'écrit $p(x) = 22L_0(x)+17L_1(x)+34L_2(x)$. Que vaut $L_1(20)$?

☐ $-\frac{19}{260}$ ☐ $\frac{57}{70}$ ■ $\frac{19}{91}$ ☐ $-\frac{3}{70}$ ☐ $-\frac{3}{130}$ ☐ $-\frac{19}{140}$ ☐ $\frac{6}{91}$ ☐ $-\frac{114}{91}$ ☐ $\frac{57}{130}$ ☐ Autre

Explication :

$$L_0(x) = \frac{(x-21)(x-14)}{260}, \qquad L_1(x) = \frac{(x-21)(x-1)}{-91}, \qquad L_2(x) = \frac{(x-14)(x-1)}{140},$$

$$L_0(20) = \frac{-6}{260}, \qquad L_1(20) = \frac{-19}{-91}, \qquad L_2(20) = \frac{114}{140}.$$

11 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(1,2)$, $(5,22)$, $(9,170)$ et $(11,772)$ s'écrit $p(x) = a+b(x-1)+c(x-1)(x-5)+d(x-1)(x-5)(x-9)$. Que vaut c ?

■ +										
☐ −	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	■ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

Explication : Les coordonnées dans la base de Newton sont les valeurs encadrées dans le tableau des différences divisées ci-dessous:

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-1},x_i]$
0	1	$\boxed{2=a}$			
1	5	22	$\boxed{5=b}$		
2	9	170	37	$\boxed{4=c}$	
3	11	772	301	44	$\boxed{4=d}$

12 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(9,7)$, $(14,42)$, $(19,377)$ et $(21,1099)$ s'écrit $p(x) = 7+7(x-9)+6(x-9)(x-14)+3(x-9)(x-14)(x-19)$. En déduire l'équation du polynôme de Newton qui n'interpole que les trois points $(9,7)$, $(14,42)$ et $(19,377)$.

0.0 0.5 1 Cases réservées au correcteur

....

Explication : $p(x) = 7+7(x-9)+6(x-9)(x-14)$.

Fonction de Meilleure Approximation

13 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ la droite de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-1	0	1
y_i	-4	0	-2

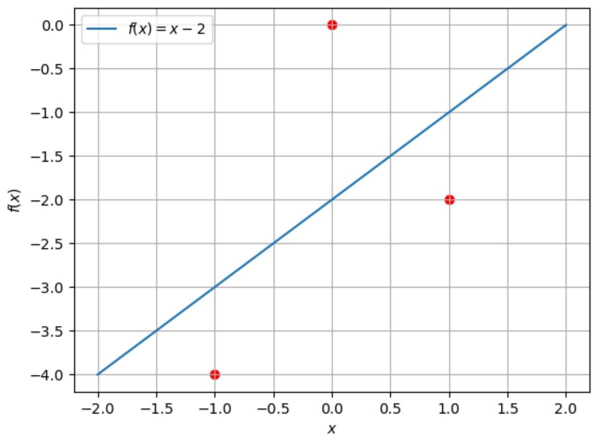
Que vaut α_0 ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n=2$ et il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = -2$ et $\alpha_1 = 1$.



14 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ la parabole de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	3	-1	-2	-1	1

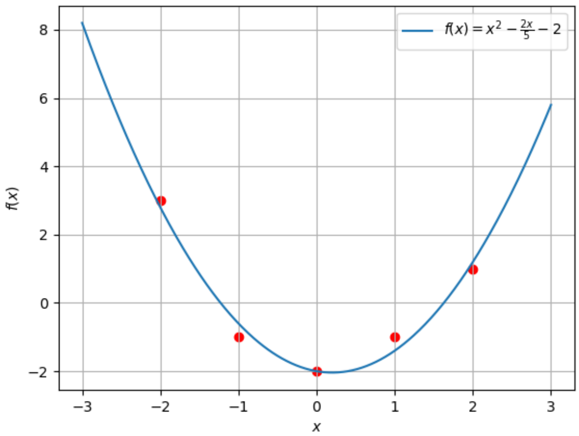
Que vaut α_0?

☐ + ☒ − ☐ 0 ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication : $n = 4$ et il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = -2$, $\alpha_1 = -2/5$ et $\alpha_2 = 1$.



15 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(x)$ la fonction de meilleure approximation des points suivants :

x_i	e^1	e^2	e^3
y_i	6	12	36

Que vaut α_0 ?

+ | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

− | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : On doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

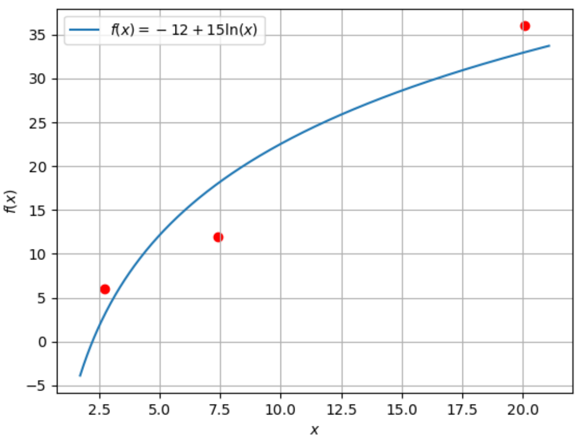
$$\mathscr{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$$

$$(\alpha_0, \alpha_1) \mapsto \mathscr{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^{2} \left(y_i - (\alpha_0\varphi_0(x_i) + \alpha_1\varphi_1(x_i))\right)^2.$$

où $\varphi_0(x) = 1$ et $\varphi_1(x) = \ln(x)$. On doit donc résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} \sum \varphi_0^2(x_i) & \sum \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) \\ \sum \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) & \sum \varphi_1^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i\varphi_0(x_i) \\ \sum y_i\varphi_1(x_i) \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^2 1 & \sum_{i=0}^2 \ln(x_i) \\ \sum_{i=0}^2 \ln(x_i) & \sum_{i=0}^2 \ln^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^2 y_i \\ \sum_{i=0}^2 y_i \ln(x_i) \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 54 \\ 138 \end{bmatrix}$$

Ainsi $\alpha_0 =$ -12 et $\alpha_1 = 15$.



16 Considérons les points

x	1	2	3	4	5	6
y	-1863	5	17	74	124	199

Parmi les droites de la forme $f(x) = 1 + \alpha_1 x$, on cherche celle de meilleure approximation des points donnés. Calculer la valeur de α_1.

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication :

- Notons $K = 1$. On doit minimiser la fonction d'une seule variable

$$\mathscr{E}(\alpha_1) = \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right)^2.$$

- On obtient

$$\mathscr{E}'(\alpha_1) = -2 \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right) x_i.$$

- Ainsi,

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^{5} (y_i - K) x_i}{\sum_{i=0}^{5} x_i^2}.$$

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Statistiques descriptives ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Énoncé commun aux 3 questions suivantes.

On considère le tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2]$ et $\mathbf{y} = [\beta_1, \beta_2]$:

	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	Effectif marginal de α_i
$\alpha_1 = 1$	$n_{1,1} = 2$	$n_{1,2} = 1$	$n_{1,\cdot} = 3$
$\alpha_2 = 2$	$n_{2,1} = 2$	$n_{2,2} = 3$	$n_{2,\cdot} = 5$
Effectif marginal de β_j	$n_{\cdot,1} = 4$	$n_{\cdot,2} = 4$	$N = 8$

17 Compléter les cases vides du tableau des **fréquences** :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1			
α_2			
Fréq. marg. de β_j			

0.0 0.11 0.22 0.33 0.44 0.56 0.67 0.78 0.89 1 Cases réservées au correcteur

Explication : Les fréquences s'obtiennent en divisant chaque effectif du tableau donné dans l'énoncé par le total $N = 8$. Voici le tableau des fréquences complètes :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1	$f_{1,1} = \frac{2}{8} = 0.250$	$f_{1,2} = \frac{1}{8} = 0.125$	$f_{1,\cdot} = \frac{3}{8} = 0.375$
α_2	$f_{2,1} = \frac{2}{8} = 0.250$	$f_{2,2} = \frac{3}{8} = 0.375$	$f_{2,\cdot} = \frac{5}{8} = 0.625$
Fréq. marg. de β_j	$f_{\cdot,1} = \frac{4}{8} = 0.500$	$f_{\cdot,2} = \frac{4}{8} = 0.500$	1

18 Compléter les tableaux suivants:

Profils en **colonne** $f_{i|j}$ des **fréquences conditionnelles** de α sachant β :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

Profils en **ligne** $f_{j|i}$ des **fréquences conditionnelles** de β sachant α :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

0.0 0.12 0.25 0.38 0.5 0.62 0.75 0.88 1 Cases réservées au correcteur

Explication :

$f_{i|j} = \frac{n_{i,j}}{n_{\cdot,j}}$ pour chaque colonne. Voici le tableau des profils en colonne complètes :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{1}{4} = 0.250$
α_2	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{3}{4} = 0.750$

$f_{j|i} = \frac{n_{i,j}}{n_{i,\cdot}}$ donc voici le tableau des profils en ligne complètes :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{3} = 0.667$	$\frac{1}{3} = 0.333$
α_2	$\frac{2}{5} = 0.400$	$\frac{3}{5} = 0.600$

19 Le coefficient de corrélation linéaire vaut ? (arrondir à deux chiffres derrière la virgule)

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

.

+ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : On calcule d'abord

- les moyennes

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i = \frac{\alpha_1 n_{1,\cdot} + \alpha_2 n_{2,\cdot}}{N} = \frac{1\times 3 + 2\times 5}{8} = \frac{13}{8} = 1.625,$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}\beta_j = \frac{\beta_1 n_{\cdot,1} + \beta_2 n_{\cdot,2}}{N} = \frac{2\times 4 + 3\times 4}{8} = \frac{20}{8} = 2.500,$$

- puis les variances

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i^2 - \bar{\mathbf{x}}^2 = \frac{\alpha_1^2 n_{1,\cdot} + \alpha_2^2 n_{2,\cdot}}{N} - \frac{(13)^2}{8^2} = \frac{1^2\times 3 + 2^2\times 5}{8} - \frac{13^2}{8^2} = \frac{23}{8} - \frac{169}{64} = \frac{23\times 8 - 169}{64} = 0.234,$$

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}(\beta_j)^2 - \bar{\mathbf{y}}^2 = \frac{\beta_1^2 n_{\cdot,1} + \beta_2^2 n_{\cdot,2}}{N} - \frac{(20)^2}{8^2} = \frac{2^2\times 4 + 3^2\times 4}{8} - \frac{20^2}{8^2} = \frac{52}{8} - \frac{400}{64} = \frac{52\times 8 - 400}{64} = 0.250$$

et enfin la covariance

$$C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_{i,j}(\alpha_i - \bar{\mathbf{x}})(\beta_j - \bar{\mathbf{y}}) = \frac{n_{1,1}(\alpha_1 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_1 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{1,2}(\alpha_1 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_2 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{2,1}(\alpha_2 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_1 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{2,2}(\alpha_2 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_2 - \bar{\mathbf{y}})}{N}$$

$$= \frac{2\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(2-\bar{\mathbf{y}}) + 1\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(3-\bar{\mathbf{y}}) + 2\times(2-\bar{\mathbf{x}})\times(2-\bar{\mathbf{y}}) + 3\times(2-\bar{\mathbf{x}})\times(3-\bar{\mathbf{y}})}{8}$$

$= 0.062.$

On trouve alors le coefficient de corrélation en utilisant la formule $r = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{V(\mathbf{x})V(\mathbf{y})}} = 0.258.$

Énoncé commun aux 4 questions suivantes :

Une série statistique est définie partiellement dans le tableau ci-dessous.

x	2	3	4	5	6
y	26	y_1	y_2	y_3	45

On nous dit que l'équation de la droite de régression de y en fonction de x est $y = \frac{22}{5} + \frac{22}{5}x$.

20 Quelle est la variance $V(\mathbf{x})$ de la série $\mathbf{x}$?

☒ +
☐ − ☐ 0 ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication : La variance est calculée en utilisant la formule $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

21 Quelle est la moyenne $\overline{y}$ de la série $\mathbf{y}$?

☒ + ☐ 0 ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ← Dizaines
☐ − ☐ 0 ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ← Unités

Explication : Puisque le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à la droite de régression, $\overline{y}$ est calculé comme $\overline{y} = \frac{22}{5} + \frac{22}{5} \times 4 = 22$.

22 Quelle est la covariance entre les séries $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$?

☒ +
☐ − ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☒ 9 ← Unités

Explication : Puisque la pente de la droite de regression de y par rapport à x est égale à $\gamma_1 = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$, nous pouvons calculer la covariance $C(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en multipliant γ_1 par $V(\mathbf{x})$.

23 Si toutes les valeurs de y augmentent de 2, notons $y = q + mx$ la nouvelle équation de la droite de régression de y en fonction x. Que vaut q ?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ← Unités
☒ + .
☐ − ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ← Dixièmes

Explication : Notons $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ la droite de regression donnée dans l'énoncé. Elle se réécrit aussi comme $y = \overline{y} + \gamma_1(x - \overline{x})$ avec $\gamma_0 = \overline{y} - \gamma_1\overline{x}$. Si on augmente toutes les valeurs de $\mathbf{y}$ de K, sa moyenne augmente de K et la droite est translatée vers le haut de K. Ainsi, la pente de la nouvelle droite de régression ne change pas, mais l'ordonnée à l'origine augmente de K. La nouvelle équation est donc $y = \overline{y} + K + \gamma_1(x - \overline{x}) = (\gamma_0 + K) + \gamma_1 x$ ainsi $q = \gamma_0 + K = \frac{22}{5} + 2 = \frac{32}{5} = 6.4$.

Instructions

M1-INFO — UE 731 Remise à niveau - Mathématiques — 7 octobre 2024 Durée : 2h

Sélectionnez les quatre derniers chiffres de votre numéro d'étudiant (par ex., si le numéro est 2200**2681**, cochez 2 sur la première ligne, 6 sur la deuxième, etc.) :

NOM	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Prénom..	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- Une feuille A4 recto-verso manuscrite et une calculatrice sont autorisées. Tout autre document est interdit.
- Veuillez **noircir complètement les cases**.
- Il existe trois types de questions :
  - **Questions à choix unique.**
    Choisissez une seule réponse parmi celles proposées. Des points négatifs seront attribués pour une réponse incorrecte.
  - **Questions ouvertes.**
    Répondez en remplissant un tableau. La correction sera effectuée manuellement.
  - **Questions numériques.**
    La réponse est une valeur numérique à coder. Cochez **exactement un chiffre par ligne.**
    - Exemple d'une question où la réponse est un entier :

$+27 \rightsquigarrow$

■ (+)	0 1 ■ 3 4 5 6 7 8 9	← Dizaines
−	0 1 2 3 4 5 6 ■ 8 9	← Unités

    - Exemple d'une question où la réponse est un nombre décimal :

$-5.9 \rightsquigarrow$

	0 1 2 3 4 ■ 6 7 8 9	← Unités
+	.	
■ (−)	0 1 2 3 4 5 6 7 8 ■	← Dixièmes

Fonctions de deux variables

1 On se donne la fonction

$$f(x,y)=\sqrt{\left(10^{-4}x-\frac{10^{-2}}{y}\right)^2+10^8}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $xy=10^s$. Que vaut s?

■ +
☐ − ☐ 0 ☐ 1 ■ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication :

$$f(x,y)=\sqrt{\left(10^{-4}x-\frac{10^{-2}}{y}\right)^2+10^8}$$

$$\partial_x f(x,y)=\frac{2\left(10^{-4}x-\frac{10^{-2}}{y}\right)10^{-4}}{2\sqrt{\left(10^{-4}x-\frac{10^{-2}}{y}\right)^2+10^8}}=0 \qquad \text{ssi } \left(10^{-4}x-\frac{10^{-2}}{y}\right)=0$$

$$\partial_y f(x,y)=\frac{2\left(10^{-4}x-\frac{10^{-2}}{y}\right)\frac{-10^{-2}}{y^2}}{2\sqrt{\left(10^{-4}x-\frac{10^{-2}}{y}\right)^2+10^8}} \qquad \text{ssi } \left(10^{-4}x-\frac{10^{-2}}{y}\right)=0$$

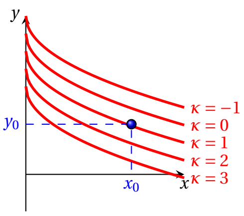
Donc $xy=\frac{10^{-2}}{10^{-4}}=10^2$.

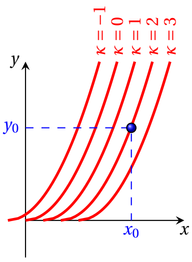
2 Soit la fonction $f(x,y)=e^{8x^5-y^2}$. Parmi les réponses suivantes, laquelle est égale à $\partial_y f$?

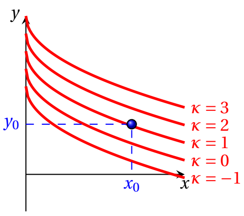
☐ $40x^4e^{8x^5-y^2}$ ■ $-2ye^{8x^5-y^2}$ ☐ $40ye^{8x^5-y^2}$ ☐ $8e^{8x^5-y^2}$ ☐ $40e^{8x^5-y^2}$ ☐ Autre

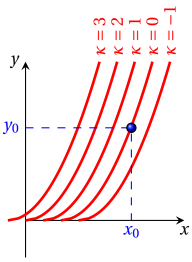
Explication : $f(x,y)=e^{bx^c-ay^d}$ donc la dérivée par rapport à y est $-ady^{d-1}e^{bx^c-ay^d}$.

3 Parmi les graphes ci-dessous, lequel pourrait représenter les lignes de niveau d'une fonction $f(x,y)$ telle que $\partial_x f(x_0,y_0)<0$ et $\partial_y f(x_0,y_0)<0$?

■ 

☐ 

☐ 

☐ 

Explication : Comme $\partial_x f(x_0,y_0)\le 0$, la fonction $h(x)=f(x,y_0)$ est décroissante. Puisque $\partial_y f(x_0,y_0)\le 0$, la fonction $g(y)=f(x_0,y)$ est décroissante.

4 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=x^3+xy+y^3$. Calculer l'équation du plan tangent à f en $(-3,3)$.

☐ $30x+24y-9$ ☐ $x^3+xy+30x+y^3+24y+18$ ■ $30x+24y+9$
☐ $30x+81$ ☐ $30x+24y+18$ ☐ Autre:

Explication : $f(x,y)\simeq f(x_0,y_0)+(x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0)+(y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0)$.

5 Soient $f(x,y) = 4x + 13y$, $x(u,v) = uv$ et $y(u,v) = u - v$. On définit $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$. Calculer $\partial_u g$.

☐ $4v$ ☐ $13u$ ☐ $4u - 13$ ☐ 4 ■ $4v + 13$ ☐ Autre:

Explication : $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$.

6 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que (x_0, y_0) est un point critique et que la matrice Hessienne évaluée en ce point est

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la nature du point critique ?

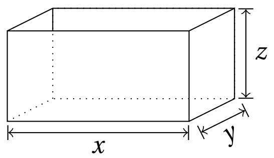
■ c'est un minimum ☐ c'est un point selle

☐ la matrice Hessienne ne permet pas de conclure ☐ c'est un maximum

Explication :

- Le déterminant de la matrice Hessienne est $\det(H_f) = (1) \times (2) - (1)^2 = 1$.
- Puisque $\det(H_f) = 1$ et que $\partial_{xx} f(x_0, y_0) = 1$, on en conclut que c'est un minimum.

7 Une boîte *ouverte* a la forme d'un parallélépipède. On cherche les valeurs $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V fixé égale à 32 cm^3. On doit donc minimiser la fonction $S(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$ sachant que $xyz = 32$. Que vaut S dans son minimum (en cm^2)?



Explication : On a $x, y, z > 0$. On pose $\sigma(x,y) = S\left(x, y, \frac{32}{xy}\right) = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$.
Calcul des points critiques:

$$\nabla\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} y - \frac{64}{x^2} \\ x - \frac{64}{y^2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x,y) = (4,4).$$

Il existe un seul point critique qui est $(4,4)$.
Nature des points critiques:

$$H_\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{128}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{128}{y^3} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad H_\sigma(4,4) = \begin{pmatrix} 2 > 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det H_\sigma(4,4) > 0.$$

On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a $S\left(4, 4, \frac{32}{16}\right) = \sigma(4,4) = 48$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Interpolation ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

8 Soit $f\colon [1;17] \to \mathbb{R}$ la **spline linéaire** qui interpole les points $f(1) = -31$, $f(8) = 11$, $f(13) = -19$, $f(17) = -39$. Que vaut $f(14)$?

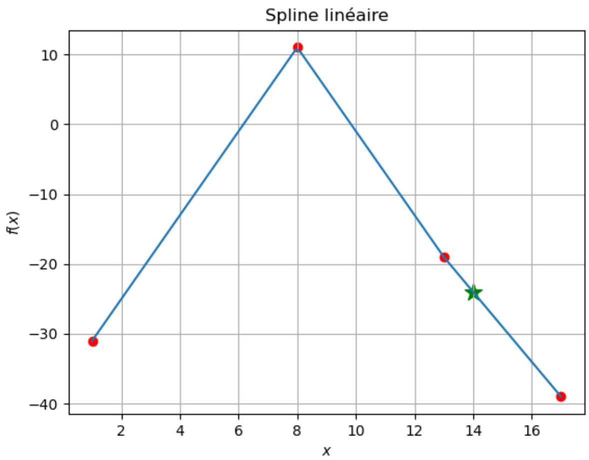
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Explication : La spline linéaire $f\colon [1;17] \to \mathbb{R}$ a pour équation :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{11-(-31)}{8-1}(x-1)+(-31) & \text{si } 1 \le x \le 8 \\ \frac{-19-(11)}{13-8}(x-8)+(11) & \text{si } 8 \le x \le 13 \\ \frac{-39-(-19)}{17-13}(x-13)+(-19) & \text{si } 13 \le x \le 17 \end{cases}$$

En substituant $x = 14$, on trouve :

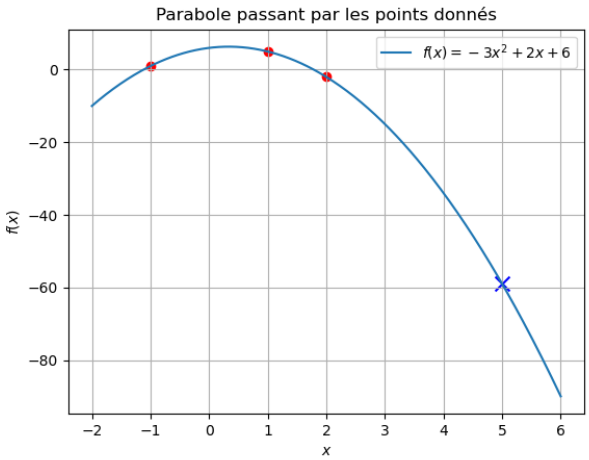
$$f(14) = -24$$



9 Soit f l'unique polynome qui interpole les points $(-1;1)$, $(1;5)$ et $(2;-2)$. Que vaut $f(5)$?

+	0	1	2	3	4	■ 5	6	7	8	9
■ −	0	1	2	3	4	5	6	7	8	■ 9

Explication : Le seul polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui passe par les trois points est la parabole d'équation $-3x^2+2x+6 = \frac{(x-2)(x-1)}{6} - \frac{5(x-2)(x+1)}{2} - \frac{2(x-1)(x+1)}{3}$. Pour la calculer l'équation de ce polynome on peut utiliser soit la méthode directe (résolution du système linéaire pour trouver les coefficients dans la base canonique), soit l'écrire dans la base de Lagrange ou encore dans la base de Newton.



10 Dans la base de Lagrange, le polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui interpole les trois points $(1,21)$, $(14,17)$ et $(21,34)$ s'écrit $p(x) = 21L_0(x)+17L_1(x)+34L_2(x)$. Que vaut $L_2(17)$?

☐ $\frac{64}{91}$ ☐ $-\frac{48}{91}$ ☐ $-\frac{3}{65}$ ☐ $-\frac{16}{65}$ ☐ $-\frac{3}{35}$ ☐ $\frac{12}{91}$ ☐ $\frac{12}{65}$ ■ $\frac{12}{35}$ ☐ $-\frac{16}{35}$ ☐ Autre

Explication :

$$L_0(x) = \frac{(x-21)(x-14)}{260}, \quad L_1(x) = \frac{(x-21)(x-1)}{-91}, \quad L_2(x) = \frac{(x-14)(x-1)}{140},$$

$$L_0(17) = \frac{-12}{260}, \quad L_1(17) = \frac{-64}{-91}, \quad L_2(17) = \frac{48}{140}.$$

11 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(4,1)$, $(5,2)$, $(6,27)$ et $(7,27)$ s'écrit $p(x) = a+b(x-4)+c(x-4)(x-5)+d(x-4)(x-5)(x-6)$. Que vaut c ?

■ +	0	■ 1	2	3	4	5	6	7	8	9
−	0	1	■ 2	3	4	5	6	7	8	9

Explication : Les coordonnées dans la base de Newton sont les valeurs encadrées dans le tableau des différences divisées ci-dessous:

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-1},x_i]$
0	4	$\boxed{1=a}$			
1	5	2	$\boxed{1=b}$		
2	6	27	25	$\boxed{12=c}$	
3	7	27	0	$-\frac{25}{2}$	$\boxed{-\frac{49}{6}=d}$

12 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(9,7)$, $(14,42)$, $(19,377)$ et $(21,1099)$ s'écrit $p(x) = 7+7(x-9)+6(x-9)(x-14)+3(x-9)(x-14)(x-19)$. En déduire l'équation du polynôme de Newton qui n'interpole que les trois points $(9,7)$, $(14,42)$ et $(19,377)$.

0.0 0.5 1 Cases réservées au correcteur

....

Explication : $p(x) = 7+7(x-9)+6(x-9)(x-14)$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Fonction de Meilleure Approximation ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

13 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ la droite de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-1	0	1
y_i	-1	0	-2

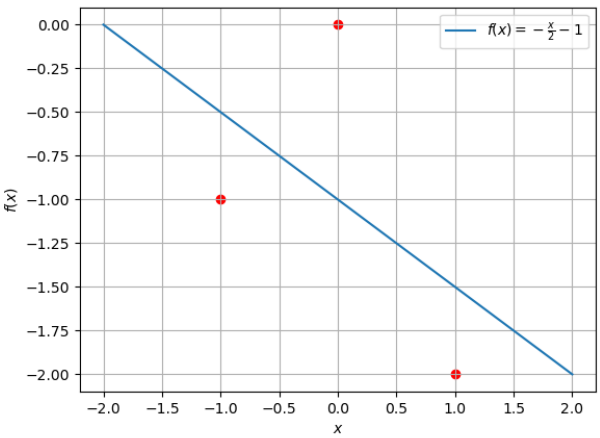
Que vaut α_0 ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n=2$ et il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_1 = -1/2$.



14 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ la parabole de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-3	1	2	1	-1

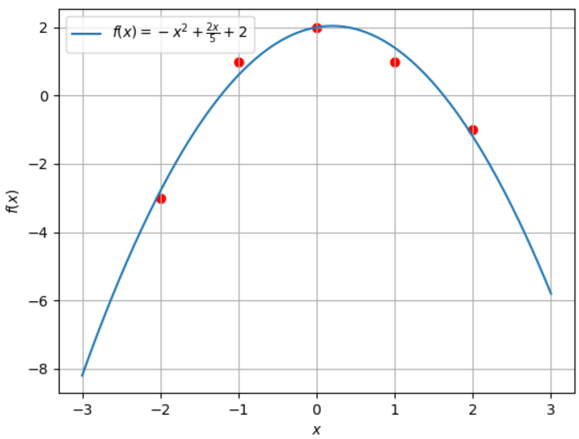
Que vaut α_0?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n = 4$ et il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 2/5$ et $\alpha_2 = -1$.



15 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(x)$ la fonction de meilleure approximation des points suivants :

x_i	e^1	e^2	e^3
y_i	6	12	36

Que vaut α_1 ?

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

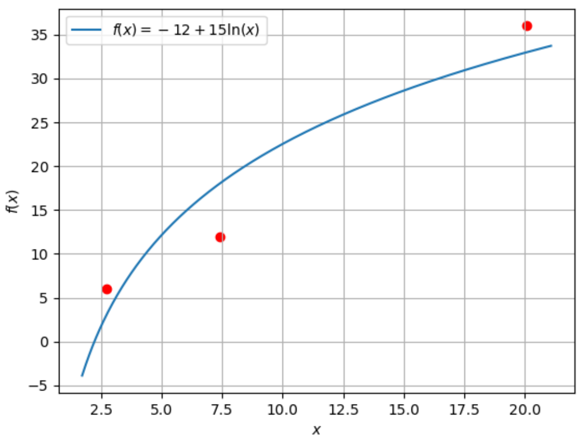
Explication : On doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\begin{aligned} \mathscr{E} \colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}_+ \\ (\alpha_0, \alpha_1) &\mapsto \mathscr{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^{2} \left(y_i - (\alpha_0 \varphi_0(x_i) + \alpha_1 \varphi_1(x_i))\right)^2. \end{aligned}$$

où $\varphi_0(x) = 1$ et $\varphi_1(x) = \ln(x)$. On doit donc résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} \sum \varphi_0^2(x_i) & \sum \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) \\ \sum \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) & \sum \varphi_1^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \varphi_0(x_i) \\ \sum y_i \varphi_1(x_i) \end{pmatrix} \quad \leadsto \quad \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^2 1 & \sum_{i=0}^2 \ln(x_i) \\ \sum_{i=0}^2 \ln(x_i) & \sum_{i=0}^2 \ln^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^2 y_i \\ \sum_{i=0}^2 y_i \ln(x_i) \end{pmatrix} \quad \leadsto \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 54 \\ 138 \end{bmatrix}$$

Ainsi $\alpha_0 =$ -12 et $\alpha_1 = 15$.



16 Considérons les points

x	1	2	3	4	5	6
y	-1437	28	36	91	131	187

Parmi les droites de la forme $f(x) = 1 + \alpha_1 x$, on cherche celle de meilleure approximation des points donnés. Calculer la valeur de α_1.

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication :

- Notons $K = 1$. On doit minimiser la fonction d'une seule variable

$$\mathscr{E}(\alpha_1) = \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right)^2.$$

- On obtient

$$\mathscr{E}'(\alpha_1) = -2 \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right) x_i.$$

- Ainsi,

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^{5} (y_i - K) x_i}{\sum_{i=0}^{5} x_i^2}.$$

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Statistiques descriptives ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Énoncé commun aux 3 questions suivantes.

On considère le tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2]$ et $\mathbf{y} = [\beta_1, \beta_2]$:

	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	Effectif marginal de α_i
$\alpha_1 = 1$	$n_{1,1} = 3$	$n_{1,2} = 1$	$n_{1,\cdot} = 4$
$\alpha_2 = 2$	$n_{2,1} = 2$	$n_{2,2} = 4$	$n_{2,\cdot} = 6$
Effectif marginal de β_j	$n_{\cdot,1} = 5$	$n_{\cdot,2} = 5$	$N = 10$

17 Compléter les cases vides du tableau des **fréquences** :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1			
α_2			
Fréq. marg. de β_j			

0.0 0.11 0.22 0.33 0.44 0.56 0.67 0.78 0.89 1 Cases réservées au correcteur

Explication : Les fréquences s'obtiennent en divisant chaque effectif du tableau donné dans l'énoncé par le total $N = 10$. Voici le tableau des fréquences complètes :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1	$f_{1,1} = \frac{3}{10} = 0.300$	$f_{1,2} = \frac{1}{10} = 0.100$	$f_{1,\cdot} = \frac{4}{10} = 0.400$
α_2	$f_{2,1} = \frac{2}{10} = 0.200$	$f_{2,2} = \frac{4}{10} = 0.400$	$f_{2,\cdot} = \frac{6}{10} = 0.600$
Fréq. marg. de β_j	$f_{\cdot,1} = \frac{5}{10} = 0.500$	$f_{\cdot,2} = \frac{5}{10} = 0.500$	1

18 Compléter les tableaux suivants:

Profils en **colonne** $f_{i|j}$ des **fréquences conditionnelles** de α sachant β :

$f_{i\mid j}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

Profils en **ligne** $f_{j|i}$ des **fréquences conditionnelles** de β sachant α :

$f_{j\mid i}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

0.0 0.12 0.25 0.38 0.5 0.62 0.75 0.88 1 Cases réservées au correcteur

Explication :

$f_{i|j} = \frac{n_{i,j}}{n_{\cdot,j}}$ pour chaque colonne. Voici le tableau des profils en colonne complètes :

$f_{i\mid j}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{3}{5} = 0.600$	$\frac{1}{5} = 0.200$
α_2	$\frac{2}{5} = 0.400$	$\frac{4}{5} = 0.800$

$f_{j|i} = \frac{n_{i,j}}{n_{i,\cdot}}$ donc voici le tableau des profils en ligne complètes :

$f_{j\mid i}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{3}{4} = 0.750$	$\frac{1}{4} = 0.250$
α_2	$\frac{2}{6} = 0.333$	$\frac{4}{6} = 0.667$

19 Le coefficient de corrélation linéaire vaut ? (arrondir à deux chiffres derrière la virgule)

	■	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	.									
■	0	1	2	3	■	5	6	7	8	9
−	0	■	2	3	4	5	6	7	8	9

Explication : On calcule d'abord

- les moyennes

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i = \frac{\alpha_1 n_{1,\cdot} + \alpha_2 n_{2,\cdot}}{N} = \frac{1\times 4 + 2\times 6}{10} = \frac{16}{10} = 1.600,$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}\beta_j = \frac{\beta_1 n_{\cdot,1} + \beta_2 n_{\cdot,2}}{N} = \frac{2\times 5 + 3\times 5}{10} = \frac{25}{10} = 2.500,$$

- puis les variances

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i^2 - \bar{\mathbf{x}}^2 = \frac{\alpha_1^2 n_{1,\cdot} + \alpha_2^2 n_{2,\cdot}}{N} - \frac{(16)^2}{10^2} = \frac{1^2\times 4 + 2^2\times 6}{10} - \frac{16^2}{10^2} = \frac{28}{10} - \frac{256}{100} = \frac{28\times 10 - 256}{100} = 0.240,$$

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}(\beta_j)^2 - \bar{\mathbf{y}}^2 = \frac{\beta_1^2 n_{\cdot,1} + \beta_2^2 n_{\cdot,2}}{N} - \frac{(25)^2}{10^2} = \frac{2^2\times 5 + 3^2\times 5}{10} - \frac{25^2}{10^2} = \frac{65}{10} - \frac{625}{100} = \frac{65\times 10 - 625}{100} = 0.250$$

et enfin la covariance

$$C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_{i,j}(\alpha_i - \bar{\mathbf{x}})(\beta_j - \bar{\mathbf{y}}) = \frac{n_{1,1}(\alpha_1 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_1 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{1,2}(\alpha_1 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_2 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{2,1}(\alpha_2 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_1 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{2,2}(\alpha_2 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_2 - \bar{\mathbf{y}})}{N}$$

$$= \frac{3\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(2-\bar{\mathbf{y}}) + 1\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(3-\bar{\mathbf{y}}) + 2\times(2-\bar{\mathbf{x}})\times(2-\bar{\mathbf{y}}) + 4\times(2-\bar{\mathbf{x}})\times(3-\bar{\mathbf{y}})}{10}$$

$$= 0.100.$$

On trouve alors le coefficient de corrélation en utilisant la formule $r = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{V(\mathbf{x})V(\mathbf{y})}} = 0.408.$

Énoncé commun aux 4 questions suivantes :

Une série statistique est définie partiellement dans le tableau ci-dessous.

x	2	3	4	5	6
y	26	y_1	y_2	y_3	45

On nous dit que l'équation de la droite de régression de y en fonction de x est $y = \frac{26}{5} + \frac{47}{10}x$.

20 Quelle est la variance $V(\mathbf{x})$ de la série **x** ?

+ | − | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La variance est calculée en utilisant la formule $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

21 Quelle est la moyenne $\overline{y}$ de la série **y** ?

+ | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dizaines
− | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à la droite de régression, $\overline{y}$ est calculé comme $\overline{y} = \frac{26}{5} + \frac{47}{10} \times 4 = 24$.

22 Quelle est la covariance entre les séries **x** et **y** ?

+ | − | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque la pente de la droite de regression de y par rapport à x est égale à $\gamma_1 = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$, nous pouvons calculer la covariance $C(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en multipliant γ_1 par $V(\mathbf{x})$.

23 Si toutes les valeurs de y augmentent de 2, notons $y = q + mx$ la nouvelle équation de la droite de régression de y en fonction x. Que vaut q ?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités
+ .
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dixièmes

Explication : Notons $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ la droite de regression donnée dans l'énoncé. Elle se réécrit aussi comme $y = \overline{y} + \gamma_1(x - \overline{x})$ avec $\gamma_0 = \overline{y} - \gamma_1\overline{x}$. Si on augmente toutes les valeurs de **y** de K, sa moyenne augmente de K et la droite est translatée vers le haut de K. Ainsi, la pente de la nouvelle droite de régression ne change pas, mais l'ordonnée à l'origine augmente de K. La nouvelle équation est donc $y = \overline{y} + K + \gamma_1(x - \overline{x}) = (\gamma_0 + K) + \gamma_1 x$ ainsi $q = \gamma_0 + K = \frac{26}{5} + 2 = \frac{36}{5} = 7.2$.

INSTRUCTIONS

M1-INFO — UE 731 Remise à niveau - Mathématiques — 7 octobre 2024 Durée : 2h

Sélectionnez les quatre derniers chiffres de votre numéro d'étudiant (par ex., si le numéro est 2200**2681**, cochez 2 sur la première ligne, 6 sur la deuxième, etc.) :

NOM	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Prénom...	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- Une feuille A4 recto-verso manuscrite et une calculatrice sont autorisées. Tout autre document est interdit.
- Veuillez **noircir complètement les cases**.
- Il existe trois types de questions :
  - **Questions à choix unique.**
    Choisissez une seule réponse parmi celles proposées. Des points négatifs seront attribués pour une réponse incorrecte.
  - **Questions ouvertes.**
    Répondez en remplissant un tableau. La correction sera effectuée manuellement.
  - **Questions numériques.**
    La réponse est une valeur numérique à coder. Cochez **exactement un chiffre par ligne.**
    - Exemple d'une question où la réponse est un entier :

+27 $\rightsquigarrow$

■ +	0	1	■ 2	3	4	5	6	7	8	9	← Dizaines
−	0	1	2	3	4	5	6	■ 7	8	9	← Unités

    - Exemple d'une question où la réponse est un nombre décimal :

−5.9 $\rightsquigarrow$

+	0	1	2	3	4	■ 5	6	7	8	9	← Unités
	.										
■ −	0	1	2	3	4	5	6	7	8	■ 9	← Dixièmes

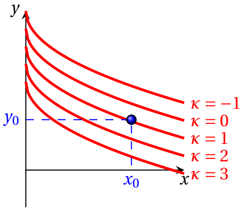
✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Fonctions de deux variables ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

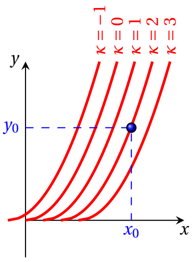
1 Soient $f(x,y) = 2x + 13y$, $x(u,v) = uv$ et $y(u,v) = u - v$. On définit $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$. Calculer $\partial_u g$.

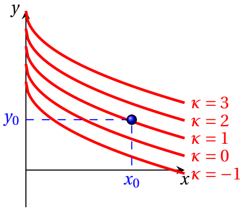
☐ $2v$ ☐ 2 ☐ $2u - 13$ ☐ $13u$ ■ $2v + 13$ ☐ Autre:

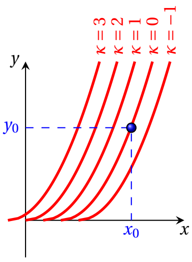
Explication : $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$.

2 Parmi les graphes ci-dessous, lequel pourrait représenter les lignes de niveau d'une fonction $f(x,y)$ telle que $\partial_x f(x_0,y_0) < 0$ et $\partial_y f(x_0,y_0) < 0$?

■ 

☐ 

☐ 

☐ 

Explication : Comme $\partial_x f(x_0,y_0) \leq 0$, la fonction $h(x) = f(x,y_0)$ est décroissante. Puisque $\partial_y f(x_0,y_0) \leq 0$, la fonction $g(y) = f(x_0,y)$ est décroissante.

3 Soit la fonction $f(x,y) = e^{7x^5 - 2y}$. Parmi les réponses suivantes, laquelle est égale à $\partial_y f$?

☐ $35e^{7x^5-2y}$ ☐ $35ye^{7x^5-2y}$ ☐ $7e^{7x^5-2y}$ ■ $-2e^{7x^5-2y}$ ☐ $35x^4e^{7x^5-2y}$ ☐ Autre

Explication : $f(x,y) = e^{bx^c - ay^d}$ donc la dérivée par rapport à y est $-ady^{d-1}e^{bx^c - ay^d}$.

4 On se donne la fonction

$$f(x,y) = \sqrt{\left(10^{-2}x - \frac{10^{-4}}{y}\right)^2 + 10^5}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $xy = 10^s$. Que vaut s?

☐ +
■ − ☐ 0 ☐ 1 ■ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication :

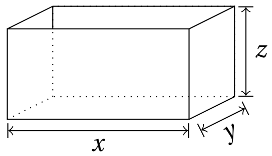
$$f(x,y) = \sqrt{\left(10^{-2}x - \frac{10^{-4}}{y}\right)^2 + 10^5}$$

$$\partial_x f(x,y) = \frac{2\left(10^{-2}x - \frac{10^{-4}}{y}\right)10^{-2}}{2\sqrt{\left(10^{-2}x - \frac{10^{-4}}{y}\right)^2 + 10^5}} = 0 \qquad \text{ssi } \left(10^{-2}x - \frac{10^{-4}}{y}\right) = 0$$

$$\partial_y f(x,y) = \frac{2\left(10^{-2}x - \frac{10^{-4}}{y}\right)\frac{-10^{-4}}{y^2}}{2\sqrt{\left(10^{-2}x - \frac{10^{-4}}{y}\right)^2 + 10^5}} \qquad \text{ssi } \left(10^{-2}x - \frac{10^{-4}}{y}\right) = 0$$

Donc $xy = \frac{10^{-4}}{10^{-2}} = 10^{-2}$.

5 Une boîte *ouverte* a la forme d'un parallélépipède. On cherche les valeurs $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V fixé égale à 32 cm^3. On doit donc minimiser la fonction $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ sachant que $xyz = 32$. Que vaut S dans son minimum (en cm^2)?



☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	■ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9
☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	■ 8	☐ 9

Explication : On a $x, y, z > 0$. On pose $\sigma(x, y) = S\left(x, y, \frac{32}{xy}\right) = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$.
Calcul des points critiques:

$$\nabla\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} y - \frac{64}{x^2} \\ x - \frac{64}{y^2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = (4, 4).$$

Il existe un seul point critique qui est $(4, 4)$.
Nature des points critiques:

$$H_\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{128}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{128}{y^3} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad H_\sigma(4, 4) = \begin{pmatrix} 2 > 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det H_\sigma(4, 4) > 0.$$

On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a $S\left(4, 4, \frac{32}{16}\right) = \sigma(4, 4) = 48$.

6 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = xy + x + y^2$. Calculer l'équation du plan tangent à f en $(-3, 3)$.

- ☐ $xy + 5x + y^2 + 3y + 3$
- ■ $4x + 3y$
- ☐ $4x + 9$
- ☐ $4x + 3y + 3$
- ☐ $4x + 3y - 3$
- ☐ Autre:

Explication : $f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + (x - x_0)\partial_x f(x_0, y_0) + (y - y_0)\partial_y f(x_0, y_0)$.

7 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que (x_0, y_0) est un point critique et que la matrice Hessienne évaluée en ce point est

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la nature du point critique ?

- ■ la matrice Hessienne ne permet pas de conclure
- ☐ c'est un point selle
- ☐ c'est un maximum
- ☐ c'est un minimum

Explication : Puisque le déterminant de la matrice Hessienne est nul, on ne peut pas conclure sur la nature du point critique.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Interpolation ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

8 Soit $f : [1; 17] \to \mathbb{R}$ la **spline linéaire** qui interpole les points $f(1) = -22$, $f(8) = 13$, $f(13) = -37$, $f(17) = -45$. Que vaut $f(4)$?

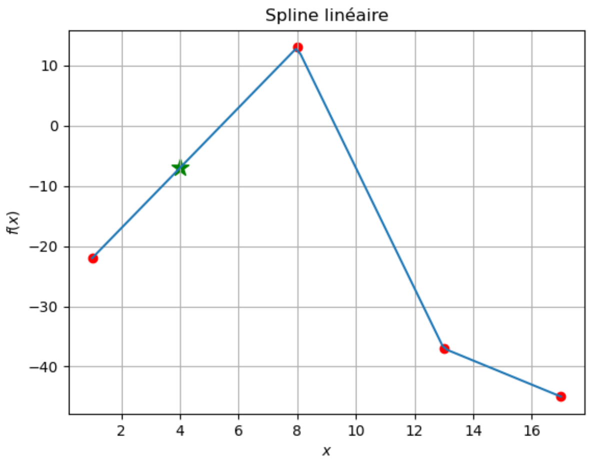
+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La spline linéaire $f : [1; 17] \to \mathbb{R}$ a pour équation :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{13-(-22)}{8-1}(x-1)+(-22) & \text{si } 1 \le x \le 8 \\ \frac{-37-(13)}{13-8}(x-8)+(13) & \text{si } 8 \le x \le 13 \\ \frac{-45-(-37)}{17-13}(x-13)+(-37) & \text{si } 13 \le x \le 17 \end{cases}$$

En substituant $x = 4$, on trouve :

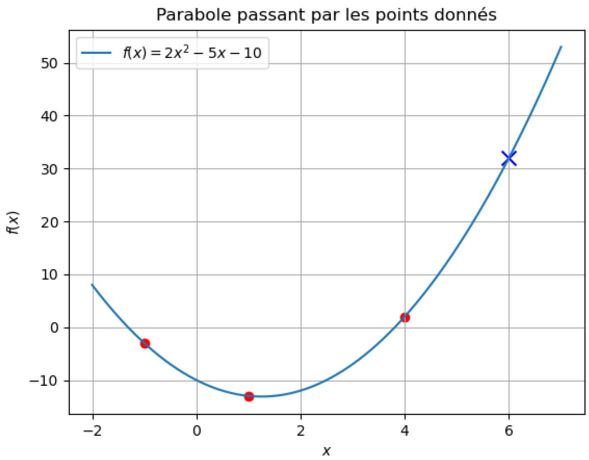
$$f(4) = -7$$



9 Soit f l'unique polynome qui interpole les points $(-1;-3)$, $(1;-13)$ et $(4;2)$. Que vaut $f(6)$?

■ +	☐ 0	☐ 1	☐ 2	■ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9
☐ −	☐ 0	☐ 1	■ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

Explication : Le seul polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui passe par les trois points est la parabole d'équation $2x^2-5x-10=-\frac{3(x-4)(x-1)}{10}+\frac{13(x-4)(x+1)}{6}+\frac{2(x-1)(x+1)}{15}$. Pour la calculer l'équation de ce polynome on peut utiliser soit la méthode directe (résolution du système linéaire pour trouver les coefficients dans la base canonique), soit l'écrire dans la base de Lagrange ou encore dans la base de Newton.



10 Dans la base de Lagrange, le polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui interpole les trois points $(1,21)$, $(14,17)$ et $(21,34)$ s'écrit $p(x)=21L_0(x)+17L_1(x)+34L_2(x)$. Que vaut $L_1(17)$?

■ $\frac{64}{91}$ ☐ $-\frac{16}{65}$ ☐ $-\frac{3}{35}$ ☐ $\frac{12}{35}$ ☐ $-\frac{3}{65}$ ☐ $\frac{12}{91}$ ☐ $\frac{12}{65}$ ☐ $-\frac{48}{91}$ ☐ $-\frac{16}{35}$ ☐ Autre

Explication :

$$L_0(x)=\frac{(x-21)(x-14)}{260},\quad L_1(x)=\frac{(x-21)(x-1)}{-91},\quad L_2(x)=\frac{(x-14)(x-1)}{140},$$

$$L_0(17)=\frac{-12}{260},\quad L_1(17)=\frac{-64}{-91},\quad L_2(17)=\frac{48}{140}.$$

11 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(6,1)$, $(7,2)$, $(8,27)$ et $(9,27)$ s'écrit $p(x)=a+b(x-6)+c(x-6)(x-7)+d(x-6)(x-7)(x-8)$. Que vaut c ?

■ +	☐ 0	■ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9
☐ −	☐ 0	☐ 1	■ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

Explication : Les coordonnées dans la base de Newton sont les valeurs encadrées dans le tableau des différences divisées ci-dessous:

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-1},x_i]$
0	6	$\boxed{1=a}$			
1	7	2	$\boxed{1=b}$		
2	8	27	25	$\boxed{12=c}$	
3	9	27	0	$-\frac{25}{2}$	$\boxed{-\frac{49}{6}=d}$

12 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(3,3)$, $(8,38)$, $(11,203)$ et $(14,1070)$ s'écrit $p(x)=3+7(x-3)+6(x-3)(x-8)+3(x-3)(x-8)(x-11)$. En déduire l'équation du polynôme de Newton qui n'interpole que les trois points $(3,3)$, $(8,38)$ et $(11,203)$.

0.0 0.5 1 Cases réservées au correcteur

....

Explication : $p(x)=3+7(x-3)+6(x-3)(x-8)$.

Fonction de Meilleure Approximation

13 Soit $f(x)=\alpha_0+\alpha_1 x$ la droite de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-1	0	1
y_i	-4	0	-2

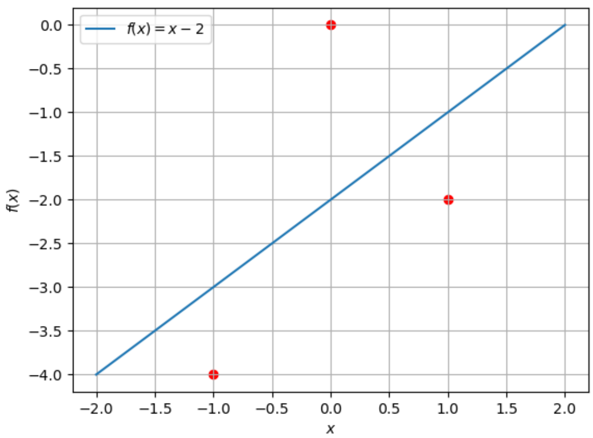
Que vaut α_0 ?

+ −
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n=2$ et il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix}(n+1) & \sum_{i=0}^n x_i\\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^n y_i\\ \sum_{i=0}^n x_i y_i\end{pmatrix}\quad\Longrightarrow\quad\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\ 2\end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0=-2$ et $\alpha_1=1$.



14 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ la parabole de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-3	1	2	1	-1

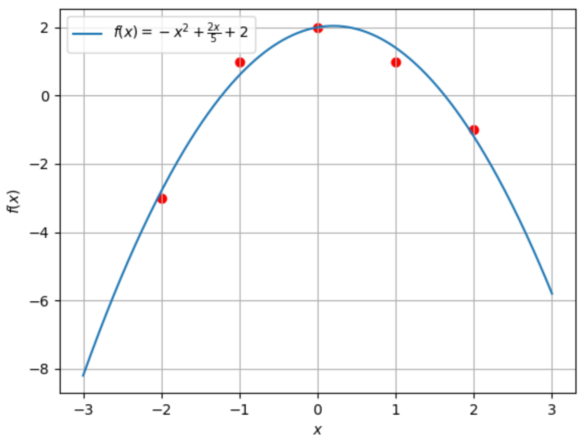
Que vaut α_2?

☐ +
☒ − ☐ 0 ☒ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication : $n=4$ et il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 2/5$ et $\alpha_2 = -1$.



15 Soit $f(x) = \alpha_0 \cos(x) + \alpha_1 \sin(x)$ la fonction de meilleure approximation des points suivants:

x_i	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
y_i	4	6	0

Que vaut α_1 ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : On doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\mathscr{E}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$$
$$(\alpha_0, \alpha_1) \mapsto \mathscr{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i))^2.$$

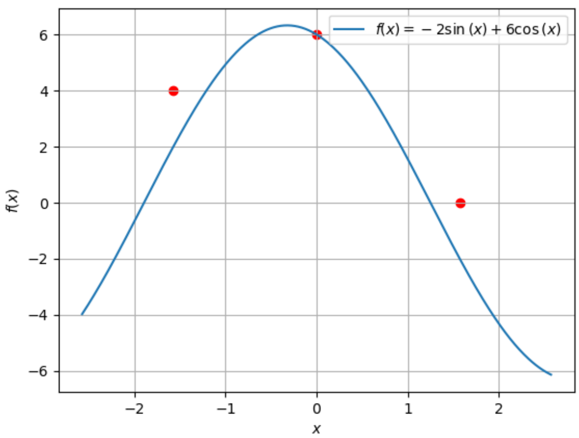
Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche ses points stationnaires. Puisque

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i)) \cos(x_i)\right),$$
$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i)) \sin(x_i)\right),$$

on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i)) \cos(x_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i)) \sin(x_i) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} \cos^2(x_i) & \sum_{i=0}^{n} \cos(x_i)\sin(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} \cos(x_i)\sin(x_i) & \sum_{i=0}^{n} \sin^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \cos(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} y_i \sin(x_i) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 6$ et $\alpha_1 = -2$.



16 Considérons les points

x	1	2	3	4	5	6
y	-1774	37	31	74	143	188

Parmi les droites de la forme $f(x) = 4 + \alpha_1 x$, on cherche celle de meilleure approximation des points donnés. Calculer la valeur de α_1.

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication :

- Notons $K = 4$. On doit minimiser la fonction d'une seule variable
$$\mathscr{E}(\alpha_1) = \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right)^2.$$
- On obtient
$$\mathscr{E}'(\alpha_1) = -2 \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right) x_i.$$
- Ainsi,
$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^{5} (y_i - K) x_i}{\sum_{i=0}^{5} x_i^2}.$$

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Statistiques descriptives** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Énoncé commun aux 3 questions suivantes.

On considère le tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2]$ et $\mathbf{y} = [\beta_1, \beta_2]$:

	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	Effectif marginal de α_i
$\alpha_1 = 1$	$n_{1,1} = 2$	$n_{1,2} = 1$	$n_{1,\cdot} = 3$
$\alpha_2 = 2$	$n_{2,1} = 2$	$n_{2,2} = 3$	$n_{2,\cdot} = 5$
Effectif marginal de β_j	$n_{\cdot,1} = 4$	$n_{\cdot,2} = 4$	$N = 8$

17 Compléter les cases vides du tableau des **fréquences** :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1			
α_2			
Fréq. marg. de β_j			

0.0 0.11 0.22 0.33 0.44 0.56 0.67 0.78 0.89 1 Cases réservées au correcteur

Explication : Les fréquences s'obtiennent en divisant chaque effectif du tableau donné dans l'énoncé par le total $N = 8$. Voici le tableau des fréquences complètes :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1	$f_{1,1} = \frac{2}{8} = 0.250$	$f_{1,2} = \frac{1}{8} = 0.125$	$f_{1,\cdot} = \frac{3}{8} = 0.375$
α_2	$f_{2,1} = \frac{2}{8} = 0.250$	$f_{2,2} = \frac{3}{8} = 0.375$	$f_{2,\cdot} = \frac{5}{8} = 0.625$
Fréq. marg. de β_j	$f_{\cdot,1} = \frac{4}{8} = 0.500$	$f_{\cdot,2} = \frac{4}{8} = 0.500$	1

18 Compléter les tableaux suivants:

Profils en **colonne** $f_{i|j}$ des **fréquences conditionnelles** de α sachant β :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

Profils en **ligne** $f_{j|i}$ des **fréquences conditionnelles** de β sachant α :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

0.0 0.12 0.25 0.38 0.5 0.62 0.75 0.88 1 Cases réservées au correcteur

Explication :

$f_{i|j} = \frac{n_{i,j}}{n_{\cdot,j}}$ pour chaque colonne. Voici le tableau des profils en colonne complètes :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{1}{4} = 0.250$
α_2	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{3}{4} = 0.750$

$f_{j|i} = \frac{n_{i,j}}{n_{i,\cdot}}$ donc voici le tableau des profils en ligne complètes :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{3} = 0.667$	$\frac{1}{3} = 0.333$
α_2	$\frac{2}{5} = 0.400$	$\frac{3}{5} = 0.600$

19 Le coefficient de corrélation linéaire vaut ? (arrondir à deux chiffres derrière la virgule)

	■ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	.									
■ +	0	1	■ 2	3	4	5	6	7	8	9
−	0	1	2	3	4	5	■ 6	7	8	9

Explication : On calcule d'abord

- les moyennes

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i = \frac{\alpha_1 n_{1,\cdot} + \alpha_2 n_{2,\cdot}}{N} = \frac{1\times3+2\times5}{8} = \frac{13}{8} = 1.625,$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}\beta_j = \frac{\beta_1 n_{\cdot,1} + \beta_2 n_{\cdot,2}}{N} = \frac{2\times4+3\times4}{8} = \frac{20}{8} = 2.500,$$

- puis les variances

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i^2 - \bar{\mathbf{x}}^2 = \frac{\alpha_1^2 n_{1,\cdot} + \alpha_2^2 n_{2,\cdot}}{N} - \frac{(13)^2}{8^2} = \frac{1^2\times3+2^2\times5}{8} - \frac{13^2}{8^2} = \frac{23}{8} - \frac{169}{64} = \frac{23\times8-169}{64} = 0.234,$$

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}(\beta_j)^2 - \bar{\mathbf{y}}^2 = \frac{\beta_1^2 n_{\cdot,1} + \beta_2^2 n_{\cdot,2}}{N} - \frac{(20)^2}{8^2} = \frac{2^2\times4+3^2\times4}{8} - \frac{20^2}{8^2} = \frac{52}{8} - \frac{400}{64} = \frac{52\times8-400}{64} = 0.250$$

et enfin la covariance

$$C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_{i,j}(\alpha_i-\bar{\mathbf{x}})(\beta_j-\bar{\mathbf{y}}) = \frac{n_{1,1}(\alpha_1-\bar{\mathbf{x}})(\beta_1-\bar{\mathbf{y}}) + n_{1,2}(\alpha_1-\bar{\mathbf{x}})(\beta_2-\bar{\mathbf{y}}) + n_{2,1}(\alpha_2-\bar{\mathbf{x}})(\beta_1-\bar{\mathbf{y}}) + n_{2,2}(\alpha_2-\bar{\mathbf{x}})(\beta_2-\bar{\mathbf{y}})}{N}$$

$$= \frac{2\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(2-\bar{\mathbf{y}}) + 1\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(3-\bar{\mathbf{y}}) + 2\times(2-\bar{\mathbf{x}})\times(2-\bar{\mathbf{y}}) + 3\times(2-\bar{\mathbf{x}})\times(3-\bar{\mathbf{y}})}{8}$$

$$= 0.062.$$

On trouve alors le coefficient de corrélation en utilisant la formule $r = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{V(\mathbf{x})V(\mathbf{y})}} = 0.258.$

Énoncé commun aux 4 questions suivantes :

Une série statistique est définie partiellement dans le tableau ci-dessous.

x	2	3	4	5	6
y	26	y_1	y_2	y_3	45

On nous dit que l'équation de la droite de régression de y en fonction de x est $y = \frac{12}{5} + \frac{22}{5}x$.

20 Quelle est la variance $V(\mathbf{x})$ de la série $\mathbf{x}$?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La variance est calculée en utilisant la formule $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

21 Quelle est la moyenne $\overline{y}$ de la série $\mathbf{y}$?

+ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dizaines
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à la droite de régression, $\overline{y}$ est calculé comme $\overline{y} = \frac{12}{5} + \frac{22}{5} \times 4 = 20$.

22 Quelle est la covariance entre les séries $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque la pente de la droite de regression de y par rapport à x est égale à $\gamma_1 = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$, nous pouvons calculer la covariance $C(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en multipliant γ_1 par $V(\mathbf{x})$.

23 Si toutes les valeurs de $\mathbf{x}$ augmentent de 3, notons $y = q + mx$ la nouvelle équation de la droite de régression de y en fonction x. Que vaut q ?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dizaines
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités
+ .
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dixièmes

Explication : Notons $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ la droite de regression donnée dans l'énoncé. Elle se réécrit aussi comme $y = \overline{y} + \gamma_1(x - \overline{x})$ avec $\gamma_0 = \overline{y} - \gamma_1\overline{x}$. Si on augmente toutes les valeurs de $\mathbf{x}$ de K, sa moyenne augmente de K et la droite est translatée à droite de K. Ainsi, la pente de la nouvelle droite de régression ne change pas, mais l'ordonnée à l'origine change. La nouvelle équation est donc $y = \overline{y} + \gamma_1(x - (\overline{x} + K)) = \gamma_0 + \gamma_1\overline{x} + \gamma_1(x - (\overline{x} + K)) = (\gamma_0 - \gamma_1 K) + \gamma_1 x$ ainsi $q = \gamma_0 - \gamma_1 K = \frac{12}{5} - \frac{22}{5} \times 3 = -\frac{54}{5} = -10.8$.

Instructions

M1-INFO — UE 731 Remise à niveau - Mathématiques — 7 octobre 2024 Durée : 2h

Sélectionnez les quatre derniers chiffres de votre numéro d'étudiant (par ex., si le numéro est 2200**2681**, cochez 2 sur la première ligne, 6 sur la deuxième, etc.) :

NOM	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Prénom..	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- Une feuille A4 recto-verso manuscrite et une calculatrice sont autorisées. Tout autre document est interdit.
- Veuillez **noircir complètement les cases**.
- Il existe trois types de questions :
  - **Questions à choix unique.**
    Choisissez une seule réponse parmi celles proposées. Des points négatifs seront attribués pour une réponse incorrecte.
  - **Questions ouvertes.**
    Répondez en remplissant un tableau. La correction sera effectuée manuellement.
  - **Questions numériques.**
    La réponse est une valeur numérique à coder. Cochez **exactement un chiffre par ligne.**
    - Exemple d'une question où la réponse est un entier :

$+27 \quad \rightsquigarrow$

■ +	0 1 ■2 3 4 5 6 7 8 9	← Dizaines
−	0 1 2 3 4 5 6 ■7 8 9	← Unités

    - Exemple d'une question où la réponse est un nombre décimal :

$-5.9 \quad \rightsquigarrow$

	0 1 2 3 4 ■5 6 7 8 9	← Unités
+	.	
■ −	0 1 2 3 4 5 6 7 8 ■9	← Dixièmes

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Fonctions de deux variables ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que (x_0, y_0) est un point critique et que la matrice Hessienne évaluée en ce point est

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la nature du point critique ?

☐ c'est un maximum ■ c'est un minimum

☐ la matrice Hessienne ne permet pas de conclure ☐ c'est un point selle

Explication :

- Le déterminant de la matrice Hessienne est $\det(H_f) = (2) \times (2) - (1)^2 = 3$.
- Puisque $\det(H_f) = 3$ et que $\partial_{xx} f(x_0, y_0) = 2$, on en conclut que c'est un minimum.

2 On se donne la fonction

$$f(x, y) = \sqrt{\left(10^2 x - \frac{10^{-3}}{y}\right)^2 + 10^6}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $xy = 10^s$. Que vaut s?

☐ +
■ − ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ■ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication :

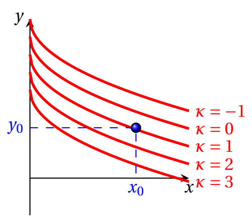
$$f(x, y) = \sqrt{\left(10^2 x - \frac{10^{-3}}{y}\right)^2 + 10^6}$$

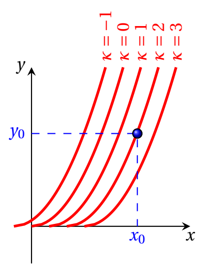
$$\partial_x f(x, y) = \frac{2\left(10^2 x - \frac{10^{-3}}{y}\right)10^2}{2\sqrt{\left(10^2 x - \frac{10^{-3}}{y}\right)^2 + 10^6}} = 0 \qquad \text{ssi} \quad \left(10^2 x - \frac{10^{-3}}{y}\right) = 0$$

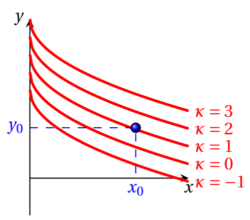
$$\partial_y f(x, y) = \frac{2\left(10^2 x - \frac{10^{-3}}{y}\right)\frac{-10^{-3}}{y^2}}{2\sqrt{\left(10^2 x - \frac{10^{-3}}{y}\right)^2 + 10^6}} \qquad \text{ssi} \quad \left(10^2 x - \frac{10^{-3}}{y}\right) = 0$$

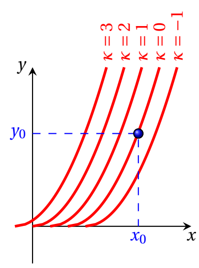
Donc $xy = \dfrac{10^{-3}}{10^2} = 10^{-5}$.

3 Parmi les graphes ci-dessous, lequel pourrait représenter les lignes de niveau d'une fonction $f(x, y)$ telle que $\partial_x f(x_0, y_0) < 0$ et $\partial_y f(x_0, y_0) < 0$?

■ 

☐ 

☐ 

☐ 

Explication : Comme $\partial_x f(x_0, y_0) \le 0$, la fonction $h(x) = f(x, y_0)$ est décroissante. Puisque $\partial_y f(x_0, y_0) \le 0$, la fonction $g(y) = f(x_0, y)$ est décroissante.

4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^3 + xy + y^3$. Calculer l'équation du plan tangent à f en $(-2, 1)$.

☐ $13x + y + 25$ ☐ $13x + y - 9$ ■ $13x + y + 16$
☐ $13x + 17$ ☐ $x^3 + xy + 13x + y^3 + y + 25$ ☐ Autre:

Explication : $f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + (x - x_0)\partial_x f(x_0, y_0) + (y - y_0)\partial_y f(x_0, y_0)$.

5 Soit la fonction $f(x, y) = e^{11x^6 - y}$. Parmi les réponses suivantes, laquelle est égale à $\partial_x f$?

☐ $66xe^{11x^6-y}$ ☐ $66e^{11x^6-y}$ ■ $66x^5e^{11x^6-y}$ ☐ $11e^{11x^6-y}$ ☐ $-e^{11x^6-y}$ ☐ Autre

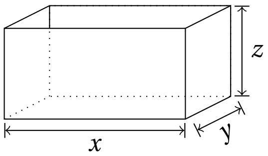
Explication : $f(x, y) = e^{bx^c - ay^d}$ donc la dérivée par rapport à x est $bcx^{c-1}e^{bx^c-ay^d}$.

6 Soient $f(x, y) = 3x + 12y$, $x(u, v) = uv$ et $y(u, v) = u - v$. On définit $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$. Calculer $\partial_u g$.

☐ $12u$ ☐ $3u - 12$ ☐ $3v$ ☐ 3 ■ $3v + 12$ ☐ Autre:

Explication : $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$.

7 Une boîte *ouverte* a la forme d'un parallélépipède. On cherche les valeurs $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V fixé égale à 108 cm^3. On doit donc minimiser la fonction $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ sachant que $xyz = 108$. Que vaut S dans son minimum (en cm^2)?



0	■ 1	2	3	4	5	6	7	8	9
■ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	■ 8	9

Explication : On a $x, y, z > 0$. On pose $\sigma(x, y) = S\left(x, y, \frac{108}{xy}\right) = xy + \frac{216}{y} + \frac{216}{x}$.
Calcul des points critiques:

$$\nabla\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} y - \frac{216}{x^2} \\ x - \frac{216}{y^2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = (6, 6).$$

Il existe un seul point critique qui est $(6, 6)$.
Nature des points critiques:

$$H_\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{432}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{432}{y^3} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad H_\sigma(6, 6) = \begin{pmatrix} 2 > 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det H_\sigma(6, 6) > 0.$$

On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a $S\left(6, 6, \frac{108}{36}\right) = \sigma(6, 6) = 108$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Interpolation** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

8 Soit $f: [1;17] \to \mathbb{R}$ la **spline linéaire** qui interpole les points $f(1) = -23$, $f(8) = 12$, $f(13) = -23$, $f(17) = -35$. Que vaut $f(10)$?

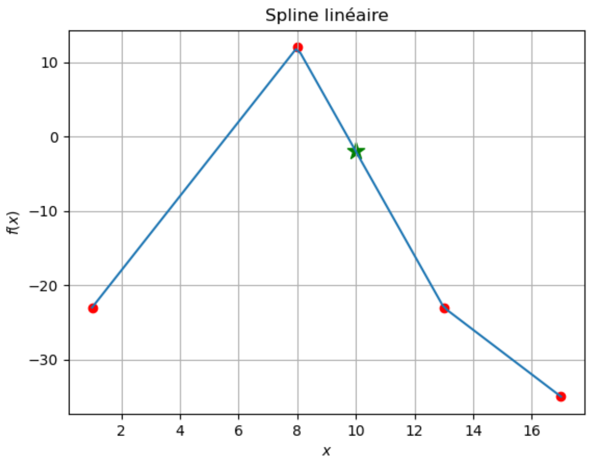
+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La spline linéaire $f: [1;17] \to \mathbb{R}$ a pour équation :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{12-(-23)}{8-1}(x-1)+(-23) & \text{si } 1 \le x \le 8 \\ \frac{-23-(12)}{13-8}(x-8)+(12) & \text{si } 8 \le x \le 13 \\ \frac{-35-(-23)}{17-13}(x-13)+(-23) & \text{si } 13 \le x \le 17 \end{cases}$$

En substituant $x = 10$, on trouve :

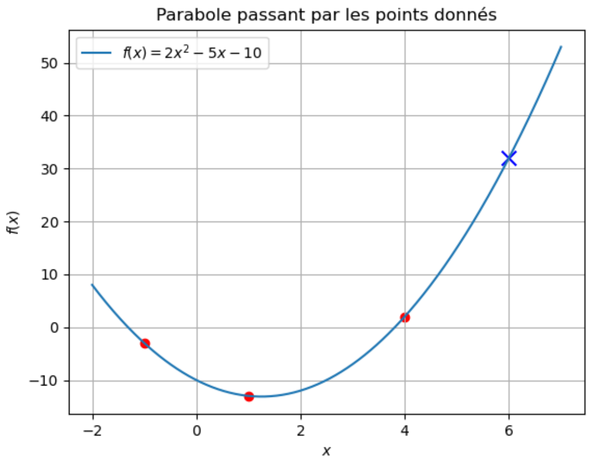
$$f(10) = -2$$



9 Soit f l'unique polynome qui interpole les points $(-1;-3)$, $(1;-13)$ et $(4;2)$. Que vaut $f(6)$?

■ +	☐ 0	☐ 1	☐ 2	■ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9
☐ −	☐ 0	☐ 1	■ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

Explication : Le seul polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui passe par les trois points est la parabole d'équation $2x^2-5x-10 = -\frac{3(x-4)(x-1)}{10} + \frac{13(x-4)(x+1)}{6} + \frac{2(x-1)(x+1)}{15}$. Pour la calculer l'équation de ce polynome on peut utiliser soit la méthode directe (résolution du système linéaire pour trouver les coefficients dans la base canonique), soit l'écrire dans la base de Lagrange ou encore dans la base de Newton.



10 Dans la base de Lagrange, le polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui interpole les trois points $(1,22)$, $(14,17)$ et $(21,34)$ s'écrit $p(x) = 22L_0(x)+17L_1(x)+34L_2(x)$. Que vaut $L_2(20)$?

☐ $-\frac{19}{140}$ ☐ $\frac{57}{130}$ ☐ $-\frac{19}{260}$ ☐ $\frac{6}{91}$ ☐ $-\frac{3}{130}$ ☐ $\frac{19}{91}$ ■ $\frac{57}{70}$ ☐ $-\frac{3}{70}$ ☐ $-\frac{114}{91}$ ☐ Autre

Explication :

$$L_0(x) = \frac{(x-21)(x-14)}{260}, \qquad L_1(x) = \frac{(x-21)(x-1)}{-91}, \qquad L_2(x) = \frac{(x-14)(x-1)}{140},$$
$$L_0(20) = \frac{-6}{260}, \qquad L_1(20) = \frac{-19}{-91}, \qquad L_2(20) = \frac{114}{140}.$$

11 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(4,1)$, $(5,2)$, $(6,33)$ et $(7,33)$ s'écrit $p(x) = a+b(x-4)+c(x-4)(x-5)+d(x-4)(x-5)(x-6)$. Que vaut c ?

■ +	☐ 0	■ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9
☐ −	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	■ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

Explication : Les coordonnées dans la base de Newton sont les valeurs encadrées dans le tableau des différences divisées ci-dessous:

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-1},x_i]$
0	4	$\boxed{1=a}$			
1	5	2	$\boxed{1=b}$		
2	6	33	31	$\boxed{15=c}$	
3	7	33	0	$-\frac{31}{2}$	$\boxed{-\frac{61}{6}=d}$

12 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(9,7)$, $(14,42)$, $(19,377)$ et $(21,1099)$ s'écrit $p(x) = 7 + 7(x-9) + 6(x-9)(x-14) + 3(x-9)(x-14)(x-19)$. En déduire l'équation du polynôme de Newton qui n'interpole que les trois points $(9,7)$, $(14,42)$ et $(19,377)$.

0.0 0.5 1 Cases réservées au correcteur

. . . .

Explication : $p(x) = 7 + 7(x-9) + 6(x-9)(x-14)$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Fonction de Meilleure Approximation ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

13 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ la droite de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-1	0	1
y_i	-1	0	-2

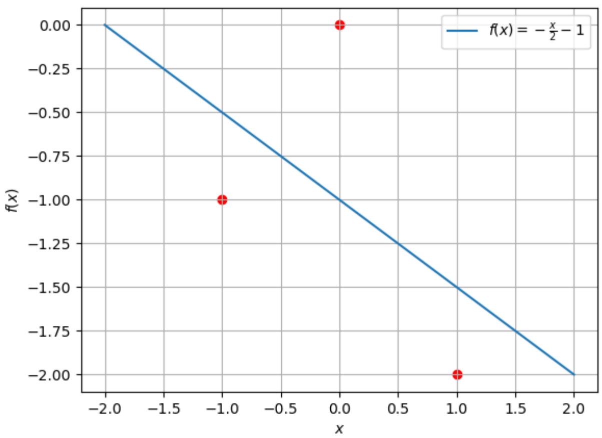
Que vaut α_0 ?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n=2$ et il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_1 = -1/2$.



14 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ la parabole de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1	-1	-2	-1	3

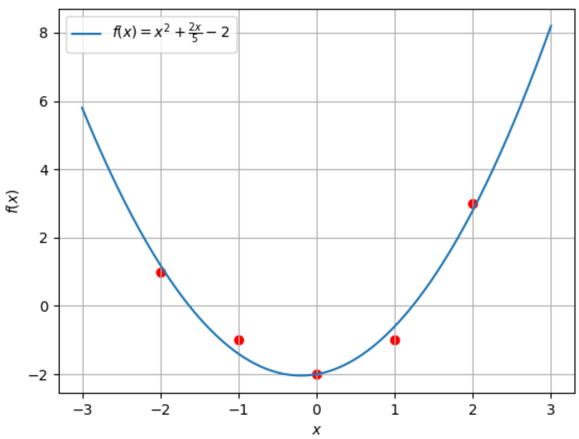
Que vaut α_0?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n = 4$ et il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = -2$, $\alpha_1 = 2/5$ et $\alpha_2 = 1$.



15 Soit $f(x) = \alpha_0 \cos(x) + \alpha_1 \cos(2x)$ la fonction de meilleure approximation des points suivants :

x_i	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y_i	5	9	9	5	5

Que vaut α_1 ?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : On doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\mathscr{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$$
$$(\alpha_0, \alpha_1) \mapsto \mathscr{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^{4} \big(y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \cos(2x_i)\big)^2.$$

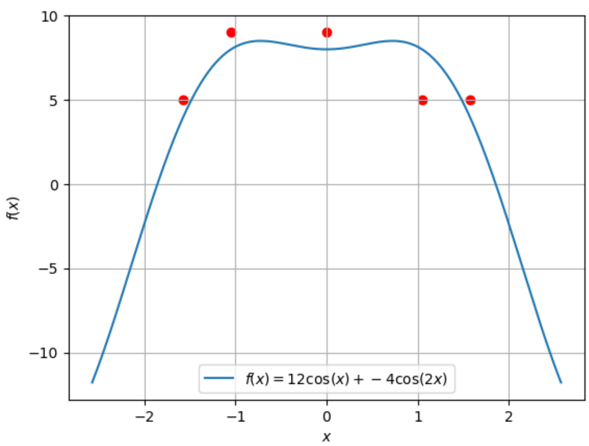
Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche ses points stationnaires. Puisque

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{4} \big(y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \cos(2x_i)\big)\cos(x_i)\right),$$
$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{4} \big(y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \cos(2x_i)\big)\cos(2x_i)\right),$$

on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^{4} \big(y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \cos(2x_i)\big)\cos(x_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^{4} \big(y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \cos(2x_i)\big)\cos(2x_i) = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 12$ et $\alpha_1 = -4$.



16 Considérons les points

x	1	2	3	4	5	6
y	-1835	40	41	51	144	160

Parmi les droites de la forme $f(x) = -1 + \alpha_1 x$, on cherche celle de meilleure approximation des points donnés. Calculer la valeur de α_1.

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication :

- Notons $K = -1$. On doit minimiser la fonction d'une seule variable
$$\mathscr{E}(\alpha_1) = \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right)^2.$$
- On obtient
$$\mathscr{E}'(\alpha_1) = -2\sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right) x_i.$$
- Ainsi,
$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^{5} (y_i - K) x_i}{\sum_{i=0}^{5} x_i^2}.$$

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Statistiques descriptives** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Énoncé commun aux 3 questions suivantes.

On considère le tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2]$ et $\mathbf{y} = [\beta_1, \beta_2]$:

	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	Effectif marginal de α_i
$\alpha_1 = 1$	$n_{1,1} = 2$	$n_{1,2} = 1$	$n_{1,\cdot} = 3$
$\alpha_2 = 2$	$n_{2,1} = 2$	$n_{2,2} = 3$	$n_{2,\cdot} = 5$
Effectif marginal de β_j	$n_{\cdot,1} = 4$	$n_{\cdot,2} = 4$	$N = 8$

17 Compléter les cases vides du tableau des **fréquences** :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1			
α_2			
Fréq. marg. de β_j			

0.0 0.11 0.22 0.33 0.44 0.56 0.67 0.78 0.89 1 Cases réservées au correcteur

Explication : Les fréquences s'obtiennent en divisant chaque effectif du tableau donné dans l'énoncé par le total $N = 8$. Voici le tableau des fréquences complètes :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1	$f_{1,1} = \frac{2}{8} = 0.250$	$f_{1,2} = \frac{1}{8} = 0.125$	$f_{1,\cdot} = \frac{3}{8} = 0.375$
α_2	$f_{2,1} = \frac{2}{8} = 0.250$	$f_{2,2} = \frac{3}{8} = 0.375$	$f_{2,\cdot} = \frac{5}{8} = 0.625$
Fréq. marg. de β_j	$f_{\cdot,1} = \frac{4}{8} = 0.500$	$f_{\cdot,2} = \frac{4}{8} = 0.500$	1

18 Compléter les tableaux suivants:

Profils en **colonne** $f_{i|j}$ des **fréquences conditionnelles** de α sachant β :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

Profils en **ligne** $f_{j|i}$ des **fréquences conditionnelles** de β sachant α :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

☐ 0.0 ☐ 0.12 ☐ 0.25 ☐ 0.38 ☐ 0.5 ☐ 0.62 ☐ 0.75 ☐ 0.88 ■ 1 Cases réservées au correcteur

Explication :

$f_{i|j} = \frac{n_{i,j}}{n_{\cdot,j}}$ pour chaque colonne. Voici le tableau des profils en colonne complètes :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{1}{4} = 0.250$
α_2	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{3}{4} = 0.750$

$f_{j|i} = \frac{n_{i,j}}{n_{i,\cdot}}$ donc voici le tableau des profils en ligne complètes :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{3} = 0.667$	$\frac{1}{3} = 0.333$
α_2	$\frac{2}{5} = 0.400$	$\frac{3}{5} = 0.600$

19 Le coefficient de corrélation linéaire vaut ? (arrondir à deux chiffres derrière la virgule)

	■ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9
	.									
■ +	☐ 0	☐ 1	■ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9
☐ −	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	■ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

Explication : On calcule d'abord

- les moyennes

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i = \frac{\alpha_1 n_{1,\cdot} + \alpha_2 n_{2,\cdot}}{N} = \frac{1\times 3 + 2\times 5}{8} = \frac{13}{8} = 1.625,$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}\beta_j = \frac{\beta_1 n_{\cdot,1} + \beta_2 n_{\cdot,2}}{N} = \frac{2\times 4 + 3\times 4}{8} = \frac{20}{8} = 2.500,$$

- puis les variances

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i^2 - \bar{\mathbf{x}}^2 = \frac{\alpha_1^2 n_{1,\cdot} + \alpha_2^2 n_{2,\cdot}}{N} - \frac{(13)^2}{8^2} = \frac{1^2\times 3 + 2^2\times 5}{8} - \frac{13^2}{8^2} = \frac{23}{8} - \frac{169}{64} = \frac{23\times 8 - 169}{64} = 0.234,$$

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}(\beta_j)^2 - \bar{\mathbf{y}}^2 = \frac{\beta_1^2 n_{\cdot,1} + \beta_2^2 n_{\cdot,2}}{N} - \frac{(20)^2}{8^2} = \frac{2^2\times 4 + 3^2\times 4}{8} - \frac{20^2}{8^2} = \frac{52}{8} - \frac{400}{64} = \frac{52\times 8 - 400}{64} = 0.250$$

et enfin la covariance

$$C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_{i,j}(\alpha_i - \bar{\mathbf{x}})(\beta_j - \bar{\mathbf{y}}) = \frac{n_{1,1}(\alpha_1 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_1 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{1,2}(\alpha_1 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_2 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{2,1}(\alpha_2 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_1 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{2,2}(\alpha_2 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_2 - \bar{\mathbf{y}})}{N}$$

$$= \frac{2\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(2-\bar{\mathbf{y}}) + 1\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(3-\bar{\mathbf{y}}) + 2\times(2-\bar{\mathbf{x}})\times(2-\bar{\mathbf{y}}) + 3\times(2-\bar{\mathbf{x}})\times(3-\bar{\mathbf{y}})}{8}$$

$= 0.062.$

On trouve alors le coefficient de corrélation en utilisant la formule $r = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{V(\mathbf{x})V(\mathbf{y})}} = 0.258.$

Énoncé commun aux 4 questions suivantes :

Une série statistique est définie partiellement dans le tableau ci-dessous.

x	2	3	4	5	6
y	26	y_1	y_2	y_3	45

On nous dit que l'équation de la droite de régression de y en fonction de x est $y = \frac{8}{5} + \frac{23}{5}x$.

20 Quelle est la variance $V(\mathbf{x})$ de la série $\mathbf{x}$?

■ +										
−	0	1	**■ 2**	3	4	5	6	7	8	9

Explication : La variance est calculée en utilisant la formule $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

21 Quelle est la moyenne $\overline{y}$ de la série $\mathbf{y}$?

■ +	0	1	**■ 2**	3	4	5	6	7	8	9	← Dizaines
−	**■ 0**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	← Unités

Explication : Puisque le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à la droite de régression, $\overline{y}$ est calculé comme $\overline{y} = \frac{8}{5} + \frac{23}{5} \times 4 = 20$.

22 Quelle est la covariance entre les séries $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$?

■ +											
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	**■ 9**	← Unités

Explication : Puisque la pente de la droite de regression de y par rapport à x est égale à $\gamma_1 = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$, nous pouvons calculer la covariance $C(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en multipliant γ_1 par $V(\mathbf{x})$.

23 Si toutes les valeurs de $\mathbf{x}$ augmentent de 3, notons $y = q + mx$ la nouvelle équation de la droite de régression de y en fonction x. Que vaut q ?

	0	**■ 1**	2	3	4	5	6	7	8	9	← Dizaines
	0	1	**■ 2**	3	4	5	6	7	8	9	← Unités
+	.										
■ −	0	1	**■ 2**	3	4	5	6	7	8	9	← Dixièmes

Explication : Notons $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ la droite de regression donnée dans l'énoncé. Elle se réécrit aussi comme $y = \overline{y} + \gamma_1(x - \overline{x})$ avec $\gamma_0 = \overline{y} - \gamma_1\overline{x}$. Si on augmente toutes les valeurs de $\mathbf{x}$ de K, sa moyenne augmente de K et la droite est translatée à droite de K. Ainsi, la pente de la nouvelle droite de régression ne change pas, mais l'ordonnée à l'origine change. La nouvelle équation est donc $y = \overline{y} + \gamma_1(x - (\overline{x} + K)) = \gamma_0 + \gamma_1\overline{x} + \gamma_1(x - (\overline{x} + K)) = (\gamma_0 - \gamma_1 K) + \gamma_1 x$ ainsi $q = \gamma_0 - \gamma_1 K = \frac{8}{5} - \frac{23}{5} \times 3 = -\frac{61}{5} = -12.2$.

INSTRUCTIONS

M1-INFO — UE 731 Remise à niveau - Mathématiques — 7 octobre 2024 Durée : 2h

Sélectionnez les quatre derniers chiffres de votre numéro d'étudiant (par ex., si le numéro est 2200**2681**, cochez 2 sur la première ligne, 6 sur la deuxième, etc.) :

NOM	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Prénom..	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- Une feuille A4 recto-verso manuscrite et une calculatrice sont autorisées. Tout autre document est interdit.
- Veuillez **noircir complètement les cases**.
- Il existe trois types de questions :
  - **Questions à choix unique.**
    Choisissez une seule réponse parmi celles proposées. Des points négatifs seront attribués pour une réponse incorrecte.
  - **Questions ouvertes.**
    Répondez en remplissant un tableau. La correction sera effectuée manuellement.
  - **Questions numériques.**
    La réponse est une valeur numérique à coder. Cochez **exactement un chiffre par ligne.**
    - Exemple d'une question où la réponse est un entier :

$+27 \rightsquigarrow$

■ +	0	1	■ 2	3	4	5	6	7	8	9	← Dizaines
−	0	1	2	3	4	5	6	■ 7	8	9	← Unités

    - Exemple d'une question où la réponse est un nombre décimal :

$-5.9 \rightsquigarrow$

+	0	1	2	3	4	■ 5	6	7	8	9	← Unités
	.										
■ −	0	1	2	3	4	5	6	7	8	■ 9	← Dixièmes

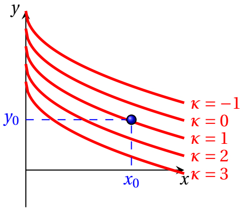
✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Fonctions de deux variables** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

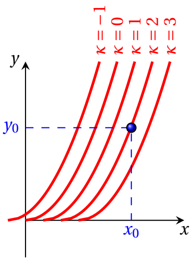
1 Soient $f(x,y) = -5x + 13y$, $x(u,v) = uv$ et $y(u,v) = u + v$. On définit $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$. Calculer $\partial_v g$.

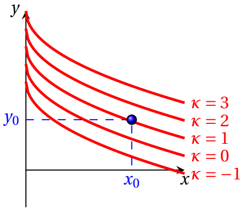
☐ -5 ☐ $-5v$ ☐ $13u$ ☐ $13-5v$ ■ $13-5u$ ☐ Autre:

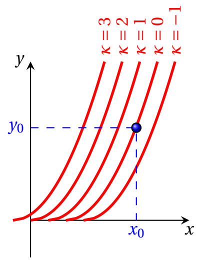
Explication : $\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$.

2 Parmi les graphes ci-dessous, lequel pourrait représenter les lignes de niveau d'une fonction $f(x,y)$ telle que $\partial_x f(x_0,y_0) < 0$ et $\partial_y f(x_0,y_0) < 0$?

■ 

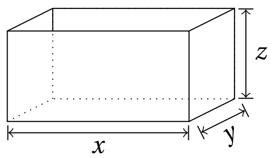
☐ 

☐ 

☐ 

Explication : Comme $\partial_x f(x_0,y_0) \le 0$, la fonction $h(x) = f(x,y_0)$ est décroissante. Puisque $\partial_y f(x_0,y_0) \le 0$, la fonction $g(y) = f(x_0,y)$ est décroissante.

3 Une boîte *ouverte* a la forme d'un parallélépipède. On cherche les valeurs $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V fixé égale à 32 cm^3. On doit donc minimiser la fonction $S(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$ sachant que $xyz = 32$. Que vaut S dans son minimum (en cm^2)?



☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8 ☐9

Explication : On a $x,y,z > 0$. On pose $\sigma(x,y) = S\left(x, y, \frac{32}{xy}\right) = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$.
Calcul des points critiques:

$$\nabla\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} y - \frac{64}{x^2} \\ x - \frac{64}{y^2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x,y) = (4,4).$$

Il existe un seul point critique qui est $(4,4)$.
Nature des points critiques:

$$H_\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{128}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{128}{y^3} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad H_\sigma(4,4) = \begin{pmatrix} 2>0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det H_\sigma(4,4) > 0.$$

On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a $S\left(4, 4, \frac{32}{16}\right) = \sigma(4,4) = 48$.

4 Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que (x_0,y_0) est un point critique et que la matrice Hessienne évaluée en ce point est

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la nature du point critique ?

☐ c'est un maximum
☐ c'est un minimum
☐ c'est un point selle
■ la matrice Hessienne ne permet pas de conclure

Explication : Puisque le déterminant de la matrice Hessienne est nul, on ne peut pas conclure sur la nature du point critique.

5 On se donne la fonction

$$f(x,y)=\sqrt{\left(10^{-4}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)^2+10^6}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $xy=10^s$. Que vaut s?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication :

$$f(x,y)=\sqrt{\left(10^{-4}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)^2+10^6}$$

$$\partial_x f(x,y)=\frac{2\left(10^{-4}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)10^{-4}}{2\sqrt{\left(10^{-4}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)^2+10^6}}=0 \qquad \text{ssi } \left(10^{-4}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)=0$$

$$\partial_y f(x,y)=\frac{2\left(10^{-4}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)\frac{-10^{-3}}{y^2}}{2\sqrt{\left(10^{-4}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)^2+10^6}} \qquad \text{ssi } \left(10^{-4}x-\frac{10^{-3}}{y}\right)=0$$

Donc $xy=\frac{10^{-3}}{10^{-4}}=10^1$.

6 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=x^3+xy+y$. Calculer l'équation du plan tangent à f en $(-3,2)$.

- ☐ $29x-2y-31$
- ■ $29x-2y+60$
- ☐ $x^3+xy+29x-y+91$
- ☐ $29x-2y+91$
- ☐ $29x+56$
- ☐ Autre:

Explication : $f(x,y)\simeq f(x_0,y_0)+(x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0)+(y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0)$.

7 Soit la fonction $f(x,y)=\log\left(11x^4-y^2\right)$. Parmi les réponses suivantes, laquelle est égale à $\partial_x f$?

- ☐ $44x^3$
- ☐ $11x^4-y^2$
- ☐ $\frac{1}{11x^4-y^2}$
- ☐ $-\frac{2y}{11x^4-y^2}$
- ■ $\frac{44x^3}{11x^4-y^2}$
- ☐ Autre

Explication : $f(x,y)=\ln(bx^c-ay^2)$ donc la dérivée par rapport à x est $\frac{bcx^{c-1}}{bx^c-ay^2}$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Interpolation** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

8 Soit $f : [1;17] \to \mathbb{R}$ la **spline linéaire** qui interpole les points $f(1) = -23$, $f(8) = 12$, $f(13) = -23$, $f(17) = -35$. Que vaut $f(12)$?

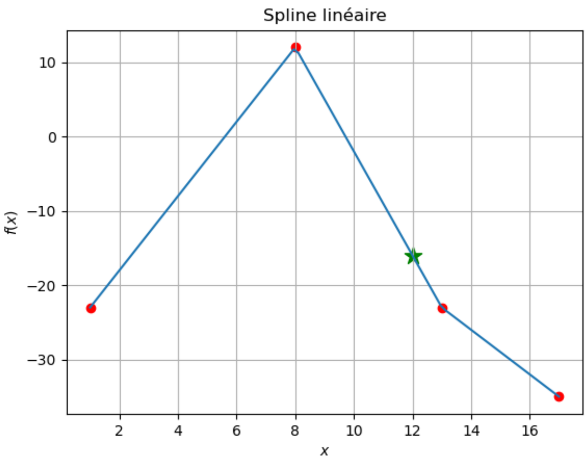
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Explication : La spline linéaire $f : [1;17] \to \mathbb{R}$ a pour équation :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{12-(-23)}{8-1}(x-1) + (-23) & \text{si } 1 \le x \le 8 \\ \frac{-23-(12)}{13-8}(x-8) + (12) & \text{si } 8 \le x \le 13 \\ \frac{-35-(-23)}{17-13}(x-13) + (-23) & \text{si } 13 \le x \le 17 \end{cases}$$

En substituant $x = 12$, on trouve :

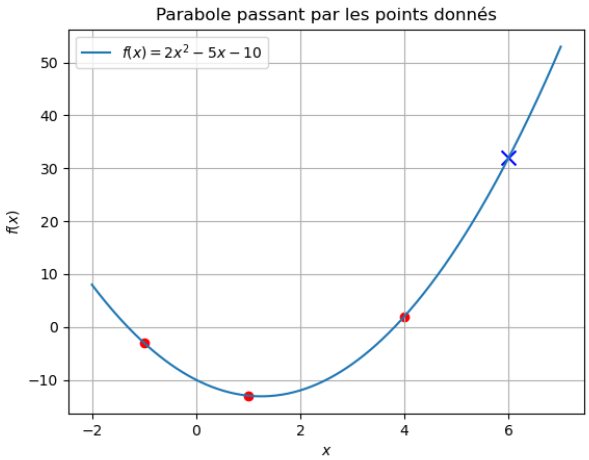
$$f(12) = -16$$



9 Soit f l'unique polynome qui interpole les points $(1;-13)$, $(-1;-3)$ et $(4;2)$. Que vaut $f(6)$?

■ +	0	1	2	■ 3	4	5	6	7	8	9
−	0	1	■ 2	3	4	5	6	7	8	9

Explication : Le seul polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui passe par les trois points est la parabole d'équation $2x^2-5x-10 = -\frac{3(x-4)(x-1)}{10} + \frac{13(x-4)(x+1)}{6} + \frac{2(x-1)(x+1)}{15}$. Pour la calculer l'équation de ce polynome on peut utiliser soit la méthode directe (résolution du système linéaire pour trouver les coefficients dans la base canonique), soit l'écrire dans la base de Lagrange ou encore dans la base de Newton.



10 Dans la base de Lagrange, le polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui interpole les trois points $(1,23)$, $(14,17)$ et $(21,34)$ s'écrit $p(x) = 23L_0(x)+17L_1(x)+34L_2(x)$. Que vaut $L_2(18)$?

■ $\frac{17}{35}$ □ $-\frac{3}{65}$ □ $-\frac{68}{91}$ □ $-\frac{51}{260}$ □ $\frac{51}{91}$ □ $\frac{17}{65}$ □ $-\frac{3}{35}$ □ $-\frac{51}{140}$ □ $\frac{12}{91}$ □ Autre

Explication :

$$L_0(x) = \frac{(x-21)(x-14)}{260}, \qquad L_1(x) = \frac{(x-21)(x-1)}{-91}, \qquad L_2(x) = \frac{(x-14)(x-1)}{140},$$

$$L_0(18) = \frac{-12}{260}, \qquad L_1(18) = \frac{-51}{-91}, \qquad L_2(18) = \frac{68}{140}.$$

11 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(3,1)$, $(4,2)$, $(5,3)$ et $(6,3)$ s'écrit $p(x) = a+b(x-3)+c(x-3)(x-4)+d(x-3)(x-4)(x-5)$. Que vaut c ?

+										
−	■ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Explication : Les coordonnées dans la base de Newton sont les valeurs encadrées dans le tableau des différences divisées ci-dessous:

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-1},x_i]$
0	3	$\boxed{1=a}$			
1	4	2	$\boxed{1=b}$		
2	5	3	1	$\boxed{0=c}$	
3	6	3	0	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{-\frac{1}{6}=d}$

12 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(2,6)$, $(3,10)$, $(6,46)$ et $(9,370)$ s'écrit $p(x) = 6+4(x-2)+2(x-2)(x-3)+2(x-2)(x-3)(x-6)$. En déduire l'équation du polynôme de Newton qui n'interpole que les trois points $(2,6)$, $(3,10)$ et $(6,46)$.

0.0 0.5 1 Cases réservées au correcteur

....

Explication : $p(x) = 6+4(x-2)+2(x-2)(x-3)$.

Fonction de Meilleure Approximation

13 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ la droite de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-1	0	1
y_i	1	0	2

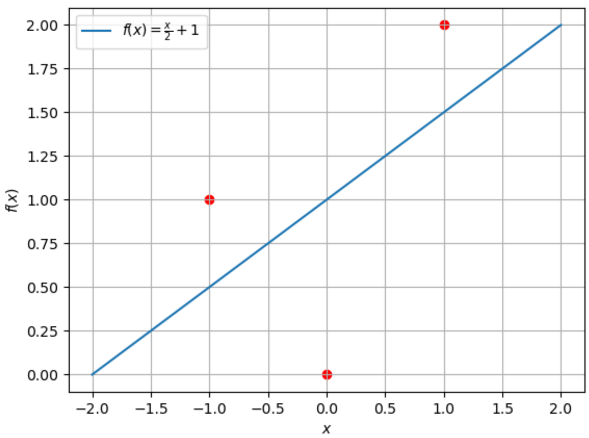
Que vaut α_0 ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n=2$ et il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_1 = 1/2$.



14 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ la parabole de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	3	-1	-2	-1	1

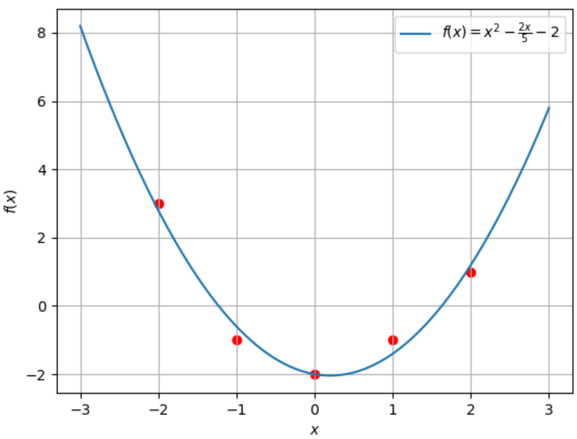
Que vaut α_0?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n = 4$ et il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = -2$, $\alpha_1 = -2/5$ et $\alpha_2 = 1$.



15 Soit $f(x) = \alpha_0 \cos(x) + \alpha_1 \sin(x)$ la fonction de meilleure approximation des points suivants:

x_i	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
y_i	5	5	0

Que vaut α_0 ?

■ + □ − □ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 ■ 5 □ 6 □ 7 □ 8 □ 9

Explication : On doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\mathscr{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$$
$$(\alpha_0, \alpha_1) \mapsto \mathscr{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i))^2.$$

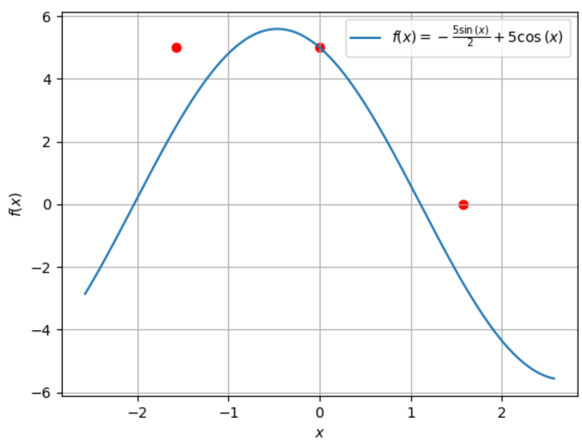
Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche ses points stationnaires. Puisque

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i))\cos(x_i)\right),$$
$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i))\sin(x_i)\right),$$

on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i))\cos(x_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i))\sin(x_i) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} \cos^2(x_i) & \sum_{i=0}^{n} \cos(x_i)\sin(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} \cos(x_i)\sin(x_i) & \sum_{i=0}^{n} \sin^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \cos(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} y_i \sin(x_i) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 5$ et $\alpha_1 = -\frac{5}{2}$.



16 Considérons les points

x	1	2	3	4	5	6
y	-1145	27	25	73	120	156

Parmi les droites de la forme $f(x) = -1 + \alpha_1 x$, on cherche celle de meilleure approximation des points donnés. Calculer la valeur de α_1.

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication :

- Notons $K = -1$. On doit minimiser la fonction d'une seule variable

$$\mathscr{E}(\alpha_1) = \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right)^2.$$

- On obtient

$$\mathscr{E}'(\alpha_1) = -2 \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right) x_i.$$

- Ainsi,

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^{5} (y_i - K) x_i}{\sum_{i=0}^{5} x_i^2}.$$

Statistiques descriptives

Énoncé commun aux 3 questions suivantes.

On considère le tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2]$ et $\mathbf{y} = [\beta_1, \beta_2]$:

	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	Effectif marginal de α_i
$\alpha_1 = 1$	$n_{1,1} = 2$	$n_{1,2} = 1$	$n_{1,\cdot} = 3$
$\alpha_2 = 2$	$n_{2,1} = 2$	$n_{2,2} = 3$	$n_{2,\cdot} = 5$
Effectif marginal de β_j	$n_{\cdot,1} = 4$	$n_{\cdot,2} = 4$	$N = 8$

17 Compléter les cases vides du tableau des **fréquences** :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1			
α_2			
Fréq. marg. de β_j			

0.0 0.11 0.22 0.33 0.44 0.56 0.67 0.78 0.89 1 Cases réservées au correcteur

Explication : Les fréquences s'obtiennent en divisant chaque effectif du tableau donné dans l'énoncé par le total $N = 8$. Voici le tableau des fréquences complètes :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1	$f_{1,1} = \frac{2}{8} = 0.250$	$f_{1,2} = \frac{1}{8} = 0.125$	$f_{1,\cdot} = \frac{3}{8} = 0.375$
α_2	$f_{2,1} = \frac{2}{8} = 0.250$	$f_{2,2} = \frac{3}{8} = 0.375$	$f_{2,\cdot} = \frac{5}{8} = 0.625$
Fréq. marg. de β_j	$f_{\cdot,1} = \frac{4}{8} = 0.500$	$f_{\cdot,2} = \frac{4}{8} = 0.500$	1

18 Compléter les tableaux suivants:

Profils en **colonne** $f_{i|j}$ des **fréquences conditionnelles** de α sachant β :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

Profils en **ligne** $f_{j|i}$ des **fréquences conditionnelles** de β sachant α :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

0.0 0.12 0.25 0.38 0.5 0.62 0.75 0.88 1 Cases réservées au correcteur

Explication :

$f_{i|j} = \frac{n_{i,j}}{n_{\cdot,j}}$ pour chaque colonne. Voici le tableau des profils en colonne complètes :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{1}{4} = 0.250$
α_2	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{3}{4} = 0.750$

$f_{j|i} = \frac{n_{i,j}}{n_{i,\cdot}}$ donc voici le tableau des profils en ligne complètes :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{3} = 0.667$	$\frac{1}{3} = 0.333$
α_2	$\frac{2}{5} = 0.400$	$\frac{3}{5} = 0.600$

19 Le coefficient de corrélation linéaire vaut ? (arrondir à deux chiffres derrière la virgule)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.										
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Explication : On calcule d'abord

- les moyennes

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i = \frac{\alpha_1 n_{1,\cdot} + \alpha_2 n_{2,\cdot}}{N} = \frac{1\times 3 + 2\times 5}{8} = \frac{13}{8} = 1.625,$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}\beta_j = \frac{\beta_1 n_{\cdot,1} + \beta_2 n_{\cdot,2}}{N} = \frac{2\times 4 + 3\times 4}{8} = \frac{20}{8} = 2.500,$$

- puis les variances

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i^2 - \bar{\mathbf{x}}^2 = \frac{\alpha_1^2 n_{1,\cdot} + \alpha_2^2 n_{2,\cdot}}{N} - \frac{(13)^2}{8^2} = \frac{1^2\times 3 + 2^2\times 5}{8} - \frac{13^2}{8^2} = \frac{23}{8} - \frac{169}{64} = \frac{23\times 8 - 169}{64} = 0.234,$$

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}(\beta_j)^2 - \bar{\mathbf{y}}^2 = \frac{\beta_1^2 n_{\cdot,1} + \beta_2^2 n_{\cdot,2}}{N} - \frac{(20)^2}{8^2} = \frac{2^2\times 4 + 3^2\times 4}{8} - \frac{20^2}{8^2} = \frac{52}{8} - \frac{400}{64} = \frac{52\times 8 - 400}{64} = 0.250$$

et enfin la covariance

$$C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_{i,j}(\alpha_i - \bar{\mathbf{x}})(\beta_j - \bar{\mathbf{y}}) = \frac{n_{1,1}(\alpha_1 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_1 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{1,2}(\alpha_1 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_2 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{2,1}(\alpha_2 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_1 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{2,2}(\alpha_2 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_2 - \bar{\mathbf{y}})}{N}$$

$$= \frac{2\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(2-\bar{\mathbf{y}}) + 1\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(3-\bar{\mathbf{y}}) + 2\times(2-\bar{\mathbf{x}})\times(2-\bar{\mathbf{y}}) + 3\times(2-\bar{\mathbf{x}})\times(3-\bar{\mathbf{y}})}{8}$$

$$= 0.062.$$

On trouve alors le coefficient de corrélation en utilisant la formule $r = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{V(\mathbf{x})V(\mathbf{y})}} = 0.258.$

Énoncé commun aux 4 questions suivantes :

Une série statistique est définie partiellement dans le tableau ci-dessous.

x	2	3	4	5	6
y	26	y_1	y_2	y_3	45

On nous dit que l'équation de la droite de régression de y en fonction de x est $y = \frac{46}{5} + \frac{47}{10}x$.

20 Quelle est la variance $V(\mathbf{x})$ de la série **x** ?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La variance est calculée en utilisant la formule $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

21 Quelle est la moyenne $\overline{y}$ de la série **y** ?

\+ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dizaines
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à la droite de régression, $\overline{y}$ est calculé comme $\overline{y} = \frac{46}{5} + \frac{47}{10} \times 4 = 28$.

22 Quelle est la covariance entre les séries **x** et **y** ?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque la pente de la droite de regression de y par rapport à x est égale à $\gamma_1 = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$, nous pouvons calculer la covariance $C(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en multipliant γ_1 par $V(\mathbf{x})$.

23 Si toutes les valeurs de **x** augmentent de 3, notons $y = q + mx$ la nouvelle équation de la droite de régression de y en fonction x. Que vaut q ?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités
\+ .
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dixièmes

Explication : Notons $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ la droite de regression donnée dans l'énoncé. Elle se réécrit aussi comme $y = \overline{y} + \gamma_1(x - \overline{x})$ avec $\gamma_0 = \overline{y} - \gamma_1\overline{x}$. Si on augmente toutes les valeurs de **x** de K, sa moyenne augmente de K et la droite est translatée à droite de K. Ainsi, la pente de la nouvelle droite de régression ne change pas, mais l'ordonnée à l'origine change. La nouvelle équation est donc $y = \overline{y} + \gamma_1(x - (\overline{x} + K)) = \gamma_0 + \gamma_1\overline{x} + \gamma_1(x - (\overline{x} + K)) = (\gamma_0 - \gamma_1 K) + \gamma_1 x$ ainsi $q = \gamma_0 - \gamma_1 K = \frac{46}{5} - \frac{47}{10} \times 3 = -\frac{49}{10} = -4.9$.

Instructions

M1-INFO — UE 731 Remise à niveau - Mathématiques — 7 octobre 2024 Durée : 2h

Sélectionnez les quatre derniers chiffres de votre numéro d'étudiant (par ex., si le numéro est 2200**2681**, cochez 2 sur la première ligne, 6 sur la deuxième, etc.) :

NOM ....

Prénom..

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Une feuille A4 recto-verso manuscrite et une calculatrice sont autorisées. Tout autre document est interdit.
- Veuillez **noircir complètement les cases**.
- Il existe trois types de questions :
  - **Questions à choix unique.**
    Choisissez une seule réponse parmi celles proposées. Des points négatifs seront attribués pour une réponse incorrecte.
  - **Questions ouvertes.**
    Répondez en remplissant un tableau. La correction sera effectuée manuellement.
  - **Questions numériques.**
    La réponse est une valeur numérique à coder. Cochez **exactement un chiffre par ligne.**
    - Exemple d'une question où la réponse est un entier :

+27 ⇝

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	← Dizaines
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	← Unités

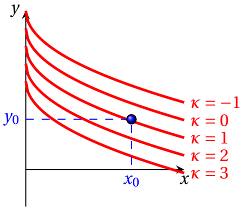
    - Exemple d'une question où la réponse est un nombre décimal :

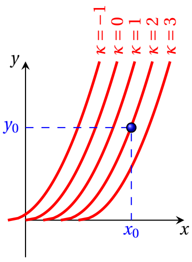
−5.9 ⇝

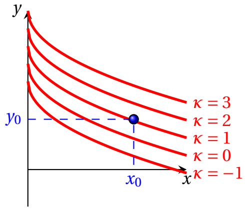
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	← Unités
+	.										
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	← Dixièmes

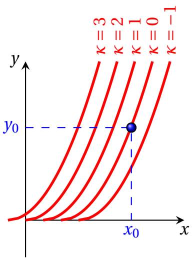
✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Fonctions de deux variables ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

1 Parmi les graphes ci-dessous, lequel pourrait représenter les lignes de niveau d'une fonction $f(x,y)$ telle que $\partial_x f(x_0,y_0) < 0$ et $\partial_y f(x_0,y_0) < 0$?

■ 

□ 

□ 

□ 

Explication : Comme $\partial_x f(x_0,y_0) \le 0$, la fonction $h(x) = f(x,y_0)$ est décroissante. Puisque $\partial_y f(x_0,y_0) \le 0$, la fonction $g(y) = f(x_0,y)$ est décroissante.

2 On se donne la fonction

$$f(x,y) = \sqrt{\left(10^4 x - \frac{10^2}{y}\right)^2 + 10^2}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $xy = 10^s$. Que vaut s?

□ +										
■ −	□ 0	□ 1	■ 2	□ 3	□ 4	□ 5	□ 6	□ 7	□ 8	□ 9

Explication :

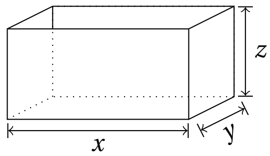
$$f(x,y) = \sqrt{\left(10^4 x - \frac{10^2}{y}\right)^2 + 10^2}$$

$$\partial_x f(x,y) = \frac{2\left(10^4 x - \frac{10^2}{y}\right)10^4}{2\sqrt{\left(10^4 x - \frac{10^2}{y}\right)^2 + 10^2}} = 0 \qquad \text{ssi } \left(10^4 x - \frac{10^2}{y}\right) = 0$$

$$\partial_y f(x,y) = \frac{2\left(10^4 x - \frac{10^2}{y}\right)\frac{-10^2}{y^2}}{2\sqrt{\left(10^4 x - \frac{10^2}{y}\right)^2 + 10^2}} \qquad \text{ssi } \left(10^4 x - \frac{10^2}{y}\right) = 0$$

Donc $xy = \frac{10^2}{10^4} = 10^{-2}$.

3 Une boîte *ouverte* a la forme d'un parallélépipède. On cherche les valeurs $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V fixé égale à 32 cm^3. On doit donc minimiser la fonction $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ sachant que $xyz = 32$. Que vaut S dans son minimum (en cm^2)?



□ 0	□ 1	□ 2	□ 3	■ 4	□ 5	□ 6	□ 7	□ 8	□ 9
□ 0	□ 1	□ 2	□ 3	□ 4	□ 5	□ 6	□ 7	■ 8	□ 9

Explication : On a $x, y, z > 0$. On pose $\sigma(x, y) = S\left(x, y, \frac{32}{xy}\right) = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$.
Calcul des points critiques:

$$\nabla\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} y - \frac{64}{x^2} \\ x - \frac{64}{y^2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = (4, 4).$$

Il existe un seul point critique qui est $(4, 4)$.
Nature des points critiques:

$$H_\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{128}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{128}{y^3} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad H_\sigma(4, 4) = \begin{pmatrix} 2 > 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det H_\sigma(4, 4) > 0.$$

On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a $S\left(4, 4, \frac{32}{16}\right) = \sigma(4, 4) = 48$.

4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que (x_0, y_0) est un point critique et que la matrice Hessienne évaluée en ce point est

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la nature du point critique ?

■ c'est un point selle
□ c'est un maximum
□ c'est un minimum
□ la matrice Hessienne ne permet pas de conclure

Explication :

- Le déterminant de la matrice Hessienne est $\det(H_f) = (-1) \times (2) - (1)^2 = -3$.
- Puisque $\det(H_f) = -3$ et que $\partial_{xx} f(x_0, y_0) = -1$, on en conclut que c'est un point selle.

5 Soit la fonction $f(x, y) = e^{11x^4 - 2y}$. Parmi les réponses suivantes, laquelle est égale à $\partial_y f$?

□ $11e^{11x^4-2y}$ □ $44x^3e^{11x^4-2y}$ □ $44ye^{11x^4-2y}$ ■ $-2e^{11x^4-2y}$ □ $44e^{11x^4-2y}$ □ Autre

Explication : $f(x, y) = e^{bx^c - ay^d}$ donc la dérivée par rapport à y est $-ady^{d-1}e^{bx^c - ay^d}$.

6 Soient $f(x, y) = 3x + 15y$, $x(u, v) = uv$ et $y(u, v) = u - v$. On définit $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$. Calculer $\partial_u g$.

■ $3v + 15$ □ $3v$ □ $3u - 15$ □ 3 □ $15u$ □ Autre:

Explication : $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$.

7 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = xy + x + y^2$. Calculer l'équation du plan tangent à f en $(-3, 1)$.

■ $2x - y + 2$
□ $2x - y - 5$
□ $2x + 1$
□ $xy + 3x + y^2 - y + 7$
□ $2x - y + 7$
□ Autre:

Explication : $f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + (x - x_0)\partial_x f(x_0, y_0) + (y - y_0)\partial_y f(x_0, y_0)$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Interpolation ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

8 Soit $f : [1;17] \to \mathbb{R}$ la **spline linéaire** qui interpole les points $f(1) = -23$, $f(8) = 12$, $f(13) = -23$, $f(17) = -35$. Que vaut $f(3)$?

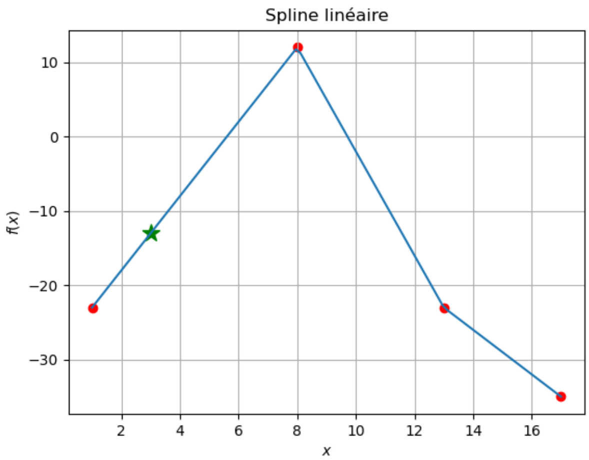
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Explication : La spline linéaire $f : [1;17] \to \mathbb{R}$ a pour équation :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{12-(-23)}{8-1}(x-1) + (-23) & \text{si } 1 \le x \le 8 \\ \frac{-23-(12)}{13-8}(x-8) + (12) & \text{si } 8 \le x \le 13 \\ \frac{-35-(-23)}{17-13}(x-13) + (-23) & \text{si } 13 \le x \le 17 \end{cases}$$

En substituant $x = 3$, on trouve :

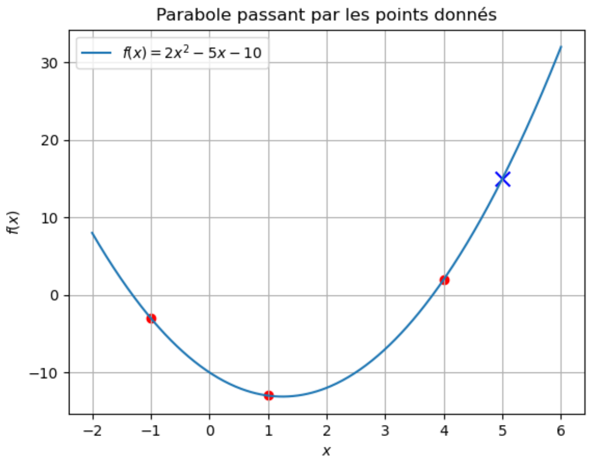
$$f(3) = -13$$



9 Soit f l'unique polynome qui interpole les points $(1;-13)$, $(-1;-3)$ et $(4;2)$. Que vaut $f(5)$?

■ +	☐ 0	■ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9
☐ −	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	■ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

Explication : Le seul polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui passe par les trois points est la parabole d'équation $2x^2-5x-10=-\frac{3(x-4)(x-1)}{10}+\frac{13(x-4)(x+1)}{6}+\frac{2(x-1)(x+1)}{15}$. Pour la calculer l'équation de ce polynome on peut utiliser soit la méthode directe (résolution du système linéaire pour trouver les coefficients dans la base canonique), soit l'écrire dans la base de Lagrange ou encore dans la base de Newton.



10 Dans la base de Lagrange, le polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui interpole les trois points $(1,29)$, $(14,17)$ et $(21,34)$ s'écrit $p(x)=29L_0(x)+17L_1(x)+34L_2(x)$. Que vaut $L_0(20)$?

☐ $\frac{19}{91}$ ☐ $-\frac{19}{140}$ ☐ $\frac{6}{91}$ ☐ $-\frac{114}{91}$ ☐ $\frac{57}{130}$ ■ $-\frac{3}{130}$ ☐ $-\frac{3}{70}$ ☐ $-\frac{19}{260}$ ☐ $\frac{57}{70}$ ☐ Autre

Explication :

$$L_0(x)=\frac{(x-21)(x-14)}{260},\qquad L_1(x)=\frac{(x-21)(x-1)}{-91},\qquad L_2(x)=\frac{(x-14)(x-1)}{140},$$

$$L_0(20)=\frac{-6}{260},\qquad L_1(20)=\frac{-19}{-91},\qquad L_2(20)=\frac{114}{140}.$$

11 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(1,2)$, $(5,22)$, $(9,170)$ et $(11,772)$ s'écrit $p(x)=a+b(x-1)+c(x-1)(x-5)+d(x-1)(x-5)(x-9)$. Que vaut c ?

■ +										
☐ −	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	■ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

Explication : Les coordonnées dans la base de Newton sont les valeurs encadrées dans le tableau des différences divisées ci-dessous:

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-1},x_i]$
0	1	$\boxed{2=a}$			
1	5	22	$\boxed{5=b}$		
2	9	170	37	$\boxed{4=c}$	
3	11	772	301	44	$\boxed{4=d}$

12 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(5,2)$, $(7,16)$, $(11,92)$ et $(15,1512)$ s'écrit $p(x) = 2+7(x-5)+2(x-5)(x-7)+4(x-5)(x-7)(x-11)$. En déduire l'équation du polynôme de Newton qui n'interpole que les trois points $(5,2)$, $(7,16)$ et $(11,92)$.

0.0 0.5 1 Cases réservées au correcteur

....

Explication : $p(x) = 2+7(x-5)+2(x-5)(x-7)$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Fonction de Meilleure Approximation ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

13 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ la droite de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-1	0	1
y_i	4	0	2

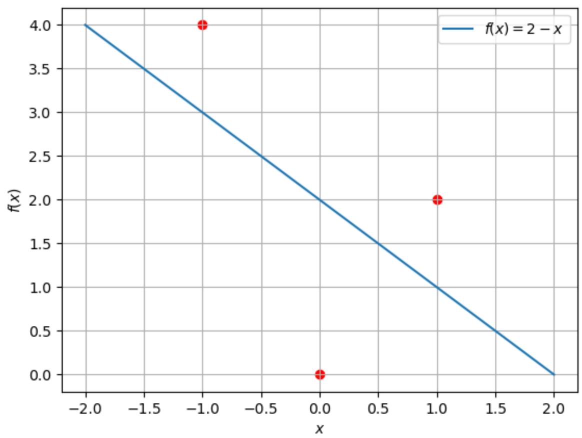
Que vaut α_0 ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n=2$ et il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 2$ et $\alpha_1 = -1$.



14 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ la parabole de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-1	1	2	1	-3

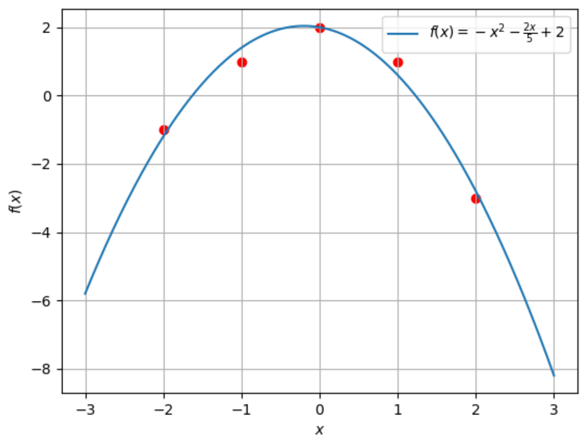
Que vaut α_0?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n = 4$ et il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = -2/5$ et $\alpha_2 = -1$.



15 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(x)$ la fonction de meilleure approximation des points suivants :

x_i	e^1	e^2	e^3
y_i	6	15	36

Que vaut α_0 ?

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

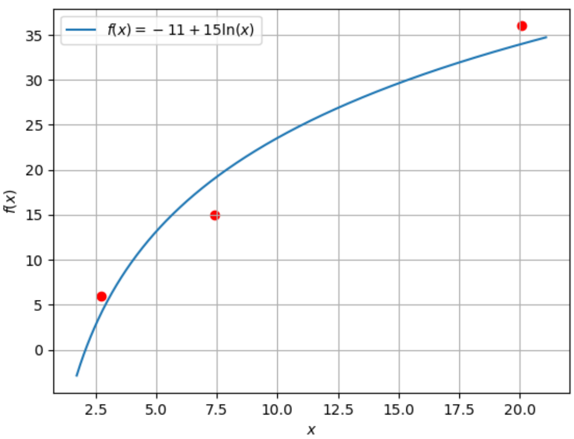
Explication : On doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\mathscr{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$$
$$(\alpha_0, \alpha_1) \mapsto \mathscr{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^{2} \left(y_i - (\alpha_0\varphi_0(x_i) + \alpha_1\varphi_1(x_i))\right)^2.$$

où $\varphi_0(x) = 1$ et $\varphi_1(x) = \ln(x)$. On doit donc résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} \sum\varphi_0^2(x_i) & \sum\varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) \\ \sum\varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) & \sum\varphi_1^2(x_i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum y_i\varphi_0(x_i)\\ \sum y_i\varphi_1(x_i)\end{pmatrix} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^2 1 & \sum_{i=0}^2 \ln(x_i) \\ \sum_{i=0}^2 \ln(x_i) & \sum_{i=0}^2 \ln^2(x_i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{i=0}^2 y_i\\ \sum_{i=0}^2 y_i\ln(x_i)\end{pmatrix} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{bmatrix}3 & 6\\ 6 & 14\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}57\\ 144\end{bmatrix}$$

Ainsi $\alpha_0 =$-11 et $\alpha_1 = 15$.



16 Considérons les points

x	1	2	3	4	5	6
y	-1839	22	30	81	117	184

Parmi les droites de la forme $f(x) = -4 + \alpha_1 x$, on cherche celle de meilleure approximation des points donnés. Calculer la valeur de α_1.

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication :

- Notons $K = -4$. On doit minimiser la fonction d'une seule variable

$$\mathscr{E}(\alpha_1) = \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right)^2.$$

- On obtient

$$\mathscr{E}'(\alpha_1) = -2 \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right) x_i.$$

- Ainsi,

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^{5} (y_i - K) x_i}{\sum_{i=0}^{5} x_i^2}.$$

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Statistiques descriptives** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Énoncé commun aux 3 questions suivantes.

On considère le tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2]$ et $\mathbf{y} = [\beta_1, \beta_2]$:

	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	Effectif marginal de α_i
$\alpha_1 = 1$	$n_{1,1} = 0$	$n_{1,2} = 1$	$n_{1,\cdot} = 1$
$\alpha_2 = 2$	$n_{2,1} = 2$	$n_{2,2} = 1$	$n_{2,\cdot} = 3$
Effectif marginal de β_j	$n_{\cdot,1} = 2$	$n_{\cdot,2} = 2$	$N = 4$

17 Compléter les cases vides du tableau des **fréquences** :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1			
α_2			
Fréq. marg. de β_j			

0.0 0.11 0.22 0.33 0.44 0.56 0.67 0.78 0.89 1 Cases réservées au correcteur

Explication : Les fréquences s'obtiennent en divisant chaque effectif du tableau donné dans l'énoncé par le total $N = 4$. Voici le tableau des fréquences complètes :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1	$f_{1,1} = \frac{0}{4} = 0.000$	$f_{1,2} = \frac{1}{4} = 0.250$	$f_{1,\cdot} = \frac{1}{4} = 0.250$
α_2	$f_{2,1} = \frac{2}{4} = 0.500$	$f_{2,2} = \frac{1}{4} = 0.250$	$f_{2,\cdot} = \frac{3}{4} = 0.750$
Fréq. marg. de β_j	$f_{\cdot,1} = \frac{2}{4} = 0.500$	$f_{\cdot,2} = \frac{2}{4} = 0.500$	1

18 Compléter les tableaux suivants:

Profils en **colonne** $f_{i|j}$ des **fréquences conditionnelles** de α sachant β :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

Profils en **ligne** $f_{j|i}$ des **fréquences conditionnelles** de β sachant α :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

0.0 0.12 0.25 0.38 0.5 0.62 0.75 0.88 1 Cases réservées au correcteur

Explication :

$f_{i|j} = \frac{n_{i,j}}{n_{\cdot,j}}$ pour chaque colonne. Voici le tableau des profils en colonne complètes :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{0}{2} = 0.000$	$\frac{1}{2} = 0.500$
α_2	$\frac{2}{2} = 1.000$	$\frac{1}{2} = 0.500$

$f_{j|i} = \frac{n_{i,j}}{n_{i,\cdot}}$ donc voici le tableau des profils en ligne complètes :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{0}{1} = 0.000$	$\frac{1}{1} = 1.000$
α_2	$\frac{2}{3} = 0.667$	$\frac{1}{3} = 0.333$

19 Le coefficient de corrélation linéaire vaut ? (arrondir à deux chiffres derrière la virgule)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	.									
+	0	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9
−	0	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9

Explication : On calcule d'abord

- les moyennes

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i = \frac{\alpha_1 n_{1,\cdot} + \alpha_2 n_{2,\cdot}}{N} = \frac{1\times 1 + 2\times 3}{4} = \frac{7}{4} = 1.750,$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}\beta_j = \frac{\beta_1 n_{\cdot,1} + \beta_2 n_{\cdot,2}}{N} = \frac{2\times 2 + 3\times 2}{4} = \frac{10}{4} = 2.500,$$

- puis les variances

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i^2 - \bar{\mathbf{x}}^2 = \frac{\alpha_1^2 n_{1,\cdot} + \alpha_2^2 n_{2,\cdot}}{N} - \frac{(7)^2}{4^2} = \frac{1^2\times 1 + 2^2\times 3}{4} - \frac{7^2}{4^2} = \frac{13}{4} - \frac{49}{16} = \frac{13\times 4 - 49}{16} = 0.188,$$

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}(\beta_j)^2 - \bar{\mathbf{y}}^2 = \frac{\beta_1^2 n_{\cdot,1} + \beta_2^2 n_{\cdot,2}}{N} - \frac{(10)^2}{4^2} = \frac{2^2\times 2 + 3^2\times 2}{4} - \frac{10^2}{4^2} = \frac{26}{4} - \frac{100}{16} = \frac{26\times 4 - 100}{16} = 0.250$$

et enfin la covariance

$$C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_{i,j}(\alpha_i - \bar{\mathbf{x}})(\beta_j - \bar{\mathbf{y}}) = \frac{n_{1,1}(\alpha_1-\bar{\mathbf{x}})(\beta_1-\bar{\mathbf{y}}) + n_{1,2}(\alpha_1-\bar{\mathbf{x}})(\beta_2-\bar{\mathbf{y}}) + n_{2,1}(\alpha_2-\bar{\mathbf{x}})(\beta_1-\bar{\mathbf{y}}) + n_{2,2}(\alpha_2-\bar{\mathbf{x}})(\beta_2-\bar{\mathbf{y}})}{N}$$

$$= \frac{0\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(2-\bar{\mathbf{y}}) + 1\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(3-\bar{\mathbf{y}}) + 2\times(2-\bar{\mathbf{x}})\times(2-\bar{\mathbf{y}}) + 1\times(2-\bar{\mathbf{x}})\times(3-\bar{\mathbf{y}})}{4}$$

$$= -0.125.$$

On trouve alors le coefficient de corrélation en utilisant la formule $r = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{V(\mathbf{x})V(\mathbf{y})}} = -0.577$.

Énoncé commun aux 4 questions suivantes :

Une série statistique est définie partiellement dans le tableau ci-dessous.

x	2	3	4	5	6
y	26	y_1	y_2	y_3	45

On nous dit que l'équation de la droite de régression de y en fonction de x est $y = \frac{16}{5} + \frac{47}{10}x$.

20 Quelle est la variance $V(\mathbf{x})$ de la série **x** ?

\+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La variance est calculée en utilisant la formule $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

21 Quelle est la moyenne $\overline{y}$ de la série **y** ?

\+ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dizaines

− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à la droite de régression, $\overline{y}$ est calculé comme $\overline{y} = \frac{16}{5} + \frac{47}{10} \times 4 = 22$.

22 Quelle est la covariance entre les séries **x** et **y** ?

\+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque la pente de la droite de regression de y par rapport à x est égale à $\gamma_1 = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$, nous pouvons calculer la covariance $C(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en multipliant γ_1 par $V(\mathbf{x})$.

23 Si toutes les valeurs de y augmentent de 3, notons $y = q + mx$ la nouvelle équation de la droite de régression de y en fonction x. Que vaut q ?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

\+ − . 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dixièmes

Explication : Notons $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ la droite de regression donnée dans l'énoncé. Elle se réécrit aussi comme $y = \overline{y} + \gamma_1(x - \overline{x})$ avec $\gamma_0 = \overline{y} - \gamma_1\overline{x}$. Si on augmente toutes les valeurs de **y** de K, sa moyenne augmente de K et la droite est translatée vers le haut de K. Ainsi, la pente de la nouvelle droite de régression ne change pas, mais l'ordonnée à l'origine augmente de K. La nouvelle équation est donc $y = \overline{y} + K + \gamma_1(x - \overline{x}) = (\gamma_0 + K) + \gamma_1 x$ ainsi $q = \gamma_0 + K = \frac{16}{5} + 3 = \frac{31}{5} = 6.2$.

INSTRUCTIONS

M1-INFO — UE 731 Remise à niveau - Mathématiques — 7 octobre 2024 Durée : 2h

Sélectionnez les quatre derniers chiffres de votre numéro d'étudiant (par ex., si le numéro est 2200**2681**, cochez 2 sur la première ligne, 6 sur la deuxième, etc.) :

NOM	☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
	☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
Prénom...	☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
	☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

- Une feuille A4 recto-verso manuscrite et une calculatrice sont autorisées. Tout autre document est interdit.
- Veuillez **noircir complètement les cases**.
- Il existe trois types de questions :
  - **Questions à choix unique.**
    Choisissez une seule réponse parmi celles proposées. Des points négatifs seront attribués pour une réponse incorrecte.
  - **Questions ouvertes.**
    Répondez en remplissant un tableau. La correction sera effectuée manuellement.
  - **Questions numériques.**
    La réponse est une valeur numérique à coder. Cochez **exactement un chiffre par ligne.**
    - Exemple d'une question où la réponse est un entier :

$+27 \rightsquigarrow$

■+	☐0 ☐1 ■2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9	← Dizaines
☐−	☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7 ☐8 ☐9	← Unités

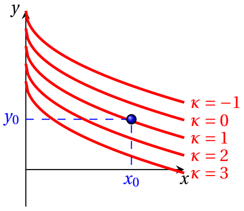
    - Exemple d'une question où la réponse est un nombre décimal :

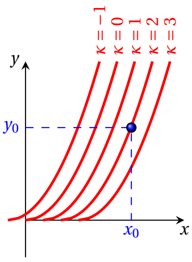
$-5.9 \rightsquigarrow$

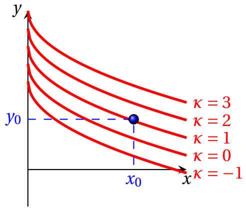
	☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9	← Unités
☐+	.	
■−	☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ■9	← Dixièmes

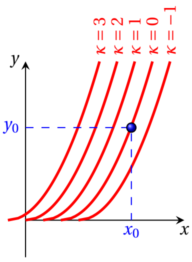
Fonctions de deux variables

1 Parmi les graphes ci-dessous, lequel pourrait représenter les lignes de niveau d'une fonction $f(x,y)$ telle que $\partial_x f(x_0,y_0) < 0$ et $\partial_y f(x_0,y_0) < 0$?

■ 

☐ 

☐ 

☐ 

Explication : Comme $\partial_x f(x_0,y_0) \le 0$, la fonction $h(x) = f(x,y_0)$ est décroissante. Puisque $\partial_y f(x_0,y_0) \le 0$, la fonction $g(y) = f(x_0,y)$ est décroissante.

2 Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = xy + x + y$. Calculer l'équation du plan tangent à f en $(-2,2)$.

☐ $3x - y - 4$ ■ $3x - y + 4$ ☐ $xy + 4x + 8$
☐ $3x - y + 8$ ☐ $3x + 2$ ☐ Autre:

Explication : $f(x,y) \simeq f(x_0,y_0) + (x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0) + (y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0)$.

3 Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que (x_0,y_0) est un point critique et que la matrice Hessienne évaluée en ce point est

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la nature du point critique ?

☐ la matrice Hessienne ne permet pas de conclure ☐ c'est un maximum
☐ c'est un point selle ■ c'est un minimum

Explication :

- Le déterminant de la matrice Hessienne est $\det(H_f) = (2) \times (1) - (1)^2 = 1$.
- Puisque $\det(H_f) = 1$ et que $\partial_{xx} f(x_0,y_0) = 2$, on en conclut que c'est un minimum.

4 Soit la fonction $f(x,y) = \log\left(8x^4 - y^2\right)$. Parmi les réponses suivantes, laquelle est égale à $\partial_x f$?

■ $\dfrac{32x^3}{8x^4 - y^2}$ ☐ $32x^3$ ☐ $\dfrac{1}{8x^4 - y^2}$ ☐ $8x^4 - y^2$ ☐ $-\dfrac{2y}{8x^4 - y^2}$ ☐ Autre

Explication : $f(x,y) = \ln(bx^c - ay^2)$ donc la dérivée par rapport à x est $\frac{bcx^{c-1}}{bx^c - ay^2}$.

5 On se donne la fonction

$$f(x,y)=\sqrt{\left(10^{-2}x-\frac{10^4}{y}\right)^2+10^3}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $xy=10^s$. Que vaut s?

■ +
☐ − ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ■ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication :

$$f(x,y)=\sqrt{\left(10^{-2}x-\frac{10^4}{y}\right)^2+10^3}$$

$$\partial_x f(x,y)=\frac{2\left(10^{-2}x-\frac{10^4}{y}\right)10^{-2}}{2\sqrt{\left(10^{-2}x-\frac{10^4}{y}\right)^2+10^3}}=0 \qquad \text{ssi } \left(10^{-2}x-\frac{10^4}{y}\right)=0$$

$$\partial_y f(x,y)=\frac{2\left(10^{-2}x-\frac{10^4}{y}\right)\frac{-10^4}{y^2}}{2\sqrt{\left(10^{-2}x-\frac{10^4}{y}\right)^2+10^3}} \qquad \text{ssi } \left(10^{-2}x-\frac{10^4}{y}\right)=0$$

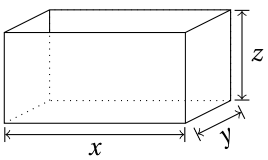
Donc $xy=\dfrac{10^4}{10^{-2}}=10^6$.

6 Soient $f(x,y)=-6x+15y$, $x(u,v)=uv$ et $y(u,v)=u+v$. On définit $g(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$. Calculer $\partial_v g$.

☐ $15u$ ☐ -6 ☐ $-6v$ ☐ $15-6v$ ■ $15-6u$ ☐ Autre:

Explication : $\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$.

7 Une boîte *ouverte* a la forme d'un parallélépipède. On cherche les valeurs $x,y,z\in\mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V fixé égale à 4 cm^3. On doit donc minimiser la fonction $S(x,y,z)=xy+2xz+2yz$ sachant que $xyz=4$. Que vaut S dans son minimum (en cm^2)?



☐ 0 ■ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9
☐ 0 ☐ 1 ■ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication : On a $x,y,z>0$. On pose $\sigma(x,y)=S\left(x,y,\frac{4}{xy}\right)=xy+\frac{8}{y}+\frac{8}{x}$.
Calcul des points critiques:

$$\nabla\sigma(x,y)=\begin{pmatrix}y-\frac{8}{x^2}\\ x-\frac{8}{y^2}\end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\sigma(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff(x,y)=(2,2).$$

Il existe un seul point critique qui est $(2,2)$.
Nature des points critiques:

$$H_\sigma(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{16}{x^3} & 1\\ 1 & \frac{16}{y^3}\end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad H_\sigma(2,2)=\begin{pmatrix}2>0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det H_\sigma(2,2)>0.$$

On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a $S\left(2,2,\frac{4}{4}\right)=\sigma(2,2)=12$.

Interpolation

8 Soit $f\colon [1;17] \to \mathbb{R}$ la **spline linéaire** qui interpole les points $f(1) = -18$, $f(8) = 10$, $f(13) = -40$, $f(17) = -36$. Que vaut $f(4)$?

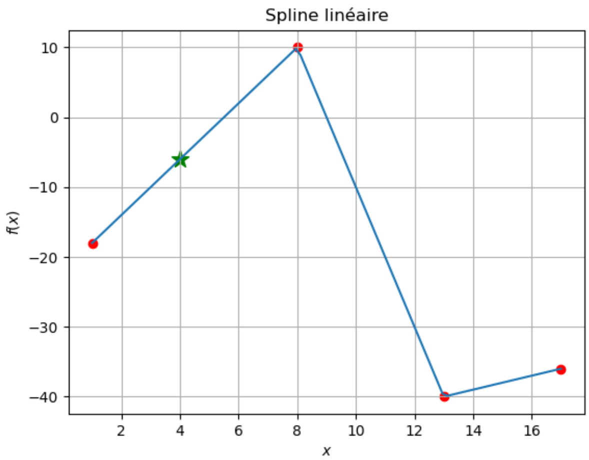
+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La spline linéaire $f\colon [1;17] \to \mathbb{R}$ a pour équation :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10-(-18)}{8-1}(x-1)+(-18) & \text{si } 1 \le x \le 8 \\ \frac{-40-(10)}{13-8}(x-8)+(10) & \text{si } 8 \le x \le 13 \\ \frac{-36-(-40)}{17-13}(x-13)+(-40) & \text{si } 13 \le x \le 17 \end{cases}$$

En substituant $x = 4$, on trouve :

$$f(4) = -6$$

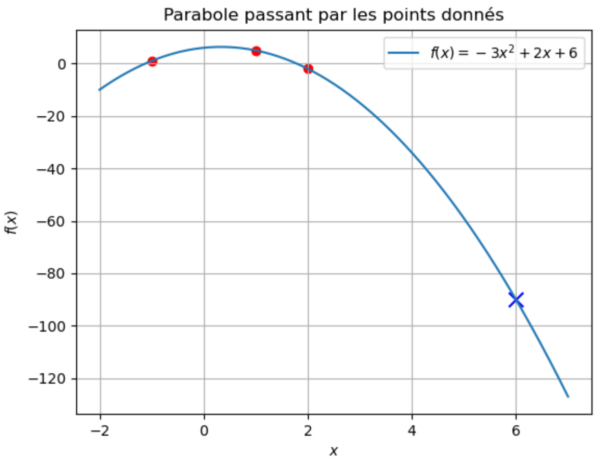


9 Soit f l'unique polynome qui interpole les points $(1;5)$, $(2;-2)$ et $(-1;1)$. Que vaut $f(6)$?

☐ + | ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ■ 9

■ − | ■ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication : Le seul polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui passe par les trois points est la parabole d'équation $-3x^2+2x+6 = \frac{(x-2)(x-1)}{6} - \frac{5(x-2)(x+1)}{2} - \frac{2(x-1)(x+1)}{3}$. Pour la calculer l'équation de ce polynome on peut utiliser soit la méthode directe (résolution du système linéaire pour trouver les coefficients dans la base canonique), soit l'écrire dans la base de Lagrange ou encore dans la base de Newton.



10 Dans la base de Lagrange, le polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui interpole les trois points $(1,22)$, $(14,17)$ et $(21,34)$ s'écrit $p(x) = 22L_0(x)+17L_1(x)+34L_2(x)$. Que vaut $L_2(20)$?

☐ $-\frac{3}{130}$ ☐ $-\frac{19}{260}$ ☐ $\frac{6}{91}$ ☐ $-\frac{114}{91}$ ☐ $\frac{19}{91}$ ☐ $\frac{57}{130}$ ☐ $-\frac{19}{140}$ ■ $\frac{57}{70}$ ☐ $-\frac{3}{70}$ ☐ Autre

Explication :

$$L_0(x) = \frac{(x-21)(x-14)}{260}, \quad L_1(x) = \frac{(x-21)(x-1)}{-91}, \quad L_2(x) = \frac{(x-14)(x-1)}{140},$$

$$L_0(20) = \frac{-6}{260}, \quad L_1(20) = \frac{-19}{-91}, \quad L_2(20) = \frac{114}{140}.$$

11 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(3,1)$, $(4,2)$, $(5,15)$ et $(6,15)$ s'écrit $p(x) = a+b(x-3)+c(x-3)(x-4)+d(x-3)(x-4)(x-5)$. Que vaut c ?

■ + |

☐ − | ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ■ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication : Les coordonnées dans la base de Newton sont les valeurs encadrées dans le tableau des différences divisées ci-dessous:

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-1},x_i]$
0	3	$\boxed{1=a}$			
1	4	2	$\boxed{1=b}$		
2	5	15	13	$\boxed{6=c}$	
3	6	15	0	$-\frac{13}{2}$	$\boxed{-\frac{25}{6}=d}$

12 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(1,5)$, $(6,25)$, $(9,85)$ et $(12,775)$ s'écrit $p(x) = 5+4(x-1)+2(x-1)(x-6)+3(x-1)(x-6)(x-9)$. En déduire l'équation du polynôme de Newton qui n'interpole que les trois points $(1,5)$, $(6,25)$ et $(9,85)$.

0.0 0.5 1 Cases réservées au correcteur

....

Explication : $p(x) = 5+4(x-1)+2(x-1)(x-6)$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Fonction de Meilleure Approximation ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

13 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ la droite de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-1	0	1
y_i	-2	0	-4

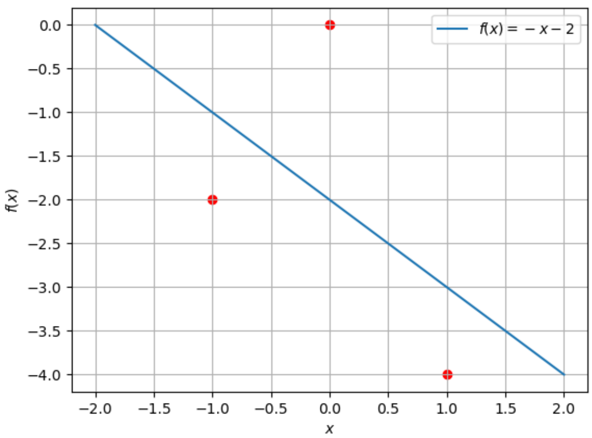
Que vaut α_0 ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n=2$ et il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = -2$ et $\alpha_1 = -1$.



14 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ la parabole de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	3	-1	-2	-1	1

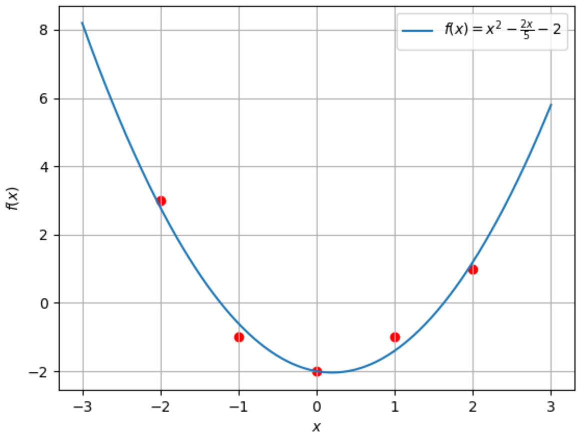
Que vaut α_2?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n=4$ et il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = -2$, $\alpha_1 = -2/5$ et $\alpha_2 = 1$.



15 Soit $f(x) = \alpha_0 \cos(x) + \alpha_1 \sin(x)$ la fonction de meilleure approximation des points suivants:

x_i	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
y_i	2	7	0

Que vaut α_1 ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : On doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\mathscr{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$$
$$(\alpha_0, \alpha_1) \mapsto \mathscr{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i))^2.$$

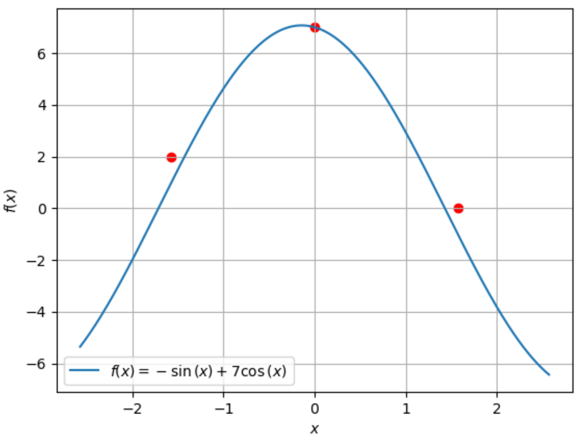
Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche ses points stationnaires. Puisque

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i)) \cos(x_i)\right),$$
$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i)) \sin(x_i)\right),$$

on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i)) \cos(x_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i)) \sin(x_i) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} \cos^2(x_i) & \sum_{i=0}^{n} \cos(x_i)\sin(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} \cos(x_i)\sin(x_i) & \sum_{i=0}^{n} \sin^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \cos(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} y_i \sin(x_i) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 7$ et $\alpha_1 = -1$.



16 Considérons les points

x	1	2	3	4	5	6
y	-1117	38	33	82	116	169

Parmi les droites de la forme $f(x) = -5 + \alpha_1 x$, on cherche celle de meilleure approximation des points donnés. Calculer la valeur de α_1.

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication :

- Notons $K = -5$. On doit minimiser la fonction d'une seule variable

$$\mathscr{E}(\alpha_1) = \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right)^2.$$

- On obtient

$$\mathscr{E}'(\alpha_1) = -2 \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right) x_i.$$

- Ainsi,

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^{5} (y_i - K) x_i}{\sum_{i=0}^{5} x_i^2}.$$

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Statistiques descriptives ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Énoncé commun aux 3 questions suivantes.

On considère le tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2]$ et $\mathbf{y} = [\beta_1, \beta_2]$:

	$\beta_1 = 5$	$\beta_2 = 7$	Effectif marginal de α_i
$\alpha_1 = 1$	$n_{1,1} = 2$	$n_{1,2} = 4$	$n_{1,\cdot} = 6$
$\alpha_2 = 3$	$n_{2,1} = 2$	$n_{2,2} = 1$	$n_{2,\cdot} = 3$
Effectif marginal de β_j	$n_{\cdot,1} = 4$	$n_{\cdot,2} = 5$	$N = 9$

17 Compléter les cases vides du tableau des **fréquences** :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1			
α_2			
Fréq. marg. de β_j			

0.0 0.11 0.22 0.33 0.44 0.56 0.67 0.78 0.89 1 Cases réservées au correcteur

Explication : Les fréquences s'obtiennent en divisant chaque effectif du tableau donné dans l'énoncé par le total $N = 9$. Voici le tableau des fréquences complètes :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1	$f_{1,1} = \frac{2}{9} = 0.222$	$f_{1,2} = \frac{4}{9} = 0.444$	$f_{1,\cdot} = \frac{6}{9} = 0.667$
α_2	$f_{2,1} = \frac{2}{9} = 0.222$	$f_{2,2} = \frac{1}{9} = 0.111$	$f_{2,\cdot} = \frac{3}{9} = 0.333$
Fréq. marg. de β_j	$f_{\cdot,1} = \frac{4}{9} = 0.444$	$f_{\cdot,2} = \frac{5}{9} = 0.556$	1

18 Compléter les tableaux suivants:

Profils en **colonne** $f_{i|j}$ des **fréquences conditionnelles** de α sachant β :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

Profils en **ligne** $f_{j|i}$ des **fréquences conditionnelles** de β sachant α :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

0.0 0.12 0.25 0.38 0.5 0.62 0.75 0.88 1 Cases réservées au correcteur

Explication :

$f_{i|j} = \frac{n_{i,j}}{n_{\cdot,j}}$ pour chaque colonne. Voici le tableau des profils en colonne complètes :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{4}{5} = 0.800$
α_2	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{1}{5} = 0.200$

$f_{j|i} = \frac{n_{i,j}}{n_{i,\cdot}}$ donc voici le tableau des profils en ligne complètes :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{6} = 0.333$	$\frac{4}{6} = 0.667$
α_2	$\frac{2}{3} = 0.667$	$\frac{1}{3} = 0.333$

19 Le coefficient de corrélation linéaire vaut ? (arrondir à deux chiffres derrière la virgule)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.										
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Explication : On calcule d'abord

- les moyennes

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i = \frac{\alpha_1 n_{1,\cdot} + \alpha_2 n_{2,\cdot}}{N} = \frac{1\times 6 + 3\times 3}{9} = \frac{15}{9} = 1.667,$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}\beta_j = \frac{\beta_1 n_{\cdot,1} + \beta_2 n_{\cdot,2}}{N} = \frac{5\times 4 + 7\times 5}{9} = \frac{55}{9} = 6.111,$$

- puis les variances

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i^2 - \bar{\mathbf{x}}^2 = \frac{\alpha_1^2 n_{1,\cdot} + \alpha_2^2 n_{2,\cdot}}{N} - \frac{(15)^2}{9^2} = \frac{1^2\times 6 + 3^2\times 3}{9} - \frac{15^2}{9^2} = \frac{33}{9} - \frac{225}{81} = \frac{33\times 9 - 225}{81} = 0.889,$$

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}(\beta_j)^2 - \bar{\mathbf{y}}^2 = \frac{\beta_1^2 n_{\cdot,1} + \beta_2^2 n_{\cdot,2}}{N} - \frac{(55)^2}{9^2} = \frac{5^2\times 4 + 7^2\times 5}{9} - \frac{55^2}{9^2} = \frac{345}{9} - \frac{3025}{81} = \frac{345\times 9 - 3025}{81} = 0.988$$

et enfin la covariance

$$C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_{i,j}(\alpha_i - \bar{\mathbf{x}})(\beta_j - \bar{\mathbf{y}}) = \frac{n_{1,1}(\alpha_1-\bar{\mathbf{x}})(\beta_1-\bar{\mathbf{y}}) + n_{1,2}(\alpha_1-\bar{\mathbf{x}})(\beta_2-\bar{\mathbf{y}}) + n_{2,1}(\alpha_2-\bar{\mathbf{x}})(\beta_1-\bar{\mathbf{y}}) + n_{2,2}(\alpha_2-\bar{\mathbf{x}})(\beta_2-\bar{\mathbf{y}})}{N}$$

$$= \frac{2\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(5-\bar{\mathbf{y}}) + 4\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(7-\bar{\mathbf{y}}) + 2\times(3-\bar{\mathbf{x}})\times(5-\bar{\mathbf{y}}) + 1\times(3-\bar{\mathbf{x}})\times(7-\bar{\mathbf{y}})}{9}$$

$$= -0.296.$$

On trouve alors le coefficient de corrélation en utilisant la formule $r = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{V(\mathbf{x})V(\mathbf{y})}} = -0.316.$

Énoncé commun aux 4 questions suivantes :

Une série statistique est définie partiellement dans le tableau ci-dessous.

x	2	3	4	5	6
y	26	y_1	y_2	y_3	45

On nous dit que l'équation de la droite de régression de y en fonction de x est $y = \frac{8}{5} + \frac{23}{5}x$.

20 Quelle est la variance $V(\mathbf{x})$ de la série **x** ?

\+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La variance est calculée en utilisant la formule $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

21 Quelle est la moyenne $\overline{y}$ de la série **y** ?

\+ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dizaines
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à la droite de régression, $\overline{y}$ est calculé comme $\overline{y} = \frac{8}{5} + \frac{23}{5} \times 4 = 20$.

22 Quelle est la covariance entre les séries **x** et **y** ?

\+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque la pente de la droite de regression de y par rapport à x est égale à $\gamma_1 = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$, nous pouvons calculer la covariance $C(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en multipliant γ_1 par $V(\mathbf{x})$.

23 Si toutes les valeurs de y augmentent de 3, notons $y = q + mx$ la nouvelle équation de la droite de régression de y en fonction x. Que vaut q ?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités
\+ .
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dixièmes

Explication : Notons $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ la droite de regression donnée dans l'énoncé. Elle se réécrit aussi comme $y = \overline{y} + \gamma_1(x - \overline{x})$ avec $\gamma_0 = \overline{y} - \gamma_1\overline{x}$. Si on augmente toutes les valeurs de **y** de K, sa moyenne augmente de K et la droite est translatée vers le haut de K. Ainsi, la pente de la nouvelle droite de régression ne change pas, mais l'ordonnée à l'origine augmente de K. La nouvelle équation est donc $y = \overline{y} + K + \gamma_1(x - \overline{x}) = (\gamma_0 + K) + \gamma_1 x$ ainsi $q = \gamma_0 + K = \frac{8}{5} + 3 = \frac{23}{5} = 4.6$.

INSTRUCTIONS

M1-INFO — UE 731 Remise à niveau - Mathématiques — 7 octobre 2024 Durée : 2h

Sélectionnez les quatre derniers chiffres de votre numéro d'étudiant (par ex., si le numéro est 2200**2681**, cochez 2 sur la première ligne, 6 sur la deuxième, etc.) :

NOM	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Prénom..	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- Une feuille A4 recto-verso manuscrite et une calculatrice sont autorisées. Tout autre document est interdit.
- Veuillez **noircir complètement les cases**.
- Il existe trois types de questions :
  - **Questions à choix unique.**
    Choisissez une seule réponse parmi celles proposées. Des points négatifs seront attribués pour une réponse incorrecte.
  - **Questions ouvertes.**
    Répondez en remplissant un tableau. La correction sera effectuée manuellement.
  - **Questions numériques.**
    La réponse est une valeur numérique à coder. Cochez **exactement un chiffre par ligne.**
    - Exemple d'une question où la réponse est un entier :

$+27 \rightsquigarrow$

■ +	0	1	■ 2	3	4	5	6	7	8	9	← Dizaines
−	0	1	2	3	4	5	6	■ 7	8	9	← Unités

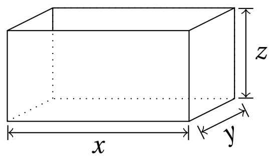
    - Exemple d'une question où la réponse est un nombre décimal :

$-5.9 \rightsquigarrow$

+	0	1	2	3	4	■ 5	6	7	8	9	← Unités
	.										
■ −	0	1	2	3	4	5	6	7	8	■ 9	← Dixièmes

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Fonctions de deux variables ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

1 Une boîte *ouverte* a la forme d'un parallélépipède. On cherche les valeurs $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V fixé égale à 32 cm^3. On doit donc minimiser la fonction $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ sachant que $xyz = 32$. Que vaut S dans son minimum (en cm^2)?



☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ■ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9
☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ■ 8 ☐ 9

Explication : On a $x, y, z > 0$. On pose $\sigma(x, y) = S\left(x, y, \frac{32}{xy}\right) = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$.
Calcul des points critiques:

$$\nabla\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} y - \frac{64}{x^2} \\ x - \frac{64}{y^2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = (4, 4).$$

Il existe un seul point critique qui est $(4, 4)$.
Nature des points critiques:

$$H_\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{128}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{128}{y^3} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad H_\sigma(4, 4) = \begin{pmatrix} 2 > 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det H_\sigma(4, 4) > 0.$$

On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a $S\left(4, 4, \frac{32}{16}\right) = \sigma(4, 4) = 48$.

2 Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Calculer l'équation du plan tangent à f en $(-3, 1)$.

- ☐ $-5x - 8$
- ☐ $-5x - y - 14$
- ☐ $x^2 + xy - 5x + y^2 - y - 14$
- ☐ $-5x - y + 7$
- ■ $-5x - y - 7$
- ☐ Autre:

Explication : $f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + (x - x_0)\partial_x f(x_0, y_0) + (y - y_0)\partial_y f(x_0, y_0)$.

3 Soit la fonction $f(x, y) = \log\left(10x^6 - y^2\right)$. Parmi les réponses suivantes, laquelle est égale à $\partial_y f$?

- ■ $-\dfrac{2y}{10x^6 - y^2}$
- ☐ $10x^6 - y^2$
- ☐ $-\dfrac{y}{30x^5\left(10x^6 - y^2\right)}$
- ☐ $-2y$
- ☐ $\dfrac{60x^5}{10x^6 - y^2}$
- ☐ Autre

Explication : $f(x, y) = \ln(bx^c - ay^2)$ donc la dérivée par rapport à y est $\frac{-2ay}{bx^c - ay^2}$.

4 Soient $f(x, y) = -6x + 16y$, $x(u, v) = uv$ et $y(u, v) = u + v$. On définit $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$. Calculer $\partial_v g$.

- ■ $16 - 6u$
- ☐ $16u$
- ☐ $-6v$
- ☐ -6
- ☐ $16 - 6v$
- ☐ Autre:

Explication : $\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$.

5 Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que (x_0, y_0) est un point critique et que la matrice Hessienne évaluée en ce point est

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la nature du point critique ?

- ☐ c'est un point selle
- ☐ c'est un minimum
- ■ c'est un maximum
- ☐ la matrice Hessienne ne permet pas de conclure

Explication :

- Le déterminant de la matrice Hessienne est $\det(H_f) = (-1) \times (-2) - (1)^2 = 1$.
- Puisque $\det(H_f) = 1$ et que $\partial_{xx} f(x_0, y_0) = -1$, on en conclut que c'est un maximum.

6 On se donne la fonction

$$f(x,y)=\sqrt{\left(10^{-1}x-\frac{10^4}{y}\right)^2+10^5}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $xy=10^s$. Que vaut s?

■ + □ − □ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 ■ 5 □ 6 □ 7 □ 8 □ 9

Explication :

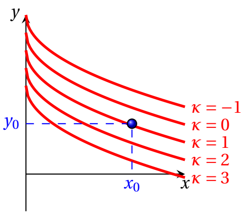
$$f(x,y)=\sqrt{\left(10^{-1}x-\frac{10^4}{y}\right)^2+10^5}$$

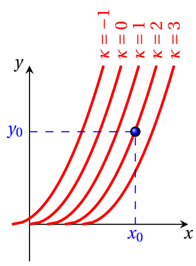
$$\partial_x f(x,y)=\frac{2\left(10^{-1}x-\frac{10^4}{y}\right)10^{-1}}{2\sqrt{\left(10^{-1}x-\frac{10^4}{y}\right)^2+10^5}}=0 \qquad \text{ssi } \left(10^{-1}x-\frac{10^4}{y}\right)=0$$

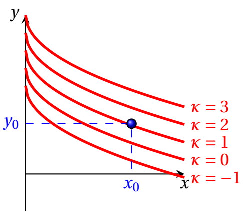
$$\partial_y f(x,y)=\frac{2\left(10^{-1}x-\frac{10^4}{y}\right)\frac{-10^4}{y^2}}{2\sqrt{\left(10^{-1}x-\frac{10^4}{y}\right)^2+10^5}} \qquad \text{ssi } \left(10^{-1}x-\frac{10^4}{y}\right)=0$$

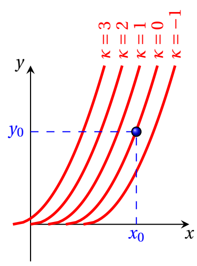
Donc $xy=\dfrac{10^4}{10^{-1}}=10^5$.

7 Parmi les graphes ci-dessous, lequel pourrait représenter les lignes de niveau d'une fonction $f(x,y)$ telle que $\partial_x f(x_0,y_0)<0$ et $\partial_y f(x_0,y_0)<0$?

■ 

□ 

□ 

□ 

Explication : Comme $\partial_x f(x_0,y_0)\le 0$, la fonction $h(x)=f(x,y_0)$ est décroissante. Puisque $\partial_y f(x_0,y_0)\le 0$, la fonction $g(y)=f(x_0,y)$ est décroissante.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Interpolation ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

8 Soit $f\colon [1;17] \to \mathbb{R}$ la **spline linéaire** qui interpole les points $f(1) = -31$, $f(8) = 11$, $f(13) = -19$, $f(17) = -39$. Que vaut $f(9)$?

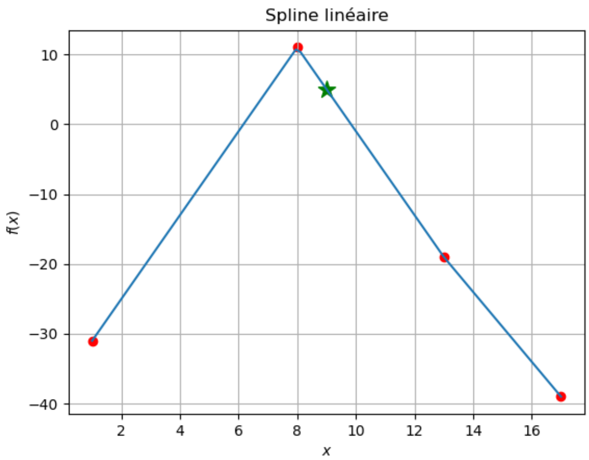
+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La spline linéaire $f\colon [1;17] \to \mathbb{R}$ a pour équation :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{11-(-31)}{8-1}(x-1) + (-31) & \text{si } 1 \le x \le 8 \\ \frac{-19-(11)}{13-8}(x-8) + (11) & \text{si } 8 \le x \le 13 \\ \frac{-39-(-19)}{17-13}(x-13) + (-19) & \text{si } 13 \le x \le 17 \end{cases}$$

En substituant $x = 9$, on trouve :

$$f(9) = 5$$

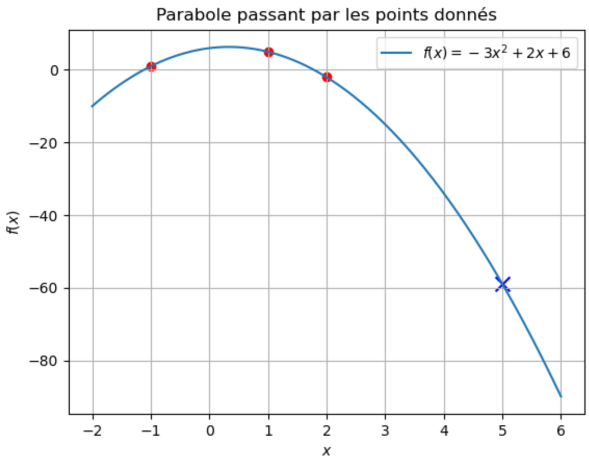


9 Soit f l'unique polynome qui interpole les points $(-1;1)$, $(1;5)$ et $(2;-2)$. Que vaut $f(5)$?

☐ + | ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ■ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

■ − | ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ■ 9

Explication : Le seul polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui passe par les trois points est la parabole d'équation $-3x^2+2x+6 = \frac{(x-2)(x-1)}{6} - \frac{5(x-2)(x+1)}{2} - \frac{2(x-1)(x+1)}{3}$. Pour la calculer l'équation de ce polynome on peut utiliser soit la méthode directe (résolution du système linéaire pour trouver les coefficients dans la base canonique), soit l'écrire dans la base de Lagrange ou encore dans la base de Newton.



10 Dans la base de Lagrange, le polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui interpole les trois points $(1,26)$, $(14,17)$ et $(21,34)$ s'écrit $p(x) = 26L_0(x)+17L_1(x)+34L_2(x)$. Que vaut $L_2(17)$?

☐ $-\frac{3}{35}$ ☐ $-\frac{3}{65}$ ☐ $\frac{12}{65}$ ☐ $-\frac{48}{91}$ ■ $\frac{12}{35}$ ☐ $-\frac{16}{65}$ ☐ $-\frac{16}{35}$ ☐ $\frac{12}{91}$ ☐ $\frac{64}{91}$ ☐ Autre

Explication :

$$L_0(x) = \frac{(x-21)(x-14)}{260}, \quad L_1(x) = \frac{(x-21)(x-1)}{-91}, \quad L_2(x) = \frac{(x-14)(x-1)}{140},$$

$$L_0(17) = \frac{-12}{260}, \quad L_1(17) = \frac{-64}{-91}, \quad L_2(17) = \frac{48}{140}.$$

11 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(3,1)$, $(4,2)$, $(5,21)$ et $(6,21)$ s'écrit $p(x) = a+b(x-3)+c(x-3)(x-4)+d(x-3)(x-4)(x-5)$. Que vaut c ?

■ + |

☐ − | ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ■ 9

Explication : Les coordonnées dans la base de Newton sont les valeurs encadrées dans le tableau des différences divisées ci-dessous:

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-1},x_i]$
0	3	$\boxed{1=a}$			
1	4	2	$\boxed{1=b}$		
2	5	21	19	$\boxed{9=c}$	
3	6	21	0	$-\frac{19}{2}$	$\boxed{-\frac{37}{6}=d}$

12 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(2,6)$, $(3,10)$, $(6,46)$ et $(9,370)$ s'écrit $p(x) = 6+4(x-2)+2(x-2)(x-3)+2(x-2)(x-3)(x-6)$. En déduire l'équation du polynôme de Newton qui n'interpole que les trois points $(2,6)$, $(3,10)$ et $(6,46)$.

0.0 0.5 1 Cases réservées au correcteur

....

Explication : $p(x) = 6+4(x-2)+2(x-2)(x-3)$.

Fonction de Meilleure Approximation

13 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ la droite de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-1	0	1
y_i	-2	0	-4

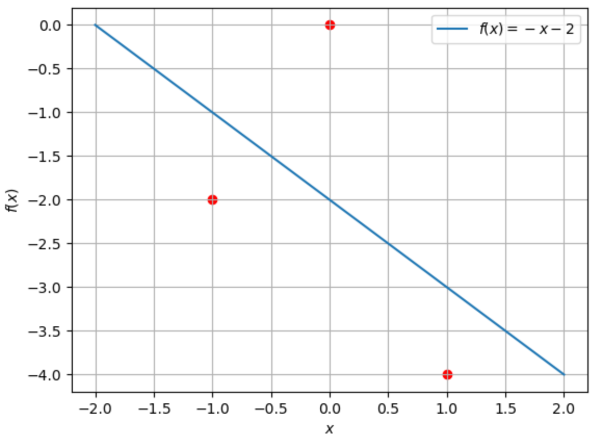
Que vaut α_1 ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n=2$ et il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = -2$ et $\alpha_1 = -1$.



14 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ la parabole de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-3	1	2	1	-1

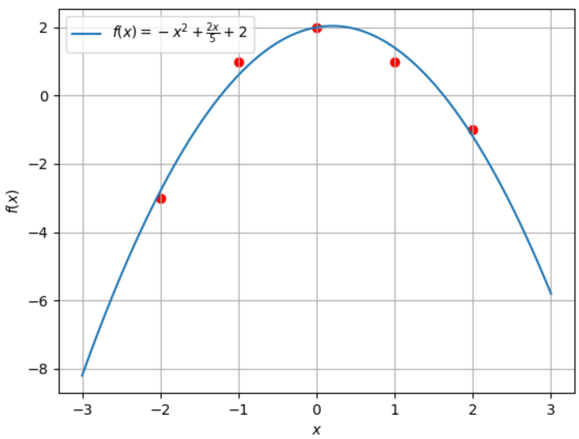
Que vaut α_0?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n = 4$ et il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 2/5$ et $\alpha_2 = -1$.



15 Soit $f(x) = \alpha_0 \cos(x) + \alpha_1 \sin(x)$ la fonction de meilleure approximation des points suivants:

x_i	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
y_i	4	5	0

Que vaut α_0 ?

■ +
□ − □ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 ■ 5 □ 6 □ 7 □ 8 □ 9

Explication : On doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\begin{aligned}\mathscr{E} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}_+\\ (\alpha_0, \alpha_1) &\mapsto \mathscr{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i))^2.\end{aligned}$$

Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche ses points stationnaires. Puisque

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i)) \cos(x_i)\right),$$

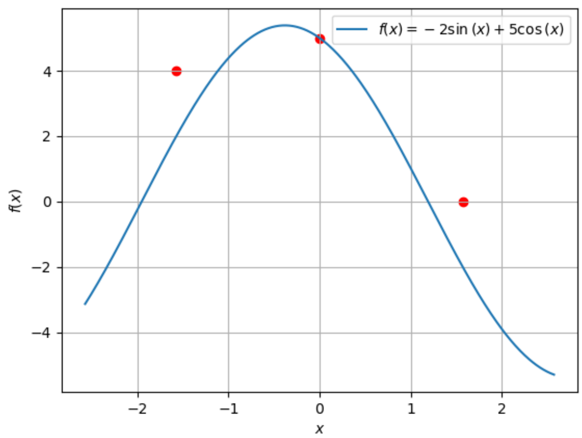
$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i)) \sin(x_i)\right),$$

on obtient

$$\begin{cases}\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = 0\\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = 0\end{cases} \iff \begin{cases}\sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i)) \cos(x_i) = 0\\ \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i)) \sin(x_i) = 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{n} \cos^2(x_i) & \sum_{i=0}^{n} \cos(x_i) \sin(x_i)\\ \sum_{i=0}^{n} \cos(x_i) \sin(x_i) & \sum_{i=0}^{n} \sin^2(x_i)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{n} y_i \cos(x_i)\\ \sum_{i=0}^{n} y_i \sin(x_i)\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ -4\end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 5$ et $\alpha_1 = -2$.



16 Considérons les points

x	1	2	3	4	5	6
y	-1661	29	23	54	146	154

Parmi les droites de la forme $f(x) = 2 + \alpha_1 x$, on cherche celle de meilleure approximation des points donnés. Calculer la valeur de α_1.

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication :

- Notons $K = 2$. On doit minimiser la fonction d'une seule variable
$$\mathscr{E}(\alpha_1) = \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right)^2.$$
- On obtient
$$\mathscr{E}'(\alpha_1) = -2\sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right) x_i.$$
- Ainsi,
$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^{5} (y_i - K) x_i}{\sum_{i=0}^{5} x_i^2}.$$

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Statistiques descriptives** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Énoncé commun aux 3 questions suivantes.

On considère le tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2]$ et $\mathbf{y} = [\beta_1, \beta_2]$:

	$\beta_1 = 5$	$\beta_2 = 7$	Effectif marginal de α_i
$\alpha_1 = 1$	$n_{1,1} = 2$	$n_{1,2} = 2$	$n_{1,\cdot} = 4$
$\alpha_2 = 3$	$n_{2,1} = 0$	$n_{2,2} = 1$	$n_{2,\cdot} = 1$
Effectif marginal de β_j	$n_{\cdot,1} = 2$	$n_{\cdot,2} = 3$	$N = 5$

17 Compléter les cases vides du tableau des **fréquences** :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1			
α_2			
Fréq. marg. de β_j			

0.0 0.11 0.22 0.33 0.44 0.56 0.67 0.78 0.89 1 Cases réservées au correcteur

Explication : Les fréquences s'obtiennent en divisant chaque effectif du tableau donné dans l'énoncé par le total $N = 5$. Voici le tableau des fréquences complètes :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1	$f_{1,1} = \frac{2}{5} = 0.400$	$f_{1,2} = \frac{2}{5} = 0.400$	$f_{1,\cdot} = \frac{4}{5} = 0.800$
α_2	$f_{2,1} = \frac{0}{5} = 0.000$	$f_{2,2} = \frac{1}{5} = 0.200$	$f_{2,\cdot} = \frac{1}{5} = 0.200$
Fréq. marg. de β_j	$f_{\cdot,1} = \frac{2}{5} = 0.400$	$f_{\cdot,2} = \frac{3}{5} = 0.600$	1

18 Compléter les tableaux suivants:

Profils en **colonne** $f_{i|j}$ des **fréquences conditionnelles** de α sachant β :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

Profils en **ligne** $f_{j|i}$ des **fréquences conditionnelles** de β sachant α :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

0.0 0.12 0.25 0.38 0.5 0.62 0.75 0.88 1 Cases réservées au correcteur

Explication :

$f_{i|j} = \frac{n_{i,j}}{n_{\cdot,j}}$ pour chaque colonne. Voici le tableau des profils en colonne complètes :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{2} = 1.000$	$\frac{2}{3} = 0.667$
α_2	$\frac{0}{2} = 0.000$	$\frac{1}{3} = 0.333$

$f_{j|i} = \frac{n_{i,j}}{n_{i,\cdot}}$ donc voici le tableau des profils en ligne complètes :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{2}{4} = 0.500$
α_2	$\frac{0}{1} = 0.000$	$\frac{1}{1} = 1.000$

19 Le coefficient de corrélation linéaire vaut ? (arrondir à deux chiffres derrière la virgule)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	■ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.										
■ +	0	1	2	3	■ 4	5	6	7	8	9
−	0	■ 1	2	3	4	5	6	7	8	9

Explication : On calcule d'abord

- les moyennes

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i = \frac{\alpha_1 n_{1,\cdot} + \alpha_2 n_{2,\cdot}}{N} = \frac{1\times 4 + 3\times 1}{5} = \frac{7}{5} = 1.400,$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}\beta_j = \frac{\beta_1 n_{\cdot,1} + \beta_2 n_{\cdot,2}}{N} = \frac{5\times 2 + 7\times 3}{5} = \frac{31}{5} = 6.200,$$

- puis les variances

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i^2 - \bar{\mathbf{x}}^2 = \frac{\alpha_1^2 n_{1,\cdot} + \alpha_2^2 n_{2,\cdot}}{N} - \frac{(7)^2}{5^2} = \frac{1^2\times 4 + 3^2\times 1}{5} - \frac{7^2}{5^2} = \frac{13}{5} - \frac{49}{25} = \frac{13\times 5 - 49}{25} = 0.640,$$

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}(\beta_j)^2 - \bar{\mathbf{y}}^2 = \frac{\beta_1^2 n_{\cdot,1} + \beta_2^2 n_{\cdot,2}}{N} - \frac{(31)^2}{5^2} = \frac{5^2\times 2 + 7^2\times 3}{5} - \frac{31^2}{5^2} = \frac{197}{5} - \frac{961}{25} = \frac{197\times 5 - 961}{25} = 0.960$$

et enfin la covariance

$$C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_{i,j}(\alpha_i - \bar{\mathbf{x}})(\beta_j - \bar{\mathbf{y}}) = \frac{n_{1,1}(\alpha_1 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_1 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{1,2}(\alpha_1 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_2 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{2,1}(\alpha_2 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_1 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{2,2}(\alpha_2 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_2 - \bar{\mathbf{y}})}{N}$$

$$= \frac{2\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(5-\bar{\mathbf{y}}) + 2\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(7-\bar{\mathbf{y}}) + 0\times(3-\bar{\mathbf{x}})\times(5-\bar{\mathbf{y}}) + 1\times(3-\bar{\mathbf{x}})\times(7-\bar{\mathbf{y}})}{5}$$

$$= 0.320.$$

On trouve alors le coefficient de corrélation en utilisant la formule $r = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{V(\mathbf{x})V(\mathbf{y})}} = 0.408.$

Énoncé commun aux 4 questions suivantes :

Une série statistique est définie partiellement dans le tableau ci-dessous.

x	2	3	4	5	6
y	26	y_1	y_2	y_3	45

On nous dit que l'équation de la droite de régression de y en fonction de x est $y = \frac{42}{5} + \frac{22}{5}x$.

20 Quelle est la variance $V(\mathbf{x})$ de la série **x** ?

\+

− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La variance est calculée en utilisant la formule $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

21 Quelle est la moyenne $\overline{y}$ de la série **y** ?

\+ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dizaines

− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à la droite de régression, $\overline{y}$ est calculé comme $\overline{y} = \frac{42}{5} + \frac{22}{5} \times 4 = 26$.

22 Quelle est la covariance entre les séries **x** et **y** ?

\+

− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque la pente de la droite de regression de y par rapport à x est égale à $\gamma_1 = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$, nous pouvons calculer la covariance $C(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en multipliant γ_1 par $V(\mathbf{x})$.

23 Si toutes les valeurs de y augmentent de 2, notons $y = q + mx$ la nouvelle équation de la droite de régression de y en fonction x. Que vaut q ?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dizaines

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

\+ .

− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dixièmes

Explication : Notons $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ la droite de regression donnée dans l'énoncé. Elle se réécrit aussi comme $y = \overline{y} + \gamma_1(x - \overline{x})$ avec $\gamma_0 = \overline{y} - \gamma_1\overline{x}$. Si on augmente toutes les valeurs de **y** de K, sa moyenne augmente de K et la droite est translatée vers le haut de K. Ainsi, la pente de la nouvelle droite de régression ne change pas, mais l'ordonnée à l'origine augmente de K. La nouvelle équation est donc $y = \overline{y} + K + \gamma_1(x - \overline{x}) = (\gamma_0 + K) + \gamma_1 x$ ainsi $q = \gamma_0 + K = \frac{42}{5} + 2 = \frac{52}{5} = 10.4$.

INSTRUCTIONS

M1-INFO — UE 731 Remise à niveau - Mathématiques — 7 octobre 2024 Durée : 2h

Sélectionnez les quatre derniers chiffres de votre numéro d'étudiant (par ex., si le numéro est 2200**2681**, cochez 2 sur la première ligne, 6 sur la deuxième, etc.) :

NOM	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Prénom..	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- Une feuille A4 recto-verso manuscrite et une calculatrice sont autorisées. Tout autre document est interdit.
- Veuillez **noircir complètement les cases**.
- Il existe trois types de questions :
  - **Questions à choix unique.**
    Choisissez une seule réponse parmi celles proposées. Des points négatifs seront attribués pour une réponse incorrecte.
  - **Questions ouvertes.**
    Répondez en remplissant un tableau. La correction sera effectuée manuellement.
  - **Questions numériques.**
    La réponse est une valeur numérique à coder. Cochez **exactement un chiffre par ligne.**
    - Exemple d'une question où la réponse est un entier :

      +27 ⇝

■ +	0 1 ■ 3 4 5 6 7 8 9	← Dizaines
−	0 1 2 3 4 5 6 ■ 8 9	← Unités

    - Exemple d'une question où la réponse est un nombre décimal :

      −5.9 ⇝

+	0 1 2 3 4 ■ 6 7 8 9	← Unités
	.	
■ −	0 1 2 3 4 5 6 7 8 ■	← Dixièmes

Fonctions de deux variables

1 Soient $f(x,y) = 2x + 13y$, $x(u,v) = uv$ et $y(u,v) = u + v$. On définit $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$. Calculer $\partial_u g$.

■ $2v + 13$ ☐ 2 ☐ $2u + 13$ ☐ $2v$ ☐ $13u$ ☐ Autre:

Explication : $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$.

2 Soit la fonction $f(x,y) = e^{9x^5 - y}$. Parmi les réponses suivantes, laquelle est égale à $\partial_y f$?

☐ $45x^4 e^{9x^5-y}$ ☐ $45e^{9x^5-y}$ ■ $-e^{9x^5-y}$ ☐ $9e^{9x^5-y}$ ☐ $45ye^{9x^5-y}$ ☐ Autre

Explication : $f(x,y) = e^{bx^c - ay^d}$ donc la dérivée par rapport à y est $-ady^{d-1}e^{bx^c-ay^d}$.

3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que (x_0, y_0) est un point critique et que la matrice Hessienne évaluée en ce point est

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la nature du point critique ?

■ c'est un minimum
☐ c'est un maximum
☐ la matrice Hessienne ne permet pas de conclure
☐ c'est un point selle

Explication :

- Le déterminant de la matrice Hessienne est $\det(H_f) = (1) \times (2) - (1)^2 = 1$.
- Puisque $\det(H_f) = 1$ et que $\partial_{xx} f(x_0, y_0) = 1$, on en conclut que c'est un minimum.

4 On se donne la fonction

$$f(x,y) = \sqrt{\left(10^4 x - \frac{10^{-2}}{y}\right)^2 + 10^4}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $xy = 10^s$. Que vaut s?

☐ + ■ − ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ■ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication :

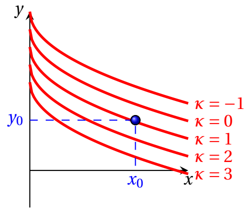
$$f(x,y) = \sqrt{\left(10^4 x - \frac{10^{-2}}{y}\right)^2 + 10^4}$$

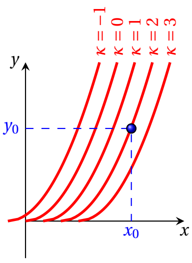
$$\partial_x f(x,y) = \frac{2\left(10^4 x - \frac{10^{-2}}{y}\right)10^4}{2\sqrt{\left(10^4 x - \frac{10^{-2}}{y}\right)^2 + 10^4}} = 0 \qquad \text{ssi } \left(10^4 x - \frac{10^{-2}}{y}\right) = 0$$

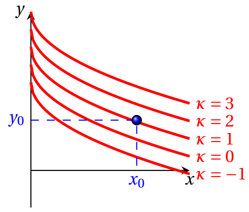
$$\partial_y f(x,y) = \frac{2\left(10^4 x - \frac{10^{-2}}{y}\right)\frac{-10^{-2}}{y^2}}{2\sqrt{\left(10^4 x - \frac{10^{-2}}{y}\right)^2 + 10^4}} \qquad \text{ssi } \left(10^4 x - \frac{10^{-2}}{y}\right) = 0$$

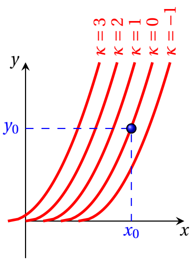
Donc $xy = \frac{10^{-2}}{10^4} = 10^{-6}$.

5 Parmi les graphes ci-dessous, lequel pourrait représenter les lignes de niveau d'une fonction $f(x,y)$ telle que $\partial_x f(x_0,y_0)<0$ et $\partial_y f(x_0,y_0)<0$?

■ 

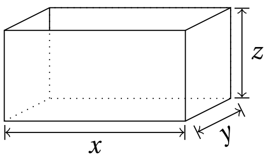
□ 

□ 

□ 

Explication : Comme $\partial_x f(x_0,y_0)\le 0$, la fonction $h(x)=f(x,y_0)$ est décroissante. Puisque $\partial_y f(x_0,y_0)\le 0$, la fonction $g(y)=f(x_0,y)$ est décroissante.

6 Une boîte *ouverte* a la forme d'un parallélépipède. On cherche les valeurs $x,y,z\in\mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V fixé égale à 4 cm^3. On doit donc minimiser la fonction $S(x,y,z)=xy+2xz+2yz$ sachant que $xyz=4$. Que vaut S dans son minimum (en cm^2)?



0	■	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	■	3	4	5	6	7	8	9

Explication : On a $x,y,z>0$. On pose $\sigma(x,y)=S\left(x,y,\frac{4}{xy}\right)=xy+\frac{8}{y}+\frac{8}{x}$.
Calcul des points critiques:

$$\nabla\sigma(x,y)=\begin{pmatrix} y-\frac{8}{x^2}\\ x-\frac{8}{y^2}\end{pmatrix}\quad\text{donc}\quad \nabla\sigma(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff (x,y)=(2,2).$$

Il existe un seul point critique qui est $(2,2)$.
Nature des points critiques:

$$H_\sigma(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{16}{x^3} & 1\\ 1 & \frac{16}{y^3}\end{pmatrix}\quad\text{donc}\quad H_\sigma(2,2)=\begin{pmatrix}2>0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad \det H_\sigma(2,2)>0.$$

On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a $S\left(2,2,\frac{4}{4}\right)=\sigma(2,2)=12$.

7 Soit $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=x^2+xy+y^3$. Calculer l'équation du plan tangent à f en $(-2,3)$.

□ $x^2+xy-x+y^3+25y-77$ □ $-x+25y-77$ □ $23-x$
□ $-x+25y+25$ ■ $-x+25y-52$ □ Autre:

Explication : $f(x,y)\simeq f(x_0,y_0)+(x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0)+(y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0)$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Interpolation** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

8 Soit $f\colon [1;17] \to \mathbb{R}$ la **spline linéaire** qui interpole les points $f(1) = -31$, $f(8) = 11$, $f(13) = -19$, $f(17) = -39$. Que vaut $f(15)$?

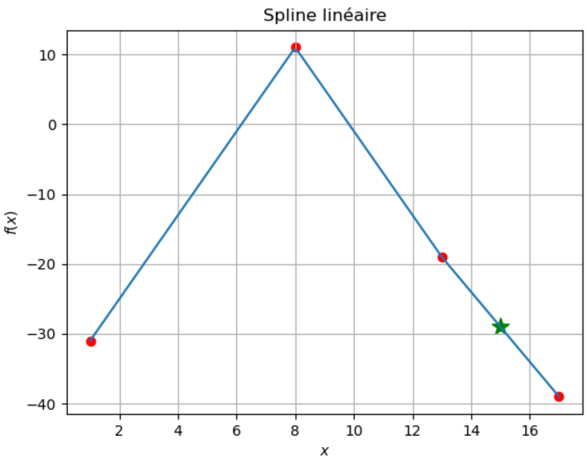
+	0	1	[redacted]	3	4	5	6	7	8	9
[redacted]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	[redacted]

Explication : La spline linéaire $f\colon [1;17] \to \mathbb{R}$ a pour équation :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{11-(-31)}{8-1}(x-1) + (-31) & \text{si } 1 \le x \le 8 \\ \frac{-19-(11)}{13-8}(x-8) + (11) & \text{si } 8 \le x \le 13 \\ \frac{-39-(-19)}{17-13}(x-13) + (-19) & \text{si } 13 \le x \le 17 \end{cases}$$

En substituant $x = 15$, on trouve :

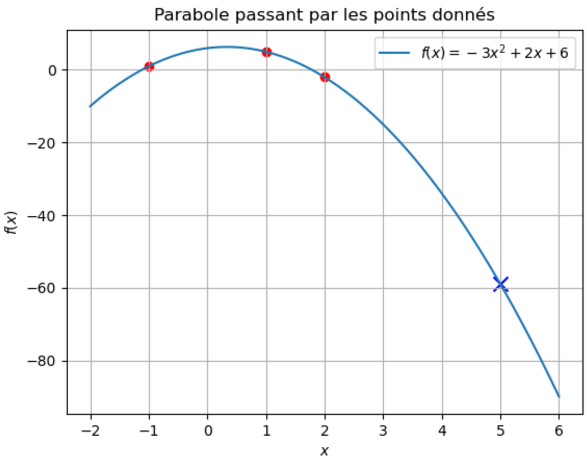
$$f(15) = -29$$



9 Soit f l'unique polynome qui interpole les points $(-1;1)$, $(1;5)$ et $(2;-2)$. Que vaut $f(5)$?

☐ +	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	■ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9
■ −	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	■ 9

Explication : Le seul polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui passe par les trois points est la parabole d'équation $-3x^2+2x+6 = \frac{(x-2)(x-1)}{6} - \frac{5(x-2)(x+1)}{2} - \frac{2(x-1)(x+1)}{3}$. Pour la calculer l'équation de ce polynome on peut utiliser soit la méthode directe (résolution du système linéaire pour trouver les coefficients dans la base canonique), soit l'écrire dans la base de Lagrange ou encore dans la base de Newton.



10 Dans la base de Lagrange, le polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui interpole les trois points $(1,27)$, $(14,17)$ et $(21,34)$ s'écrit $p(x) = 27L_0(x)+17L_1(x)+34L_2(x)$. Que vaut $L_1(17)$?

☐ $-\frac{16}{35}$ ☐ $-\frac{16}{65}$ ☐ $\frac{12}{35}$ ■ $\frac{64}{91}$ ☐ $-\frac{3}{65}$ ☐ $-\frac{3}{35}$ ☐ $-\frac{48}{91}$ ☐ $\frac{12}{91}$ ☐ $\frac{12}{65}$ ☐ Autre

Explication :

$$L_0(x) = \frac{(x-21)(x-14)}{260}, \quad L_1(x) = \frac{(x-21)(x-1)}{-91}, \quad L_2(x) = \frac{(x-14)(x-1)}{140},$$

$$L_0(17) = \frac{-12}{260}, \quad L_1(17) = \frac{-64}{-91}, \quad L_2(17) = \frac{48}{140}.$$

11 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(4,1)$, $(5,2)$, $(6,33)$ et $(7,33)$ s'écrit $p(x) = a+b(x-4)+c(x-4)(x-5)+d(x-4)(x-5)(x-6)$. Que vaut c ?

■ +	☐ 0	■ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9
☐ −	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	■ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

Explication : Les coordonnées dans la base de Newton sont les valeurs encadrées dans le tableau des différences divisées ci-dessous:

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-1},x_i]$
0	4	$\boxed{1=a}$			
1	5	2	$\boxed{1=b}$		
2	6	33	31	$\boxed{15=c}$	
3	7	33	0	$-\frac{31}{2}$	$\boxed{-\frac{61}{6}=d}$

12 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(5,2)$, $(7,16)$, $(11,92)$ et $(15,1512)$ s'écrit $p(x) = 2+7(x-5)+2(x-5)(x-7)+4(x-5)(x-7)(x-11)$. En déduire l'équation du polynôme de Newton qui n'interpole que les trois points $(5,2)$, $(7,16)$ et $(11,92)$.

0.0 0.5 1 Cases réservées au correcteur

....

Explication : $p(x) = 2+7(x-5)+2(x-5)(x-7)$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Fonction de Meilleure Approximation ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

13 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ la droite de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-1	0	1
y_i	2	0	4

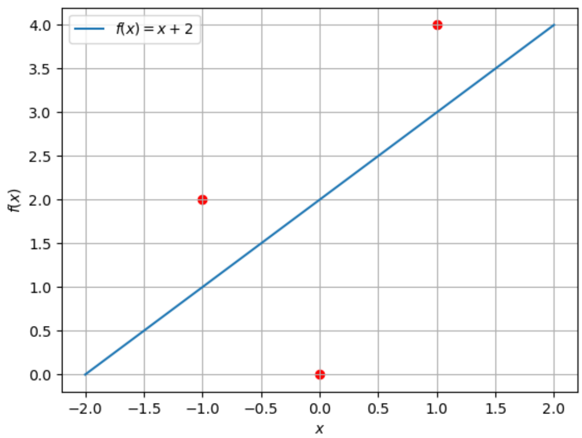
Que vaut α_1 ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n=2$ et il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 2$ et $\alpha_1 = 1$.



14 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ la parabole de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1	-1	-2	-1	3

Que vaut α_2?

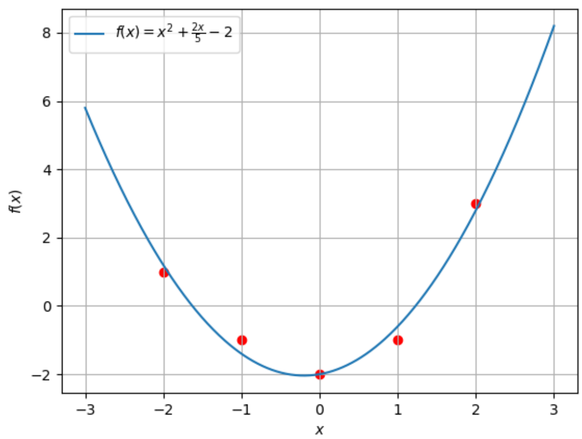
+

− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n=4$ et il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = -2$, $\alpha_1 = 2/5$ et $\alpha_2 = 1$.



15 Soit $f(x) = \alpha_0 \cos(x) + \alpha_1 \sin(x)$ la fonction de meilleure approximation des points suivants:

x_i	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
y_i	2	5	0

Que vaut α_0 ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : On doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\mathscr{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$$
$$(\alpha_0, \alpha_1) \mapsto \mathscr{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i))^2.$$

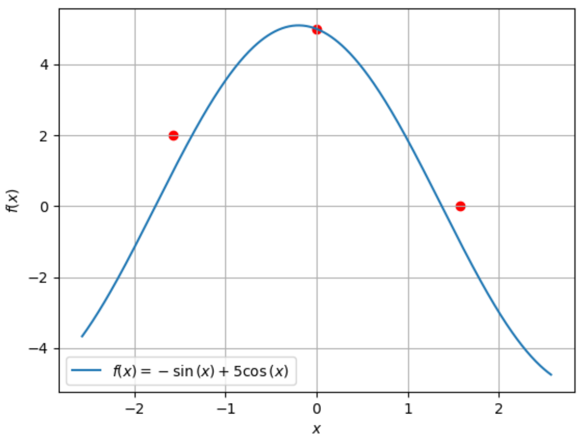
Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche ses points stationnaires. Puisque

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i)) \cos(x_i)\right),$$
$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i)) \sin(x_i)\right),$$

on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i)) \cos(x_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 \cos(x_i) - \alpha_1 \sin(x_i)) \sin(x_i) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} \cos^2(x_i) & \sum_{i=0}^{n} \cos(x_i)\sin(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} \cos(x_i)\sin(x_i) & \sum_{i=0}^{n} \sin^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \cos(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} y_i \sin(x_i) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 5$ et $\alpha_1 = -1$.



16 Considérons les points

x	1	2	3	4	5	6
y	-825	22	47	76	106	159

Parmi les droites de la forme $f(x) = 1 + \alpha_1 x$, on cherche celle de meilleure approximation des points donnés. Calculer la valeur de α_1.

■ +
□ − | □ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □ 6 □ 7 ■ 8 □ 9

Explication :

- Notons $K = 1$. On doit minimiser la fonction d'une seule variable

$$\mathscr{E}(\alpha_1) = \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right)^2.$$

- On obtient

$$\mathscr{E}'(\alpha_1) = -2 \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right) x_i.$$

- Ainsi,

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^{5} (y_i - K) x_i}{\sum_{i=0}^{5} x_i^2}.$$

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Statistiques descriptives** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Énoncé commun aux 3 questions suivantes.

On considère le tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2]$ et $\mathbf{y} = [\beta_1, \beta_2]$:

	$\beta_1 = 5$	$\beta_2 = 7$	Effectif marginal de α_i
$\alpha_1 = 1$	$n_{1,1} = 2$	$n_{1,2} = 4$	$n_{1,\cdot} = 6$
$\alpha_2 = 3$	$n_{2,1} = 2$	$n_{2,2} = 1$	$n_{2,\cdot} = 3$
Effectif marginal de β_j	$n_{\cdot,1} = 4$	$n_{\cdot,2} = 5$	$N = 9$

17 Compléter les cases vides du tableau des **fréquences** :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1			
α_2			
Fréq. marg. de β_j			

0.0 0.11 0.22 0.33 0.44 0.56 0.67 0.78 0.89 1 Cases réservées au correcteur

Explication : Les fréquences s'obtiennent en divisant chaque effectif du tableau donné dans l'énoncé par le total $N = 9$. Voici le tableau des fréquences complètes :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1	$f_{1,1} = \frac{2}{9} = 0.222$	$f_{1,2} = \frac{4}{9} = 0.444$	$f_{1,\cdot} = \frac{6}{9} = 0.667$
α_2	$f_{2,1} = \frac{2}{9} = 0.222$	$f_{2,2} = \frac{1}{9} = 0.111$	$f_{2,\cdot} = \frac{3}{9} = 0.333$
Fréq. marg. de β_j	$f_{\cdot,1} = \frac{4}{9} = 0.444$	$f_{\cdot,2} = \frac{5}{9} = 0.556$	1

18 Compléter les tableaux suivants:

Profils en **colonne** $f_{i|j}$ des **fréquences conditionnelles** de α sachant β :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

Profils en **ligne** $f_{j|i}$ des **fréquences conditionnelles** de β sachant α :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

0.0 0.12 0.25 0.38 0.5 0.62 0.75 0.88 1 Cases réservées au correcteur

Explication :

$f_{i|j} = \frac{n_{i,j}}{n_{\cdot,j}}$ pour chaque colonne. Voici le tableau des profils en colonne complètes :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{4}{5} = 0.800$
α_2	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{1}{5} = 0.200$

$f_{j|i} = \frac{n_{i,j}}{n_{i,\cdot}}$ donc voici le tableau des profils en ligne complètes :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{6} = 0.333$	$\frac{4}{6} = 0.667$
α_2	$\frac{2}{3} = 0.667$	$\frac{1}{3} = 0.333$

19 Le coefficient de corrélation linéaire vaut ? (arrondir à deux chiffres derrière la virgule)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	.									
+	0	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9
−	0	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9

Explication : On calcule d'abord

- les moyennes

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i = \frac{\alpha_1 n_{1,\cdot} + \alpha_2 n_{2,\cdot}}{N} = \frac{1\times 6 + 3\times 3}{9} = \frac{15}{9} = 1.667,$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}\beta_j = \frac{\beta_1 n_{\cdot,1} + \beta_2 n_{\cdot,2}}{N} = \frac{5\times 4 + 7\times 5}{9} = \frac{55}{9} = 6.111,$$

- puis les variances

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i^2 - \bar{\mathbf{x}}^2 = \frac{\alpha_1^2 n_{1,\cdot} + \alpha_2^2 n_{2,\cdot}}{N} - \frac{(15)^2}{9^2} = \frac{1^2\times 6 + 3^2\times 3}{9} - \frac{15^2}{9^2} = \frac{33}{9} - \frac{225}{81} = \frac{33\times 9 - 225}{81} = 0.889,$$

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}(\beta_j)^2 - \bar{\mathbf{y}}^2 = \frac{\beta_1^2 n_{\cdot,1} + \beta_2^2 n_{\cdot,2}}{N} - \frac{(55)^2}{9^2} = \frac{5^2\times 4 + 7^2\times 5}{9} - \frac{55^2}{9^2} = \frac{345}{9} - \frac{3025}{81} = \frac{345\times 9 - 3025}{81} = 0.988$$

et enfin la covariance

$$C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_{i,j}(\alpha_i - \bar{\mathbf{x}})(\beta_j - \bar{\mathbf{y}}) = \frac{n_{1,1}(\alpha_1 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_1 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{1,2}(\alpha_1 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_2 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{2,1}(\alpha_2 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_1 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{2,2}(\alpha_2 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_2 - \bar{\mathbf{y}})}{N}$$

$$= \frac{2\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(5-\bar{\mathbf{y}}) + 4\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(7-\bar{\mathbf{y}}) + 2\times(3-\bar{\mathbf{x}})\times(5-\bar{\mathbf{y}}) + 1\times(3-\bar{\mathbf{x}})\times(7-\bar{\mathbf{y}})}{9}$$

$$= -0.296.$$

On trouve alors le coefficient de corrélation en utilisant la formule $r = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{V(\mathbf{x})V(\mathbf{y})}} = -0.316.$

Énoncé commun aux 4 questions suivantes :

Une série statistique est définie partiellement dans le tableau ci-dessous.

x	2	3	4	5	6
y	26	y_1	y_2	y_3	45

On nous dit que l'équation de la droite de régression de y en fonction de x est $y = \frac{27}{5} + \frac{22}{5}x$.

20 Quelle est la variance $V(\mathbf{x})$ de la série **x** ?

[x] + | [ ] − | [ ] 0 [ ] 1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ] 8 [ ] 9

Explication : La variance est calculée en utilisant la formule $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

21 Quelle est la moyenne $\overline{y}$ de la série **y** ?

[x] + | [ ] 0 [ ] 1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ] 8 [ ] 9 ← Dizaines

[ ] − | [ ] 0 [ ] 1 [ ] 2 [x] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ] 8 [ ] 9 ← Unités

Explication : Puisque le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à la droite de régression, $\overline{y}$ est calculé comme $\overline{y} = \frac{27}{5} + \frac{22}{5} \times 4 = 23$.

22 Quelle est la covariance entre les séries **x** et **y** ?

[x] + | [ ] − | [ ] 0 [ ] 1 [ ] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ] 8 [x] 9 ← Unités

Explication : Puisque la pente de la droite de regression de y par rapport à x est égale à $\gamma_1 = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$, nous pouvons calculer la covariance $C(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en multipliant γ_1 par $V(\mathbf{x})$.

23 Si toutes les valeurs de **x** augmentent de 3, notons $y = q + mx$ la nouvelle équation de la droite de régression de y en fonction x. Que vaut q ?

[ ] 0 [ ] 1 [ ] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [x] 7 [ ] 8 [ ] 9 ← Unités

[ ] + | .

[x] − | [ ] 0 [ ] 1 [ ] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [x] 8 [ ] 9 ← Dixièmes

Explication : Notons $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ la droite de regression donnée dans l'énoncé. Elle se réécrit aussi comme $y = \overline{y} + \gamma_1(x - \overline{x})$ avec $\gamma_0 = \overline{y} - \gamma_1\overline{x}$. Si on augmente toutes les valeurs de **x** de K, sa moyenne augmente de K et la droite est translatée à droite de K. Ainsi, la pente de la nouvelle droite de régression ne change pas, mais l'ordonnée à l'origine change. La nouvelle équation est donc $y = \overline{y} + \gamma_1(x - (\overline{x} + K)) = \gamma_0 + \gamma_1\overline{x} + \gamma_1(x - (\overline{x} + K)) = (\gamma_0 - \gamma_1 K) + \gamma_1 x$ ainsi $q = \gamma_0 - \gamma_1 K = \frac{27}{5} - \frac{22}{5} \times 3 = -\frac{39}{5} = -7.8$.

INSTRUCTIONS

M1-INFO — UE 731 Remise à niveau - Mathématiques — 7 octobre 2024 Durée : 2h

Sélectionnez les quatre derniers chiffres de votre numéro d'étudiant (par ex., si le numéro est 2200**2681**, cochez 2 sur la première ligne, 6 sur la deuxième, etc.) :

NOM	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Prénom...	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- Une feuille A4 recto-verso manuscrite et une calculatrice sont autorisées. Tout autre document est interdit.
- Veuillez **noircir complètement les cases**.
- Il existe trois types de questions :
  - **Questions à choix unique.**
    Choisissez une seule réponse parmi celles proposées. Des points négatifs seront attribués pour une réponse incorrecte.
  - **Questions ouvertes.**
    Répondez en remplissant un tableau. La correction sera effectuée manuellement.
  - **Questions numériques.**
    La réponse est une valeur numérique à coder. Cochez **exactement un chiffre par ligne.**
    - Exemple d'une question où la réponse est un entier :

      $+27 \rightsquigarrow$

+	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	← Dizaines
−	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	← Unités

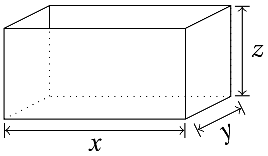
    - Exemple d'une question où la réponse est un nombre décimal :

      $-5.9 \rightsquigarrow$

	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	← Unités
+	.	
−	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	← Dixièmes

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Fonctions de deux variables ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

1 Une boîte *ouverte* a la forme d'un parallélépipède. On cherche les valeurs $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V fixé égale à 4 cm^3. On doit donc minimiser la fonction $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ sachant que $xyz = 4$. Que vaut S dans son minimum (en cm^2)?



☐0 ■1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
☐0 ☐1 ■2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

Explication : On a $x, y, z > 0$. On pose $\sigma(x, y) = S\left(x, y, \frac{4}{xy}\right) = xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x}$.
Calcul des points critiques:

$$\nabla\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} y - \frac{8}{x^2} \\ x - \frac{8}{y^2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = (2, 2).$$

Il existe un seul point critique qui est $(2, 2)$.
Nature des points critiques:

$$H_\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{16}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{16}{y^3} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad H_\sigma(2, 2) = \begin{pmatrix} 2 > 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det H_\sigma(2, 2) > 0.$$

On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a $S\left(2, 2, \frac{4}{4}\right) = \sigma(2, 2) = 12$.

2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que (x_0, y_0) est un point critique et que la matrice Hessienne évaluée en ce point est

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la nature du point critique ?

☐ c'est un maximum
☐ la matrice Hessienne ne permet pas de conclure
☐ c'est un point selle
■ c'est un minimum

Explication :

- Le déterminant de la matrice Hessienne est $\det(H_f) = (2) \times (1) - (-1)^2 = 1$.
- Puisque $\det(H_f) = 1$ et que $\partial_{xx} f(x_0, y_0) = 2$, on en conclut que c'est un minimum.

3 Soit la fonction $f(x, y) = e^{7x^6 - y}$. Parmi les réponses suivantes, laquelle est égale à $\partial_y f$?

■ $-e^{7x^6-y}$ ☐ $42e^{7x^6-y}$ ☐ $42ye^{7x^6-y}$ ☐ $7e^{7x^6-y}$ ☐ $42x^5e^{7x^6-y}$ ☐ Autre

Explication : $f(x, y) = e^{bx^c - ay^d}$ donc la dérivée par rapport à y est $-ady^{d-1}e^{bx^c-ay^d}$.

4 On se donne la fonction

$$f(x,y)=\sqrt{\left(10^{-2}x-\frac{10^3}{y}\right)^2+10^7}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $xy=10^s$. Que vaut s?

■ + ☐ − ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ■ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication :

$$f(x,y)=\sqrt{\left(10^{-2}x-\frac{10^3}{y}\right)^2+10^7}$$

$$\partial_x f(x,y)=\frac{2\left(10^{-2}x-\frac{10^3}{y}\right)10^{-2}}{2\sqrt{\left(10^{-2}x-\frac{10^3}{y}\right)^2+10^7}}=0 \qquad \text{ssi } \left(10^{-2}x-\frac{10^3}{y}\right)=0$$

$$\partial_y f(x,y)=\frac{2\left(10^{-2}x-\frac{10^3}{y}\right)\frac{-10^3}{y^2}}{2\sqrt{\left(10^{-2}x-\frac{10^3}{y}\right)^2+10^7}} \qquad \text{ssi } \left(10^{-2}x-\frac{10^3}{y}\right)=0$$

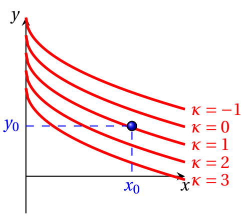
Donc $xy=\dfrac{10^3}{10^{-2}}=10^5$.

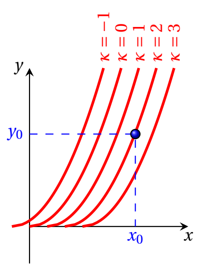
5 Soit $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=xy+x+y$. Calculer l'équation du plan tangent à f en $(-2,2)$.

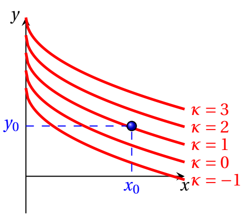
■ $3x-y+4$ ☐ $3x+2$ ☐ $3x-y-4$
☐ $xy+4x+8$ ☐ $3x-y+8$ ☐ Autre:

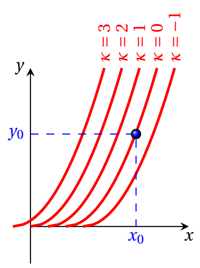
Explication : $f(x,y)\simeq f(x_0,y_0)+(x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0)+(y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0)$.

6 Parmi les graphes ci-dessous, lequel pourrait représenter les lignes de niveau d'une fonction $f(x,y)$ telle que $\partial_x f(x_0,y_0)<0$ et $\partial_y f(x_0,y_0)<0$?

■ 

☐ 

☐ 

☐ 

Explication : Comme $\partial_x f(x_0,y_0)\le 0$, la fonction $h(x)=f(x,y_0)$ est décroissante. Puisque $\partial_y f(x_0,y_0)\le 0$, la fonction $g(y)=f(x_0,y)$ est décroissante.

7 Soient $f(x,y)=-6x+15y$, $x(u,v)=uv$ et $y(u,v)=u+v$. On définit $g(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$. Calculer $\partial_v g$.

☐ -6 ☐ $15u$ ☐ $15-6v$ ■ $15-6u$ ☐ $-6v$ ☐ Autre:

Explication : $\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Interpolation ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

8 Soit $f : [1;17] \to \mathbb{R}$ la **spline linéaire** qui interpole les points $f(1) = -31$, $f(8) = 11$, $f(13) = -19$, $f(17) = -39$. Que vaut $f(5)$?

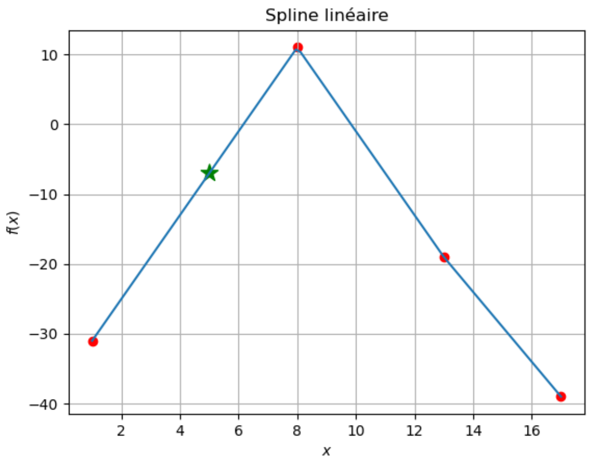
+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La spline linéaire $f : [1;17] \to \mathbb{R}$ a pour équation :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{11-(-31)}{8-1}(x-1) + (-31) & \text{si } 1 \le x \le 8 \\ \frac{-19-(11)}{13-8}(x-8) + (11) & \text{si } 8 \le x \le 13 \\ \frac{-39-(-19)}{17-13}(x-13) + (-19) & \text{si } 13 \le x \le 17 \end{cases}$$

En substituant $x = 5$, on trouve :

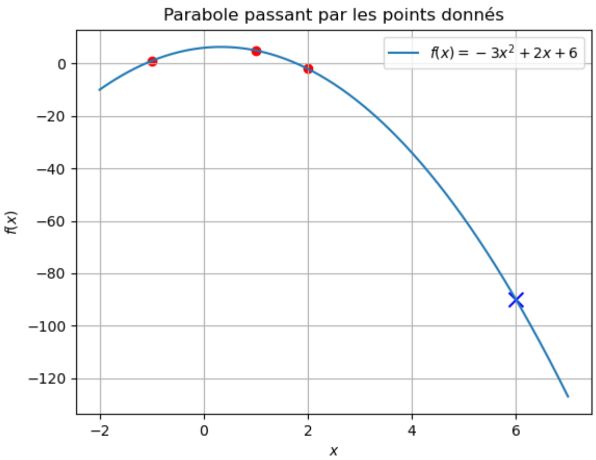
$$f(5) = -7$$



9 Soit f l'unique polynome qui interpole les points $(-1;1)$, $(1;5)$ et $(2;-2)$. Que vaut $f(6)$?

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\blacksquare$ 9
$\blacksquare$ −	$\blacksquare$ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Explication : Le seul polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui passe par les trois points est la parabole d'équation $-3x^2+2x+6 = \frac{(x-2)(x-1)}{6} - \frac{5(x-2)(x+1)}{2} - \frac{2(x-1)(x+1)}{3}$. Pour la calculer l'équation de ce polynome on peut utiliser soit la méthode directe (résolution du système linéaire pour trouver les coefficients dans la base canonique), soit l'écrire dans la base de Lagrange ou encore dans la base de Newton.



10 Dans la base de Lagrange, le polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui interpole les trois points $(1,21)$, $(14,17)$ et $(21,34)$ s'écrit $p(x) = 21L_0(x)+17L_1(x)+34L_2(x)$. Que vaut $L_0(17)$?

$\square$ $\frac{12}{91}$ $\square$ $-\frac{3}{35}$ $\square$ $\frac{12}{35}$ $\square$ $\frac{64}{91}$ $\blacksquare$ $-\frac{3}{65}$ $\square$ $-\frac{16}{35}$ $\square$ $-\frac{16}{65}$ $\square$ $-\frac{48}{91}$ $\square$ $\frac{12}{65}$ $\square$ Autre

Explication :

$$L_0(x) = \frac{(x-21)(x-14)}{260}, \qquad L_1(x) = \frac{(x-21)(x-1)}{-91}, \qquad L_2(x) = \frac{(x-14)(x-1)}{140},$$

$$L_0(17) = \frac{-12}{260}, \qquad L_1(17) = \frac{-64}{-91}, \qquad L_2(17) = \frac{48}{140}.$$

11 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(4,1)$, $(5,2)$, $(6,15)$ et $(7,15)$ s'écrit $p(x) = a+b(x-4)+c(x-4)(x-5)+d(x-4)(x-5)(x-6)$. Que vaut c ?

$\blacksquare$ +										
−	0	1	2	3	4	5	$\blacksquare$ 6	7	8	9

Explication : Les coordonnées dans la base de Newton sont les valeurs encadrées dans le tableau des différences divisées ci-dessous:

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-1},x_i]$
0	4	$\boxed{1=a}$			
1	5	2	$\boxed{1=b}$		
2	6	15	13	$\boxed{6=c}$	
3	7	15	0	$-\frac{13}{2}$	$\boxed{-\frac{25}{6}=d}$

12 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(6,2)$, $(8,10)$, $(13,135)$ et $(16,762)$ s'écrit $p(x) = 2+4(x-6)+3(x-6)(x-8)+2(x-6)(x-8)(x-13)$. En déduire l'équation du polynôme de Newton qui n'interpole que les trois points $(6,2)$, $(8,10)$ et $(13,135)$.

0.0 0.5 1 Cases réservées au correcteur

....

Explication : $p(x) = 2+4(x-6)+3(x-6)(x-8)$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Fonction de Meilleure Approximation ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

13 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ la droite de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-1	0	1
y_i	-4	0	-2

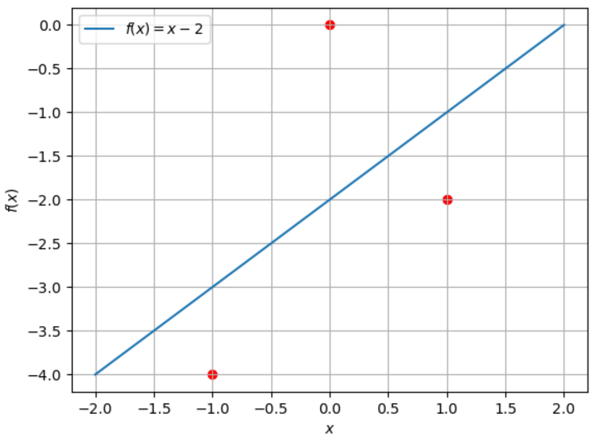
Que vaut α_1 ?

+ | − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n = 2$ et il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

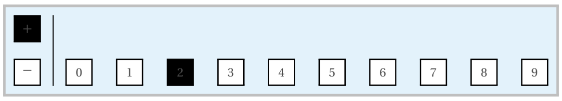
Donc $\alpha_0 = -2$ et $\alpha_1 = 1$.



14 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ la parabole de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-3	1	2	1	-1

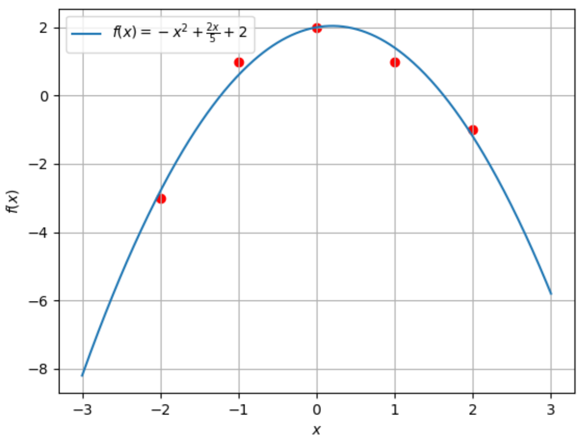
Que vaut α_0?



Explication : $n=4$ et il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 2/5$ et $\alpha_2 = -1$.



15 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(x)$ la fonction de meilleure approximation des points suivants :

x_i	e^1	e^2	e^3
y_i	12	12	18

Que vaut α_0 ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

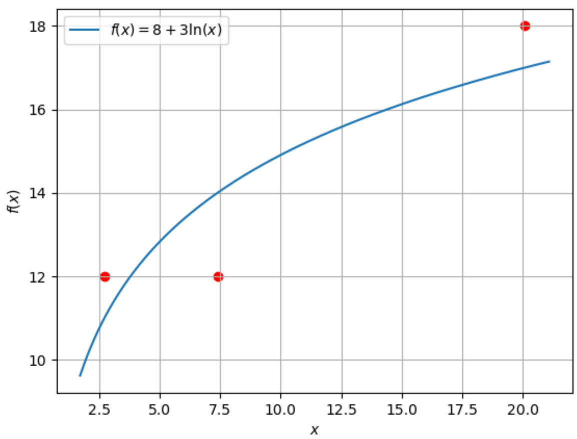
Explication : On doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\mathscr{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$$
$$(\alpha_0, \alpha_1) \mapsto \mathscr{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^{2} \left(y_i - (\alpha_0 \varphi_0(x_i) + \alpha_1 \varphi_1(x_i))\right)^2.$$

où $\varphi_0(x) = 1$ et $\varphi_1(x) = \ln(x)$. On doit donc résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} \sum \varphi_0^2(x_i) & \sum \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) \\ \sum \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) & \sum \varphi_1^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \varphi_0(x_i) \\ \sum y_i \varphi_1(x_i) \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^2 1 & \sum_{i=0}^2 \ln(x_i) \\ \sum_{i=0}^2 \ln(x_i) & \sum_{i=0}^2 \ln^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^2 y_i \\ \sum_{i=0}^2 y_i \ln(x_i) \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 90 \end{bmatrix}$$

Ainsi $\alpha_0 = 8$ et $\alpha_1 = 3$.



16 Considérons les points

x	1	2	3	4	5	6
y	-616	11	35	66	101	182

Parmi les droites de la forme $f(x) = 4 + \alpha_1 x$, on cherche celle de meilleure approximation des points donnés. Calculer la valeur de α_1.

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication :

- Notons $K = 4$. On doit minimiser la fonction d'une seule variable
$$\mathscr{E}(\alpha_1) = \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right)^2.$$
- On obtient
$$\mathscr{E}'(\alpha_1) = -2 \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right) x_i.$$
- Ainsi,
$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^{5} (y_i - K) x_i}{\sum_{i=0}^{5} x_i^2}.$$

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Statistiques descriptives ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Énoncé commun aux 3 questions suivantes.

On considère le tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2]$ et $\mathbf{y} = [\beta_1, \beta_2]$:

	$\beta_1 = 5$	$\beta_2 = 7$	Effectif marginal de α_i
$\alpha_1 = 1$	$n_{1,1} = 2$	$n_{1,2} = 2$	$n_{1,\cdot} = 4$
$\alpha_2 = 3$	$n_{2,1} = 0$	$n_{2,2} = 1$	$n_{2,\cdot} = 1$
Effectif marginal de β_j	$n_{\cdot,1} = 2$	$n_{\cdot,2} = 3$	$N = 5$

17 Compléter les cases vides du tableau des **fréquences** :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1			
α_2			
Fréq. marg. de β_j			

0.0 0.11 0.22 0.33 0.44 0.56 0.67 0.78 0.89 1 Cases réservées au correcteur

Explication : Les fréquences s'obtiennent en divisant chaque effectif du tableau donné dans l'énoncé par le total $N = 5$. Voici le tableau des fréquences complètes :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1	$f_{1,1} = \frac{2}{5} = 0.400$	$f_{1,2} = \frac{2}{5} = 0.400$	$f_{1,\cdot} = \frac{4}{5} = 0.800$
α_2	$f_{2,1} = \frac{0}{5} = 0.000$	$f_{2,2} = \frac{1}{5} = 0.200$	$f_{2,\cdot} = \frac{1}{5} = 0.200$
Fréq. marg. de β_j	$f_{\cdot,1} = \frac{2}{5} = 0.400$	$f_{\cdot,2} = \frac{3}{5} = 0.600$	1

18 Compléter les tableaux suivants:

Profils en **colonne** $f_{i|j}$ des **fréquences conditionnelles** de α sachant β :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

Profils en **ligne** $f_{j|i}$ des **fréquences conditionnelles** de β sachant α :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

0.0 0.12 0.25 0.38 0.5 0.62 0.75 0.88 1 Cases réservées au correcteur

Explication :

$f_{i|j} = \frac{n_{i,j}}{n_{\cdot,j}}$ pour chaque colonne. Voici le tableau des profils en colonne complètes :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{2} = 1.000$	$\frac{2}{3} = 0.667$
α_2	$\frac{0}{2} = 0.000$	$\frac{1}{3} = 0.333$

$f_{j|i} = \frac{n_{i,j}}{n_{i,\cdot}}$ donc voici le tableau des profils en ligne complètes :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{2}{4} = 0.500$
α_2	$\frac{0}{1} = 0.000$	$\frac{1}{1} = 1.000$

19 Le coefficient de corrélation linéaire vaut ? (arrondir à deux chiffres derrière la virgule)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	•									
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Explication : On calcule d'abord

- les moyennes

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i = \frac{\alpha_1 n_{1,\cdot} + \alpha_2 n_{2,\cdot}}{N} = \frac{1\times 4 + 3\times 1}{5} = \frac{7}{5} = 1.400,$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}\beta_j = \frac{\beta_1 n_{\cdot,1} + \beta_2 n_{\cdot,2}}{N} = \frac{5\times 2 + 7\times 3}{5} = \frac{31}{5} = 6.200,$$

- puis les variances

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i^2 - \bar{\mathbf{x}}^2 = \frac{\alpha_1^2 n_{1,\cdot} + \alpha_2^2 n_{2,\cdot}}{N} - \frac{(7)^2}{5^2} = \frac{1^2\times 4 + 3^2\times 1}{5} - \frac{7^2}{5^2} = \frac{13}{5} - \frac{49}{25} = \frac{13\times 5 - 49}{25} = 0.640,$$

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}(\beta_j)^2 - \bar{\mathbf{y}}^2 = \frac{\beta_1^2 n_{\cdot,1} + \beta_2^2 n_{\cdot,2}}{N} - \frac{(31)^2}{5^2} = \frac{5^2\times 2 + 7^2\times 3}{5} - \frac{31^2}{5^2} = \frac{197}{5} - \frac{961}{25} = \frac{197\times 5 - 961}{25} = 0.960$$

et enfin la covariance

$$C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_{i,j}(\alpha_i - \bar{\mathbf{x}})(\beta_j - \bar{\mathbf{y}}) = \frac{n_{1,1}(\alpha_1 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_1 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{1,2}(\alpha_1 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_2 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{2,1}(\alpha_2 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_1 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{2,2}(\alpha_2 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_2 - \bar{\mathbf{y}})}{N}$$

$$= \frac{2\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(5-\bar{\mathbf{y}}) + 2\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(7-\bar{\mathbf{y}}) + 0\times(3-\bar{\mathbf{x}})\times(5-\bar{\mathbf{y}}) + 1\times(3-\bar{\mathbf{x}})\times(7-\bar{\mathbf{y}})}{5}$$

$$= 0.320.$$

On trouve alors le coefficient de corrélation en utilisant la formule $r = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{V(\mathbf{x})V(\mathbf{y})}} = 0.408$.

Énoncé commun aux 4 questions suivantes :

Une série statistique est définie partiellement dans le tableau ci-dessous.

x	2	3	4	5	6
y	26	y_1	y_2	y_3	45

On nous dit que l'équation de la droite de régression de y en fonction de x est $y = \frac{47}{5} + \frac{22}{5}x$.

20 Quelle est la variance $V(\mathbf{x})$ de la série $\mathbf{x}$?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La variance est calculée en utilisant la formule $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

21 Quelle est la moyenne $\overline{y}$ de la série $\mathbf{y}$?

+ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dizaines
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à la droite de régression, $\overline{y}$ est calculé comme $\overline{y} = \frac{47}{5} + \frac{22}{5} \times 4 = 27$.

22 Quelle est la covariance entre les séries $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque la pente de la droite de regression de y par rapport à x est égale à $\gamma_1 = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$, nous pouvons calculer la covariance $C(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en multipliant γ_1 par $V(\mathbf{x})$.

23 Si toutes les valeurs de $\mathbf{x}$ augmentent de 2, notons $y = q + mx$ la nouvelle équation de la droite de régression de y en fonction x. Que vaut q ?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités
+ .
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dixièmes

Explication : Notons $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ la droite de regression donnée dans l'énoncé. Elle se réécrit aussi comme $y = \overline{y} + \gamma_1(x - \overline{x})$ avec $\gamma_0 = \overline{y} - \gamma_1\overline{x}$. Si on augmente toutes les valeurs de $\mathbf{x}$ de K, sa moyenne augmente de K et la droite est translatée à droite de K. Ainsi, la pente de la nouvelle droite de régression ne change pas, mais l'ordonnée à l'origine change. La nouvelle équation est donc $y = \overline{y} + \gamma_1(x - (\overline{x} + K)) = \gamma_0 + \gamma_1\overline{x} + \gamma_1(x - (\overline{x} + K)) = (\gamma_0 - \gamma_1 K) + \gamma_1 x$ ainsi $q = \gamma_0 - \gamma_1 K = \frac{47}{5} - \frac{22}{5} \times 2 = \frac{3}{5} = 0.6$.

Instructions

M1-INFO — UE 731 Remise à niveau - Mathématiques — 7 octobre 2024 Durée : 2h

Sélectionnez les quatre derniers chiffres de votre numéro d'étudiant (par ex., si le numéro est 2200**2681**, cochez 2 sur la première ligne, 6 sur la deuxième, etc.) :

NOM	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Prénom	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- Une feuille A4 recto-verso manuscrite et une calculatrice sont autorisées. Tout autre document est interdit.
- Veuillez **noircir complètement les cases**.
- Il existe trois types de questions :
  - **Questions à choix unique.**
    Choisissez une seule réponse parmi celles proposées. Des points négatifs seront attribués pour une réponse incorrecte.
  - **Questions ouvertes.**
    Répondez en remplissant un tableau. La correction sera effectuée manuellement.
  - **Questions numériques.**
    La réponse est une valeur numérique à coder. Cochez **exactement un chiffre par ligne.**
    - Exemple d'une question où la réponse est un entier :

$+27 \rightsquigarrow$

■ +	0	1	■ 2	3	4	5	6	7	8	9	← Dizaines
−	0	1	2	3	4	5	6	■ 7	8	9	← Unités

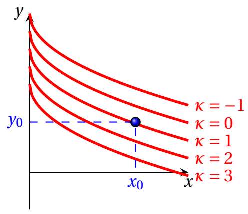
    - Exemple d'une question où la réponse est un nombre décimal :

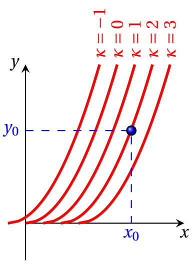
$-5.9 \rightsquigarrow$

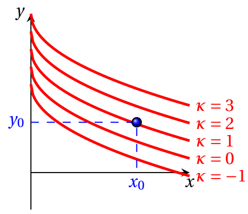
+	0	1	2	3	4	■ 5	6	7	8	9	← Unités
	.										
■ −	0	1	2	3	4	5	6	7	8	■ 9	← Dixièmes

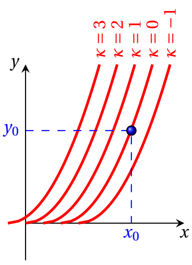
Fonctions de deux variables

1 Parmi les graphes ci-dessous, lequel pourrait représenter les lignes de niveau d'une fonction $f(x,y)$ telle que $\partial_x f(x_0,y_0) < 0$ et $\partial_y f(x_0,y_0) < 0$?

■ 

☐ 

☐ 

☐ 

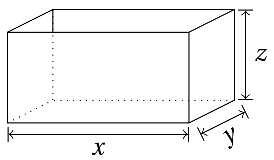
Explication : Comme $\partial_x f(x_0,y_0) \le 0$, la fonction $h(x) = f(x,y_0)$ est décroissante. Puisque $\partial_y f(x_0,y_0) \le 0$, la fonction $g(y) = f(x_0,y)$ est décroissante.

2 Soient $f(x,y) = -3x + 14y$, $x(u,v) = uv$ et $y(u,v) = u - v$. On définit $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$. Calculer $\partial_v g$.

☐ -3 ■ $-3u-14$ ☐ $14-3v$ ☐ $14u$ ☐ $-3v$ ☐ Autre:

Explication : $\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$.

3 Une boîte *ouverte* a la forme d'un parallélépipède. On cherche les valeurs $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V fixé égale à 4 cm^3. On doit donc minimiser la fonction $S(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$ sachant que $xyz = 4$. Que vaut S dans son minimum (en cm^2)?



☐0 ■1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
☐0 ☐1 ■2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

Explication : On a $x,y,z > 0$. On pose $\sigma(x,y) = S\left(x,y,\frac{4}{xy}\right) = xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x}$.
Calcul des points critiques:

$$\nabla\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} y - \frac{8}{x^2} \\ x - \frac{8}{y^2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x,y) = (2,2).$$

Il existe un seul point critique qui est $(2,2)$.
Nature des points critiques:

$$H_\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{16}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{16}{y^3} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad H_\sigma(2,2) = \begin{pmatrix} 2>0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det H_\sigma(2,2) > 0.$$

On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a $S\left(2,2,\frac{4}{4}\right) = \sigma(2,2) = 12$.

4 Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que (x_0,y_0) est un point critique et que la matrice Hessienne évaluée en ce point est

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la nature du point critique ?

■ c'est un point selle
☐ c'est un minimum
☐ la matrice Hessienne ne permet pas de conclure
☐ c'est un maximum

Explication :

- Le déterminant de la matrice Hessienne est $\det(H_f) = (-2)\times(1) - (-1)^2 = -3$.
- Puisque $\det(H_f) = -3$ et que $\partial_{xx} f(x_0,y_0) = -2$, on en conclut que c'est un point selle.

5 On se donne la fonction

$$f(x,y)=\sqrt{\left(10^2x-\frac{10^{-2}}{y}\right)^2+10^5}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $xy=10^s$. Que vaut s?

☐ + ■ − ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ■ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication :

$$f(x,y)=\sqrt{\left(10^2x-\frac{10^{-2}}{y}\right)^2+10^5}$$

$$\partial_x f(x,y)=\frac{2\left(10^2x-\frac{10^{-2}}{y}\right)10^2}{2\sqrt{\left(10^2x-\frac{10^{-2}}{y}\right)^2+10^5}}=0 \qquad \text{ssi } \left(10^2x-\frac{10^{-2}}{y}\right)=0$$

$$\partial_y f(x,y)=\frac{2\left(10^2x-\frac{10^{-2}}{y}\right)\frac{-10^{-2}}{y^2}}{2\sqrt{\left(10^2x-\frac{10^{-2}}{y}\right)^2+10^5}} \qquad \text{ssi } \left(10^2x-\frac{10^{-2}}{y}\right)=0$$

Donc $xy=\frac{10^{-2}}{10^2}=10^{-4}$.

6 Soit la fonction $f(x,y)=e^{9x^5-2y^2}$. Parmi les réponses suivantes, laquelle est égale à $\partial_x f$?

- ☐ $9e^{9x^5-2y^2}$
- ☐ $45xe^{9x^5-2y^2}$
- ☐ $45e^{9x^5-2y^2}$
- ■ $45x^4e^{9x^5-2y^2}$
- ☐ $-4ye^{9x^5-2y^2}$
- ☐ Autre

Explication : $f(x,y)=e^{bx^c-ay^d}$ donc la dérivée par rapport à x est $bcx^{c-1}e^{bx^c-ay^d}$.

7 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=xy+x+y^3$. Calculer l'équation du plan tangent à f en $(-1,3)$.

- ☐ $4x+26y-74$
- ☐ $4x+27$
- ☐ $4x+26y+23$
- ☐ $xy+5x+y^3+26y-74$
- ■ $4x+26y-51$
- ☐ Autre:

Explication : $f(x,y)\simeq f(x_0,y_0)+(x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0)+(y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0)$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Interpolation ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

8 Soit $f\colon [1;17] \to \mathbb{R}$ la **spline linéaire** qui interpole les points $f(1) = -31$, $f(8) = 11$, $f(13) = -19$, $f(17) = -39$. Que vaut $f(10)$?

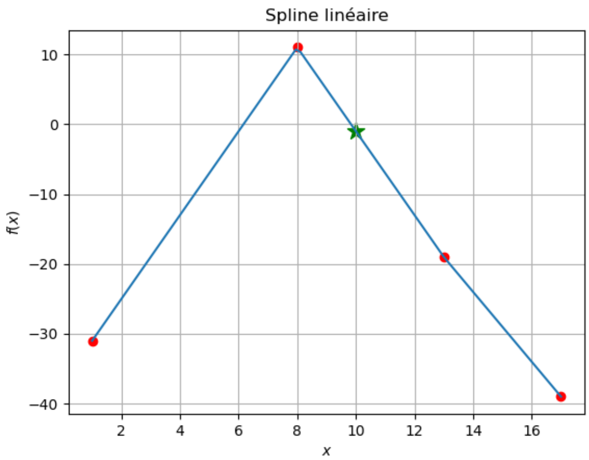
+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La spline linéaire $f\colon [1;17] \to \mathbb{R}$ a pour équation :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{11-(-31)}{8-1}(x-1)+(-31) & \text{si } 1 \le x \le 8 \\ \frac{-19-(11)}{13-8}(x-8)+(11) & \text{si } 8 \le x \le 13 \\ \frac{-39-(-19)}{17-13}(x-13)+(-19) & \text{si } 13 \le x \le 17 \end{cases}$$

En substituant $x = 10$, on trouve :

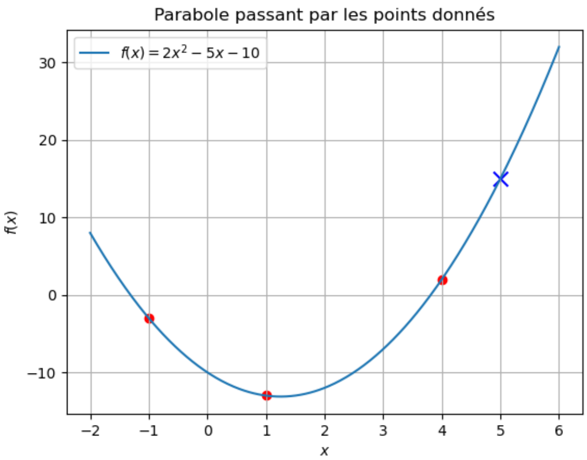
$$f(10) = -1$$



9 Soit f l'unique polynome qui interpole les points $(-1;-3)$, $(1;-13)$ et $(4;2)$. Que vaut $f(5)$?

■ +	☐ 0	■ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9
☐ −	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	■ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

Explication : Le seul polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui passe par les trois points est la parabole d'équation $2x^2-5x-10=-\frac{3(x-4)(x-1)}{10}+\frac{13(x-4)(x+1)}{6}+\frac{2(x-1)(x+1)}{15}$. Pour la calculer l'équation de ce polynome on peut utiliser soit la méthode directe (résolution du système linéaire pour trouver les coefficients dans la base canonique), soit l'écrire dans la base de Lagrange ou encore dans la base de Newton.



10 Dans la base de Lagrange, le polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui interpole les trois points $(1,20)$, $(14,17)$ et $(21,34)$ s'écrit $p(x)=20L_0(x)+17L_1(x)+34L_2(x)$. Que vaut $L_2(20)$?

☐ $-\frac{3}{70}$ ■ $\frac{57}{70}$ ☐ $-\frac{19}{260}$ ☐ $-\frac{19}{140}$ ☐ $-\frac{114}{91}$ ☐ $\frac{19}{91}$ ☐ $\frac{6}{91}$ ☐ $\frac{57}{130}$ ☐ $-\frac{3}{130}$ ☐ Autre

Explication :

$$L_0(x)=\frac{(x-21)(x-14)}{260},\qquad L_1(x)=\frac{(x-21)(x-1)}{-91},\qquad L_2(x)=\frac{(x-14)(x-1)}{140},$$
$$L_0(20)=\frac{-6}{260},\qquad L_1(20)=\frac{-19}{-91},\qquad L_2(20)=\frac{114}{140}.$$

11 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(6,1)$, $(7,2)$, $(8,3)$ et $(9,3)$ s'écrit $p(x)=a+b(x-6)+c(x-6)(x-7)+d(x-6)(x-7)(x-8)$. Que vaut c ?

☐ +										
☐ −	■ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

Explication : Les coordonnées dans la base de Newton sont les valeurs encadrées dans le tableau des différences divisées ci-dessous:

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-1},x_i]$
0	6	$\boxed{1=a}$			
1	7	2	$\boxed{1=b}$		
2	8	3	1	$\boxed{0=c}$	
3	9	3	0	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{-\frac{1}{6}=d}$

12 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(2,6)$, $(3,10)$, $(6,46)$ et $(9,370)$ s'écrit $p(x) = 6+4(x-2)+2(x-2)(x-3)+2(x-2)(x-3)(x-6)$. En déduire l'équation du polynôme de Newton qui n'interpole que les trois points $(2,6)$, $(3,10)$ et $(6,46)$.

0.0 0.5 1 Cases réservées au correcteur

....

Explication : $p(x) = 6+4(x-2)+2(x-2)(x-3)$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Fonction de Meilleure Approximation ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

13 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ la droite de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-1	0	1
y_i	-4	0	2

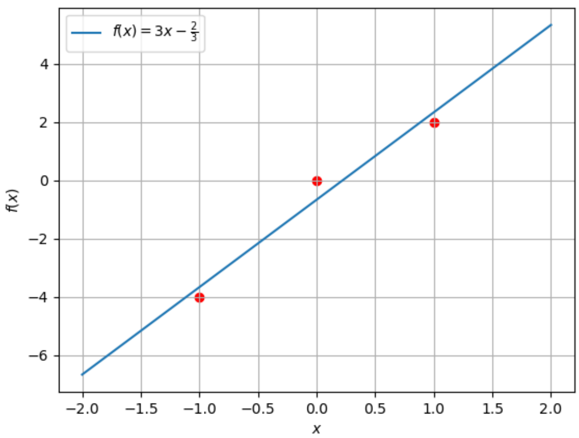
Que vaut α_1 ?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n=2$ et il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = -2/3$ et $\alpha_1 = 3$.



14 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ la parabole de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1	-1	-2	-1	3

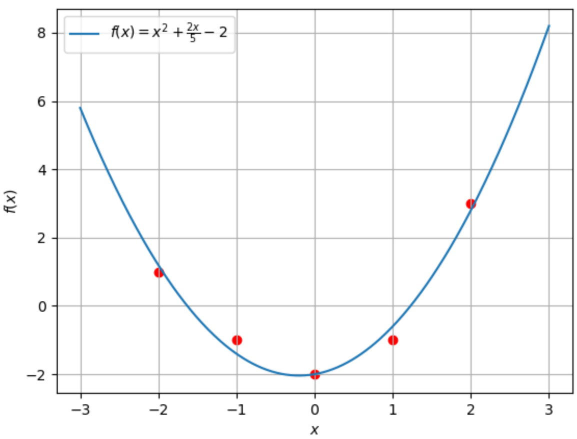
Que vaut α_2?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n = 4$ et il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = -2$, $\alpha_1 = 2/5$ et $\alpha_2 = 1$.



15 Soit $f(x) = \alpha_0 \cos(x) + \alpha_1 \sin(x)$ la fonction de meilleure approximation des points suivants:

x_i	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
y_i	4	9	0

Que vaut α_1 ?

+ / −   0   1   2   3   4   5   6   7   8   9

Explication : On doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\begin{aligned}\mathscr{E}\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}_+\\ (\alpha_0,\alpha_1) &\mapsto \mathscr{E}(\alpha_0,\alpha_1) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0\cos(x_i) - \alpha_1\sin(x_i))^2.\end{aligned}$$

Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche ses points stationnaires. Puisque

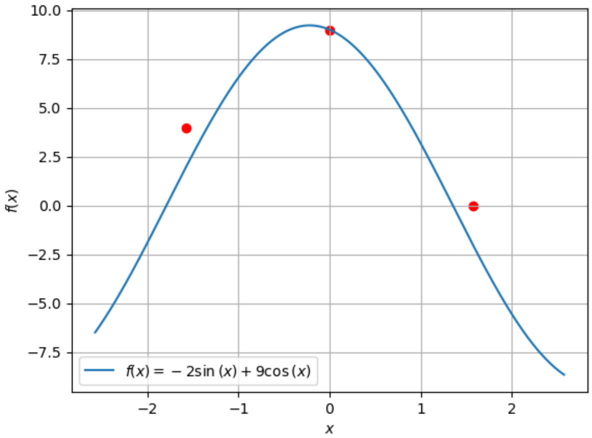
$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0,\alpha_1) &= -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0\cos(x_i) - \alpha_1\sin(x_i))\cos(x_i)\right),\\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0,\alpha_1) &= -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0\cos(x_i) - \alpha_1\sin(x_i))\sin(x_i)\right),\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{cases}\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0,\alpha_1) = 0\\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0,\alpha_1) = 0\end{cases} \iff \begin{cases}\sum_{i=0}^{n}(y_i - \alpha_0\cos(x_i) - \alpha_1\sin(x_i))\cos(x_i) = 0\\ \sum_{i=0}^{n}(y_i - \alpha_0\cos(x_i) - \alpha_1\sin(x_i))\sin(x_i) = 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{n}\cos^2(x_i) & \sum_{i=0}^{n}\cos(x_i)\sin(x_i)\\ \sum_{i=0}^{n}\cos(x_i)\sin(x_i) & \sum_{i=0}^{n}\sin^2(x_i)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{n} y_i\cos(x_i)\\ \sum_{i=0}^{n} y_i\sin(x_i)\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\ -4\end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 9$ et $\alpha_1 = -2$.



16 Considérons les points

x	1	2	3	4	5	6
y	-819	8	45	67	116	152

Parmi les droites de la forme $f(x) = 4 + \alpha_1 x$, on cherche celle de meilleure approximation des points donnés. Calculer la valeur de α_1.

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication :

- Notons $K = 4$. On doit minimiser la fonction d'une seule variable
$$\mathscr{E}(\alpha_1) = \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right)^2.$$
- On obtient
$$\mathscr{E}'(\alpha_1) = -2\sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right) x_i.$$
- Ainsi,
$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^{5} (y_i - K) x_i}{\sum_{i=0}^{5} x_i^2}.$$

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Statistiques descriptives ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Énoncé commun aux 3 questions suivantes.

On considère le tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2]$ et $\mathbf{y} = [\beta_1, \beta_2]$:

	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	Effectif marginal de α_i
$\alpha_1 = 1$	$n_{1,1} = 4$	$n_{1,2} = 1$	$n_{1,\cdot} = 5$
$\alpha_2 = 2$	$n_{2,1} = 2$	$n_{2,2} = 5$	$n_{2,\cdot} = 7$
Effectif marginal de β_j	$n_{\cdot,1} = 6$	$n_{\cdot,2} = 6$	$N = 12$

17 Compléter les cases vides du tableau des **fréquences** :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1			
α_2			
Fréq. marg. de β_j			

0.0 0.11 0.22 0.33 0.44 0.56 0.67 0.78 0.89 1 Cases réservées au correcteur

Explication : Les fréquences s'obtiennent en divisant chaque effectif du tableau donné dans l'énoncé par le total $N = 12$. Voici le tableau des fréquences complètes :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1	$f_{1,1} = \frac{4}{12} = 0.333$	$f_{1,2} = \frac{1}{12} = 0.083$	$f_{1,\cdot} = \frac{5}{12} = 0.417$
α_2	$f_{2,1} = \frac{2}{12} = 0.167$	$f_{2,2} = \frac{5}{12} = 0.417$	$f_{2,\cdot} = \frac{7}{12} = 0.583$
Fréq. marg. de β_j	$f_{\cdot,1} = \frac{6}{12} = 0.500$	$f_{\cdot,2} = \frac{6}{12} = 0.500$	1

18 Compléter les tableaux suivants:

Profils en **colonne** $f_{i|j}$ des **fréquences conditionnelles** de α sachant β :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

Profils en **ligne** $f_{j|i}$ des **fréquences conditionnelles** de β sachant α :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

0.0 0.12 0.25 0.38 0.5 0.62 0.75 0.88 1 Cases réservées au correcteur

Explication :

$f_{i|j} = \frac{n_{i,j}}{n_{\cdot,j}}$ pour chaque colonne. Voici le tableau des profils en colonne complètes :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{4}{6} = 0.667$	$\frac{1}{6} = 0.167$
α_2	$\frac{2}{6} = 0.333$	$\frac{5}{6} = 0.833$

$f_{j|i} = \frac{n_{i,j}}{n_{i,\cdot}}$ donc voici le tableau des profils en ligne complètes :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{4}{5} = 0.800$	$\frac{1}{5} = 0.200$
α_2	$\frac{2}{7} = 0.286$	$\frac{5}{7} = 0.714$

19 Le coefficient de corrélation linéaire vaut ? (arrondir à deux chiffres derrière la virgule)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	.									
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Explication : On calcule d'abord

- les moyennes

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i = \frac{\alpha_1 n_{1,\cdot} + \alpha_2 n_{2,\cdot}}{N} = \frac{1\times 5 + 2\times 7}{12} = \frac{19}{12} = 1.583,$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}\beta_j = \frac{\beta_1 n_{\cdot,1} + \beta_2 n_{\cdot,2}}{N} = \frac{2\times 6 + 3\times 6}{12} = \frac{30}{12} = 2.500,$$

- puis les variances

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i^2 - \bar{\mathbf{x}}^2 = \frac{\alpha_1^2 n_{1,\cdot} + \alpha_2^2 n_{2,\cdot}}{N} - \frac{(19)^2}{12^2} = \frac{1^2\times 5 + 2^2\times 7}{12} - \frac{19^2}{12^2} = \frac{33}{12} - \frac{361}{144} = \frac{33\times 12 - 361}{144} = 0.243,$$

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}(\beta_j)^2 - \bar{\mathbf{y}}^2 = \frac{\beta_1^2 n_{\cdot,1} + \beta_2^2 n_{\cdot,2}}{N} - \frac{(30)^2}{12^2} = \frac{2^2\times 6 + 3^2\times 6}{12} - \frac{30^2}{12^2} = \frac{78}{12} - \frac{900}{144} = \frac{78\times 12 - 900}{144} = 0.250$$

et enfin la covariance

$$C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_{i,j}(\alpha_i - \bar{\mathbf{x}})(\beta_j - \bar{\mathbf{y}}) = \frac{n_{1,1}(\alpha_1 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_1 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{1,2}(\alpha_1 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_2 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{2,1}(\alpha_2 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_1 - \bar{\mathbf{y}}) + n_{2,2}(\alpha_2 - \bar{\mathbf{x}})(\beta_2 - \bar{\mathbf{y}})}{N}$$

$$= \frac{4\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(2-\bar{\mathbf{y}}) + 1\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(3-\bar{\mathbf{y}}) + 2\times(2-\bar{\mathbf{x}})\times(2-\bar{\mathbf{y}}) + 5\times(2-\bar{\mathbf{x}})\times(3-\bar{\mathbf{y}})}{12}$$

$$= 0.125.$$

On trouve alors le coefficient de corrélation en utilisant la formule $r = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{V(\mathbf{x})V(\mathbf{y})}} = 0.507$.

Énoncé commun aux 4 questions suivantes :

Une série statistique est définie partiellement dans le tableau ci-dessous.

x	2	3	4	5	6
y	26	y_1	y_2	y_3	45

On nous dit que l'équation de la droite de régression de y en fonction de x est $y = \frac{26}{5} + \frac{47}{10}x$.

20 Quelle est la variance $V(\mathbf{x})$ de la série **x** ?

+

− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La variance est calculée en utilisant la formule $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

21 Quelle est la moyenne $\overline{y}$ de la série **y** ?

+ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dizaines

− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à la droite de régression, $\overline{y}$ est calculé comme $\overline{y} = \frac{26}{5} + \frac{47}{10} \times 4 = 24$.

22 Quelle est la covariance entre les séries **x** et **y** ?

+

− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque la pente de la droite de regression de y par rapport à x est égale à $\gamma_1 = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$, nous pouvons calculer la covariance $C(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en multipliant γ_1 par $V(\mathbf{x})$.

23 Si toutes les valeurs de **x** augmentent de 3, notons $y = q + mx$ la nouvelle équation de la droite de régression de y en fonction x. Que vaut q ?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

+ .

− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dixièmes

Explication : Notons $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ la droite de regression donnée dans l'énoncé. Elle se réécrit aussi comme $y = \overline{y} + \gamma_1(x - \overline{x})$ avec $\gamma_0 = \overline{y} - \gamma_1\overline{x}$. Si on augmente toutes les valeurs de **x** de K, sa moyenne augmente de K et la droite est translatée à droite de K. Ainsi, la pente de la nouvelle droite de régression ne change pas, mais l'ordonnée à l'origine change. La nouvelle équation est donc $y = \overline{y} + \gamma_1(x - (\overline{x} + K)) = \gamma_0 + \gamma_1\overline{x} + \gamma_1(x - (\overline{x} + K)) = (\gamma_0 - \gamma_1 K) + \gamma_1 x$ ainsi $q = \gamma_0 - \gamma_1 K = \frac{26}{5} - \frac{47}{10} \times 3 = -\frac{89}{10} = -8.9$.

INSTRUCTIONS

M1-INFO — UE 731 Remise à niveau - Mathématiques — 7 octobre 2024 Durée : 2h

Sélectionnez les quatre derniers chiffres de votre numéro d'étudiant (par ex., si le numéro est 2200**2681**, cochez 2 sur la première ligne, 6 sur la deuxième, etc.) :

NOM	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Prénom..	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- Une feuille A4 recto-verso manuscrite et une calculatrice sont autorisées. Tout autre document est interdit.
- Veuillez **noircir complètement les cases**.
- Il existe trois types de questions :
  - **Questions à choix unique.**
    Choisissez une seule réponse parmi celles proposées. Des points négatifs seront attribués pour une réponse incorrecte.
  - **Questions ouvertes.**
    Répondez en remplissant un tableau. La correction sera effectuée manuellement.
  - **Questions numériques.**
    La réponse est une valeur numérique à coder. Cochez **exactement un chiffre par ligne.**
    - Exemple d'une question où la réponse est un entier :

+27 ⇝

■ (+)	0 1 ■(2) 3 4 5 6 7 8 9	← Dizaines
−	0 1 2 3 4 5 6 ■(7) 8 9	← Unités

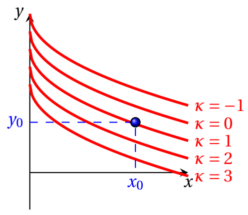
    - Exemple d'une question où la réponse est un nombre décimal :

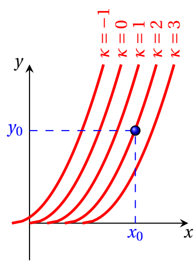
−5.9 ⇝

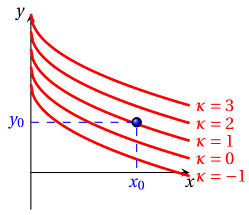
	0 1 2 3 4 ■(5) 6 7 8 9	← Unités
+	.	
■ (−)	0 1 2 3 4 5 6 7 8 ■(9)	← Dixièmes

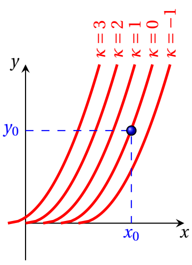
Fonctions de deux variables

1 Parmi les graphes ci-dessous, lequel pourrait représenter les lignes de niveau d'une fonction $f(x,y)$ telle que $\partial_x f(x_0,y_0) < 0$ et $\partial_y f(x_0,y_0) < 0$?

■ 

☐ 

☐ 

☐ 

Explication : Comme $\partial_x f(x_0,y_0) \le 0$, la fonction $h(x) = f(x,y_0)$ est décroissante. Puisque $\partial_y f(x_0,y_0) \le 0$, la fonction $g(y) = f(x_0,y)$ est décroissante.

2 On se donne la fonction

$$f(x,y) = \sqrt{\left(10^{-1}x - \frac{10^{-2}}{y}\right)^2 + 10^7}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $xy = 10^s$. Que vaut s?

☐ +
■ − ☐ 0 ■ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Explication :

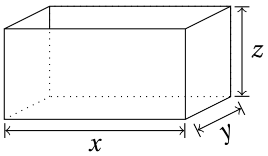
$$f(x,y) = \sqrt{\left(10^{-1}x - \frac{10^{-2}}{y}\right)^2 + 10^7}$$

$$\partial_x f(x,y) = \frac{2\left(10^{-1}x - \frac{10^{-2}}{y}\right)10^{-1}}{2\sqrt{\left(10^{-1}x - \frac{10^{-2}}{y}\right)^2 + 10^7}} = 0 \qquad \text{ssi } \left(10^{-1}x - \frac{10^{-2}}{y}\right) = 0$$

$$\partial_y f(x,y) = \frac{2\left(10^{-1}x - \frac{10^{-2}}{y}\right)\frac{-10^{-2}}{y^2}}{2\sqrt{\left(10^{-1}x - \frac{10^{-2}}{y}\right)^2 + 10^7}} \qquad \text{ssi } \left(10^{-1}x - \frac{10^{-2}}{y}\right) = 0$$

Donc $xy = \frac{10^{-2}}{10^{-1}} = 10^{-1}$.

3 Une boîte *ouverte* a la forme d'un parallélépipède. On cherche les valeurs $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V fixé égale à 32 cm^3. On doit donc minimiser la fonction $S(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$ sachant que $xyz = 32$. Que vaut S dans son minimum (en cm^2)?



☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ■ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ■ 8 ☐ 9

Explication : On a $x, y, z > 0$. On pose $\sigma(x,y) = S\left(x, y, \frac{32}{xy}\right) = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$.
Calcul des points critiques:

$$\nabla\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} y - \frac{64}{x^2} \\ x - \frac{64}{y^2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x,y) = (4,4).$$

Il existe un seul point critique qui est $(4,4)$.
Nature des points critiques:

$$H_\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{128}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{128}{y^3} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad H_\sigma(4,4) = \begin{pmatrix} 2 > 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det H_\sigma(4,4) > 0.$$

On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a $S\left(4, 4, \frac{32}{16}\right) = \sigma(4,4) = 48$.

4 Soient $f(x,y) = 4x + 16y$, $x(u,v) = uv$ et $y(u,v) = u + v$. On définit $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$. Calculer $\partial_u g$.

☐ $16u$ ☐ $4u+16$ ■ $4v+16$ ☐ $4v$ ☐ 4 ☐ Autre:

Explication : $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$.

5 Soit la fonction $f(x,y) = e^{7x^6 - y}$. Parmi les réponses suivantes, laquelle est égale à $\partial_x f$?

☐ $42e^{7x^6-y}$ ☐ $7e^{7x^6-y}$ ☐ $-e^{7x^6-y}$ ■ $42x^5e^{7x^6-y}$ ☐ $42xe^{7x^6-y}$ ☐ Autre

Explication : $f(x,y) = e^{bx^c - ay^d}$ donc la dérivée par rapport à x est $bcx^{c-1}e^{bx^c-ay^d}$.

6 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que (x_0, y_0) est un point critique et que la matrice Hessienne évaluée en ce point est

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la nature du point critique ?

☐ c'est un minimum
■ c'est un maximum
☐ c'est un point selle
☐ la matrice Hessienne ne permet pas de conclure

Explication :

- Le déterminant de la matrice Hessienne est $\det(H_f) = (-2) \times (-1) - (1)^2 = 1$.
- Puisque $\det(H_f) = 1$ et que $\partial_{xx} f(x_0, y_0) = -2$, on en conclut que c'est un maximum.

7 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^3 + xy + y^3$. Calculer l'équation du plan tangent à f en $(-3, 2)$.

☐ $x^3 + xy + 29x + y^3 + 9y + 69$
☐ $29x + 9y + 69$
■ $29x + 9y + 44$
☐ $29x + 62$
☐ $29x + 9y - 25$
☐ Autre:

Explication : $f(x,y) \simeq f(x_0,y_0) + (x - x_0)\partial_x f(x_0,y_0) + (y - y_0)\partial_y f(x_0,y_0)$.

Interpolation

8 Soit $f\colon [1;17] \to \mathbb{R}$ la **spline linéaire** qui interpole les points $f(1) = -18$, $f(8) = 10$, $f(13) = -40$, $f(17) = -36$. Que vaut $f(11)$?

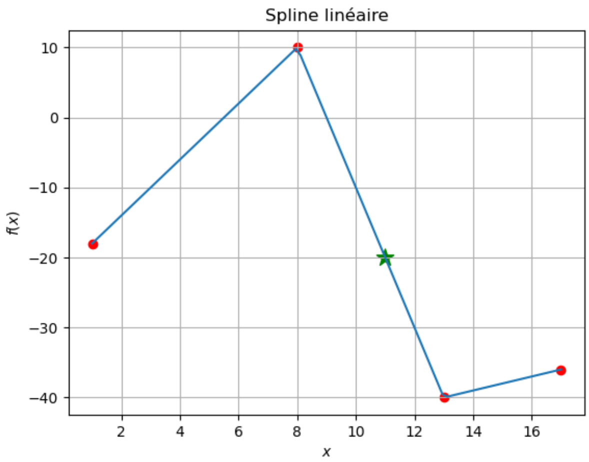
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Explication : La spline linéaire $f\colon [1;17] \to \mathbb{R}$ a pour équation :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10-(-18)}{8-1}(x-1)+(-18) & \text{si } 1 \le x \le 8 \\ \frac{-40-(10)}{13-8}(x-8)+(10) & \text{si } 8 \le x \le 13 \\ \frac{-36-(-40)}{17-13}(x-13)+(-40) & \text{si } 13 \le x \le 17 \end{cases}$$

En substituant $x = 11$, on trouve :

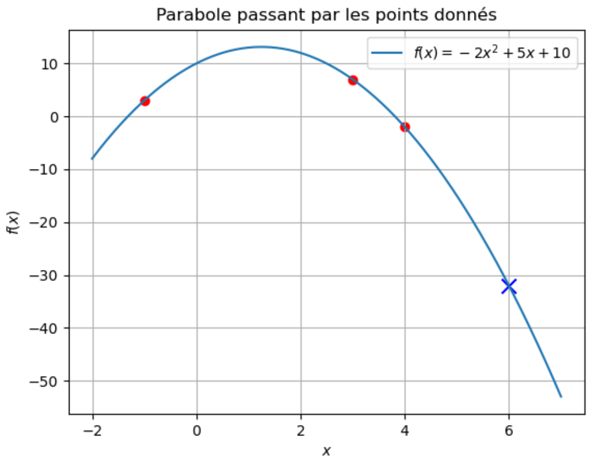
$$f(11) = -20$$



9 Soit f l'unique polynome qui interpole les points $(-1;3)$, $(3;7)$ et $(4;-2)$. Que vaut $f(6)$?

☐ +	☐ 0	☐ 1	☐ 2	■ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9
■ −	☐ 0	☐ 1	■ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

Explication : Le seul polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui passe par les trois points est la parabole d'équation $-2x^2+5x+10 = \frac{3(x-4)(x-3)}{20} - \frac{7(x-4)(x+1)}{4} - \frac{2(x-3)(x+1)}{5}$. Pour la calculer l'équation de ce polynome on peut utiliser soit la méthode directe (résolution du système linéaire pour trouver les coefficients dans la base canonique), soit l'écrire dans la base de Lagrange ou encore dans la base de Newton.



10 Dans la base de Lagrange, le polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui interpole les trois points $(1,24)$, $(14,17)$ et $(21,34)$ s'écrit $p(x) = 24L_0(x)+17L_1(x)+34L_2(x)$. Que vaut $L_1(16)$?

☐ $-\frac{1}{26}$ ☐ $-\frac{1}{14}$ ☐ $\frac{3}{26}$ ☐ $-\frac{15}{28}$ ☐ $\frac{3}{14}$ ☐ $\frac{10}{91}$ ☐ $-\frac{30}{91}$ ■ $\frac{75}{91}$ ☐ $-\frac{15}{52}$ ☐ Autre

Explication :

$$L_0(x) = \frac{(x-21)(x-14)}{260}, \qquad L_1(x) = \frac{(x-21)(x-1)}{-91}, \qquad L_2(x) = \frac{(x-14)(x-1)}{140},$$

$$L_0(16) = \frac{-10}{260}, \qquad L_1(16) = \frac{-75}{-91}, \qquad L_2(16) = \frac{30}{140}.$$

11 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(2,5)$, $(5,17)$, $(10,117)$ et $(12,605)$ s'écrit $p(x) = a+b(x-2)+c(x-2)(x-5)+d(x-2)(x-5)(x-10)$. Que vaut c ?

■ +										
☐ −	☐ 0	☐ 1	■ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

Explication : Les coordonnées dans la base de Newton sont les valeurs encadrées dans le tableau des différences divisées ci-dessous:

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-1},x_i]$
0	2	$\boxed{5=a}$			
1	5	17	$\boxed{4=b}$		
2	10	117	20	$\boxed{2=c}$	
3	12	605	244	32	$\boxed{3=d}$

12 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(9,7)$, $(14,42)$, $(19,377)$ et $(21,1099)$ s'écrit $p(x) = 7+7(x-9)+6(x-9)(x-14)+3(x-9)(x-14)(x-19)$. En déduire l'équation du polynôme de Newton qui n'interpole que les trois points $(9,7)$, $(14,42)$ et $(19,377)$.

0.0 0.5 1 Cases réservées au correcteur

....

Explication : $p(x) = 7+7(x-9)+6(x-9)(x-14)$.

Fonction de Meilleure Approximation

13 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ la droite de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-1	0	1
y_i	4	0	2

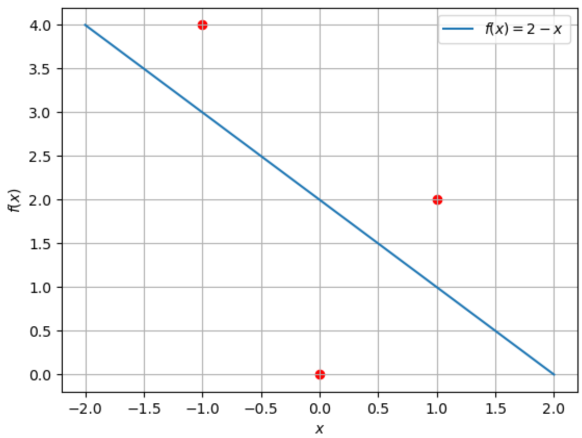
Que vaut α_1 ?

+ − | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n=2$ et il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i\end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\ -2\end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 2$ et $\alpha_1 = -1$.



14 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ la parabole de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1	-1	-2	-1	3

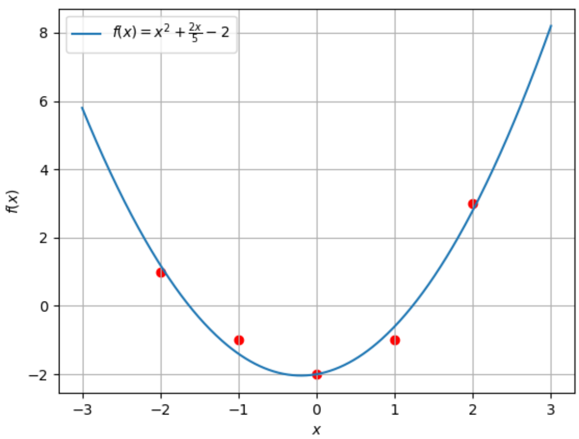
Que vaut α_2?

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n = 4$ et il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = -2$, $\alpha_1 = 2/5$ et $\alpha_2 = 1$.



15 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(x)$ la fonction de meilleure approximation des points suivants :

x_i	e^1	e^2	e^3
y_i	24	9	6

Que vaut α_1 ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

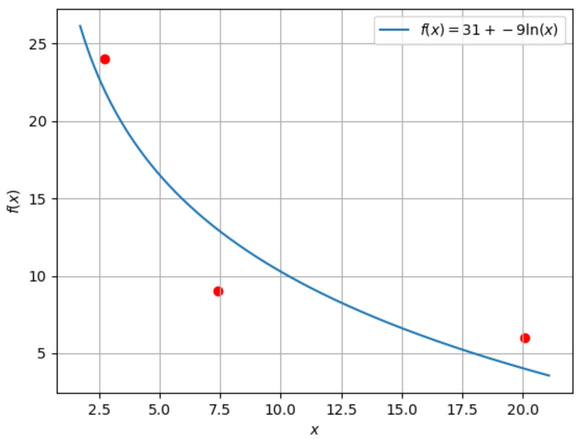
Explication : On doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\mathscr{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$$
$$(\alpha_0, \alpha_1) \mapsto \mathscr{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^{2} \left(y_i - (\alpha_0 \varphi_0(x_i) + \alpha_1 \varphi_1(x_i))\right)^2.$$

où $\varphi_0(x) = 1$ et $\varphi_1(x) = \ln(x)$. On doit donc résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} \sum \varphi_0^2(x_i) & \sum \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) \\ \sum \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) & \sum \varphi_1^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \varphi_0(x_i) \\ \sum y_i \varphi_1(x_i) \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^2 1 & \sum_{i=0}^2 \ln(x_i) \\ \sum_{i=0}^2 \ln(x_i) & \sum_{i=0}^2 \ln^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^2 y_i \\ \sum_{i=0}^2 y_i \ln(x_i) \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Ainsi $\alpha_0 = 31$ et $\alpha_1 = $-9.



16 Considérons les points

x	1	2	3	4	5	6
y	-1437	28	36	91	131	187

Parmi les droites de la forme $f(x) = 1 + \alpha_1 x$, on cherche celle de meilleure approximation des points donnés. Calculer la valeur de α_1.

■ +
□ − □ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5 ■ 6 □ 7 □ 8 □ 9

Explication :

- Notons $K = 1$. On doit minimiser la fonction d'une seule variable
$$\mathscr{E}(\alpha_1) = \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right)^2.$$
- On obtient
$$\mathscr{E}'(\alpha_1) = -2 \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right) x_i.$$
- Ainsi,
$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^{5} (y_i - K) x_i}{\sum_{i=0}^{5} x_i^2}.$$

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Statistiques descriptives** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Énoncé commun aux 3 questions suivantes.

On considère le tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2]$ et $\mathbf{y} = [\beta_1, \beta_2]$:

	$\beta_1 = 5$	$\beta_2 = 7$	Effectif marginal de α_i
$\alpha_1 = 1$	$n_{1,1} = 2$	$n_{1,2} = 4$	$n_{1,\cdot} = 6$
$\alpha_2 = 3$	$n_{2,1} = 2$	$n_{2,2} = 1$	$n_{2,\cdot} = 3$
Effectif marginal de β_j	$n_{\cdot,1} = 4$	$n_{\cdot,2} = 5$	$N = 9$

17 Compléter les cases vides du tableau des **fréquences** :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1			
α_2			
Fréq. marg. de β_j			

0.0 0.11 0.22 0.33 0.44 0.56 0.67 0.78 0.89 1 Cases réservées au correcteur

Explication : Les fréquences s'obtiennent en divisant chaque effectif du tableau donné dans l'énoncé par le total $N = 9$. Voici le tableau des fréquences complètes :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1	$f_{1,1} = \frac{2}{9} = 0.222$	$f_{1,2} = \frac{4}{9} = 0.444$	$f_{1,\cdot} = \frac{6}{9} = 0.667$
α_2	$f_{2,1} = \frac{2}{9} = 0.222$	$f_{2,2} = \frac{1}{9} = 0.111$	$f_{2,\cdot} = \frac{3}{9} = 0.333$
Fréq. marg. de β_j	$f_{\cdot,1} = \frac{4}{9} = 0.444$	$f_{\cdot,2} = \frac{5}{9} = 0.556$	1

18 Compléter les tableaux suivants:

Profils en **colonne** $f_{i|j}$ des **fréquences conditionnelles** de α sachant β :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

Profils en **ligne** $f_{j|i}$ des **fréquences conditionnelles** de β sachant α :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

0.0 0.12 0.25 0.38 0.5 0.62 0.75 0.88 1 Cases réservées au correcteur

Explication :

$f_{i|j} = \frac{n_{i,j}}{n_{\cdot,j}}$ pour chaque colonne. Voici le tableau des profils en colonne complètes :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{4}{5} = 0.800$
α_2	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{1}{5} = 0.200$

$f_{j|i} = \frac{n_{i,j}}{n_{i,\cdot}}$ donc voici le tableau des profils en ligne complètes :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{6} = 0.333$	$\frac{4}{6} = 0.667$
α_2	$\frac{2}{3} = 0.667$	$\frac{1}{3} = 0.333$

19 Le coefficient de corrélation linéaire vaut ? (arrondir à deux chiffres derrière la virgule)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	.									
+	0	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9
−	0	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9

Explication : On calcule d'abord

- les moyennes

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i = \frac{\alpha_1 n_{1,\cdot} + \alpha_2 n_{2,\cdot}}{N} = \frac{1\times 6 + 3\times 3}{9} = \frac{15}{9} = 1.667,$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}\beta_j = \frac{\beta_1 n_{\cdot,1} + \beta_2 n_{\cdot,2}}{N} = \frac{5\times 4 + 7\times 5}{9} = \frac{55}{9} = 6.111,$$

- puis les variances

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i^2 - \bar{\mathbf{x}}^2 = \frac{\alpha_1^2 n_{1,\cdot} + \alpha_2^2 n_{2,\cdot}}{N} - \frac{(15)^2}{9^2} = \frac{1^2\times 6 + 3^2\times 3}{9} - \frac{15^2}{9^2} = \frac{33}{9} - \frac{225}{81} = \frac{33\times 9 - 225}{81} = 0.889,$$

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}(\beta_j)^2 - \bar{\mathbf{y}}^2 = \frac{\beta_1^2 n_{\cdot,1} + \beta_2^2 n_{\cdot,2}}{N} - \frac{(55)^2}{9^2} = \frac{5^2\times 4 + 7^2\times 5}{9} - \frac{55^2}{9^2} = \frac{345}{9} - \frac{3025}{81} = \frac{345\times 9 - 3025}{81} = 0.988$$

et enfin la covariance

$$C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_{i,j}(\alpha_i - \bar{\mathbf{x}})(\beta_j - \bar{\mathbf{y}}) = \frac{n_{1,1}(\alpha_1-\bar{\mathbf{x}})(\beta_1-\bar{\mathbf{y}}) + n_{1,2}(\alpha_1-\bar{\mathbf{x}})(\beta_2-\bar{\mathbf{y}}) + n_{2,1}(\alpha_2-\bar{\mathbf{x}})(\beta_1-\bar{\mathbf{y}}) + n_{2,2}(\alpha_2-\bar{\mathbf{x}})(\beta_2-\bar{\mathbf{y}})}{N}$$

$$= \frac{2\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(5-\bar{\mathbf{y}}) + 4\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(7-\bar{\mathbf{y}}) + 2\times(3-\bar{\mathbf{x}})\times(5-\bar{\mathbf{y}}) + 1\times(3-\bar{\mathbf{x}})\times(7-\bar{\mathbf{y}})}{9}$$

$$= -0.296.$$

On trouve alors le coefficient de corrélation en utilisant la formule $r = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{V(\mathbf{x})V(\mathbf{y})}} = -0.316.$

Énoncé commun aux 4 questions suivantes :

Une série statistique est définie partiellement dans le tableau ci-dessous.

x	2	3	4	5	6
y	26	y_1	y_2	y_3	45

On nous dit que l'équation de la droite de régression de y en fonction de x est $y = \frac{47}{5} + \frac{22}{5}x$.

20 Quelle est la variance $V(\mathbf{x})$ de la série **x** ?

+ | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
−

Explication : La variance est calculée en utilisant la formule $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

21 Quelle est la moyenne $\overline{y}$ de la série **y** ?

+ | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dizaines
− | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à la droite de régression, $\overline{y}$ est calculé comme $\overline{y} = \frac{47}{5} + \frac{22}{5} \times 4 = 27$.

22 Quelle est la covariance entre les séries **x** et **y** ?

+ |
− | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque la pente de la droite de regression de y par rapport à x est égale à $\gamma_1 = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$, nous pouvons calculer la covariance $C(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en multipliant γ_1 par $V(\mathbf{x})$.

23 Si toutes les valeurs de **x** augmentent de 2, notons $y = q + mx$ la nouvelle équation de la droite de régression de y en fonction x. Que vaut q ?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités
+ .
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dixièmes

Explication : Notons $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ la droite de regression donnée dans l'énoncé. Elle se réécrit aussi comme $y = \overline{y} + \gamma_1(x - \overline{x})$ avec $\gamma_0 = \overline{y} - \gamma_1\overline{x}$. Si on augmente toutes les valeurs de **x** de K, sa moyenne augmente de K et la droite est translatée à droite de K. Ainsi, la pente de la nouvelle droite de régression ne change pas, mais l'ordonnée à l'origine change. La nouvelle équation est donc $y = \overline{y} + \gamma_1(x - (\overline{x} + K)) = \gamma_0 + \gamma_1\overline{x} + \gamma_1(x - (\overline{x} + K)) = (\gamma_0 - \gamma_1 K) + \gamma_1 x$ ainsi $q = \gamma_0 - \gamma_1 K = \frac{47}{5} - \frac{22}{5} \times 2 = \frac{3}{5} = 0.6$.

INSTRUCTIONS

M1-INFO — UE 731 Remise à niveau - Mathématiques — 7 octobre 2024 Durée : 2h

Sélectionnez les quatre derniers chiffres de votre numéro d'étudiant (par ex., si le numéro est 2200**2681**, cochez 2 sur la première ligne, 6 sur la deuxième, etc.) :

NOM	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Prénom..	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- Une feuille A4 recto-verso manuscrite et une calculatrice sont autorisées. Tout autre document est interdit.
- Veuillez **noircir complètement les cases**.
- Il existe trois types de questions :
  - **Questions à choix unique.**
    Choisissez une seule réponse parmi celles proposées. Des points négatifs seront attribués pour une réponse incorrecte.
  - **Questions ouvertes.**
    Répondez en remplissant un tableau. La correction sera effectuée manuellement.
  - **Questions numériques.**
    La réponse est une valeur numérique à coder. Cochez **exactement un chiffre par ligne.**
    - Exemple d'une question où la réponse est un entier :

      +27 $\rightsquigarrow$

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	← Dizaines
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	← Unités

    - Exemple d'une question où la réponse est un nombre décimal :

      -5.9 $\rightsquigarrow$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	← Unités
+	.										
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	← Dixièmes

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Fonctions de deux variables** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

1 On se donne la fonction

$$f(x,y) = \sqrt{\left(10^{-4}x - \frac{10^{-2}}{y}\right)^2 + 10^8}.$$

Un extremum de cette fonction est atteint pour $xy = 10^s$. Que vaut s?

■ + □ − | □ 0 □ 1 ■ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □ 6 □ 7 □ 8 □ 9

Explication :

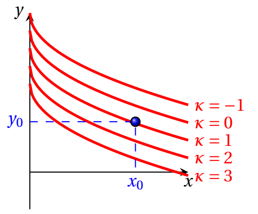
$$f(x,y) = \sqrt{\left(10^{-4}x - \frac{10^{-2}}{y}\right)^2 + 10^8}$$

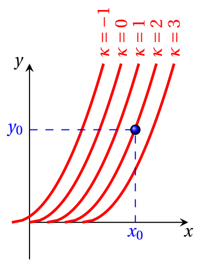
$$\partial_x f(x,y) = \frac{2\left(10^{-4}x - \frac{10^{-2}}{y}\right)10^{-4}}{2\sqrt{\left(10^{-4}x - \frac{10^{-2}}{y}\right)^2 + 10^8}} = 0 \qquad \text{ssi } \left(10^{-4}x - \frac{10^{-2}}{y}\right) = 0$$

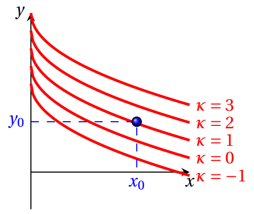
$$\partial_y f(x,y) = \frac{2\left(10^{-4}x - \frac{10^{-2}}{y}\right)\frac{-10^{-2}}{y^2}}{2\sqrt{\left(10^{-4}x - \frac{10^{-2}}{y}\right)^2 + 10^8}} \qquad \text{ssi } \left(10^{-4}x - \frac{10^{-2}}{y}\right) = 0$$

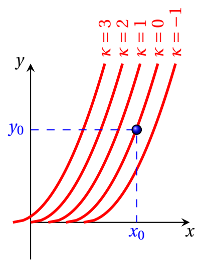
Donc $xy = \frac{10^{-2}}{10^{-4}} = 10^2$.

2 Parmi les graphes ci-dessous, lequel pourrait représenter les lignes de niveau d'une fonction $f(x,y)$ telle que $\partial_x f(x_0,y_0) < 0$ et $\partial_y f(x_0,y_0) < 0$?

■ 

□ 

□ 

□ 

Explication : Comme $\partial_x f(x_0,y_0) \leq 0$, la fonction $h(x) = f(x,y_0)$ est décroissante. Puisque $\partial_y f(x_0,y_0) \leq 0$, la fonction $g(y) = f(x_0,y)$ est décroissante.

3 Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^3 + xy + y^2$. Calculer l'équation du plan tangent à f en $(-3,3)$.

□ $30x + 3y - 27$ □ $30x + 63$ ■ $30x + 3y + 54$
□ $x^3 + xy + 30x + y^2 + 3y + 81$ □ $30x + 3y + 81$ □ Autre:

Explication : $f(x,y) \simeq f(x_0,y_0) + (x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0) + (y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0)$.

4 Soit la fonction $f(x,y) = e^{7x^6-2y^2}$. Parmi les réponses suivantes, laquelle est égale à $\partial_x f$?

□ $-4ye^{7x^6-2y^2}$ ■ $42x^5e^{7x^6-2y^2}$ □ $42xe^{7x^6-2y^2}$ □ $7e^{7x^6-2y^2}$ □ $42e^{7x^6-2y^2}$ □ Autre

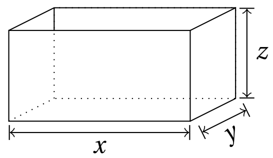
Explication : $f(x,y) = e^{bx^c - ay^d}$ donc la dérivée par rapport à x est $bcx^{c-1}e^{bx^c-ay^d}$.

5 Soient $f(x,y) = 4x + 15y$, $x(u,v) = uv$ et $y(u,v) = u + v$. On définit $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$. Calculer $\partial_u g$.

- [ ] $4u + 15$
- [ ] $15u$
- [x] $4v + 15$
- [ ] $4v$
- [ ] 4
- [ ] Autre:

Explication : $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$.

6 Une boîte *ouverte* a la forme d'un parallélépipède. On cherche les valeurs $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V fixé égale à 108 cm^3. On doit donc minimiser la fonction $S(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$ sachant que $xyz = 108$. Que vaut S dans son minimum (en cm^2)?



0	■	2	3	4	5	6	7	8	9
■	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	■	9

Explication : On a $x, y, z > 0$. On pose $\sigma(x,y) = S\left(x, y, \frac{108}{xy}\right) = xy + \frac{216}{y} + \frac{216}{x}$.
Calcul des points critiques:

$$\nabla\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} y - \frac{216}{x^2} \\ x - \frac{216}{y^2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x,y) = (6,6).$$

Il existe un seul point critique qui est $(6,6)$.
Nature des points critiques:

$$H_\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{432}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{432}{y^3} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad H_\sigma(6,6) = \begin{pmatrix} 2 > 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det H_\sigma(6,6) > 0.$$

On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a $S\left(6, 6, \frac{108}{36}\right) = \sigma(6,6) = 108$.

7 Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que (x_0, y_0) est un point critique et que la matrice Hessienne évaluée en ce point est

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la nature du point critique ?

- [ ] c'est un maximum
- [x] c'est un minimum
- [ ] la matrice Hessienne ne permet pas de conclure
- [ ] c'est un point selle

Explication :

- Le déterminant de la matrice Hessienne est $\det(H_f) = (1) \times (2) - (1)^2 = 1$.
- Puisque $\det(H_f) = 1$ et que $\partial_{xx} f(x_0, y_0) = 1$, on en conclut que c'est un minimum.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ Interpolation ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

8 Soit $f\colon [1;17] \to \mathbb{R}$ la **spline linéaire** qui interpole les points $f(1) = -31$, $f(8) = 11$, $f(13) = -19$, $f(17) = -39$. Que vaut $f(11)$?

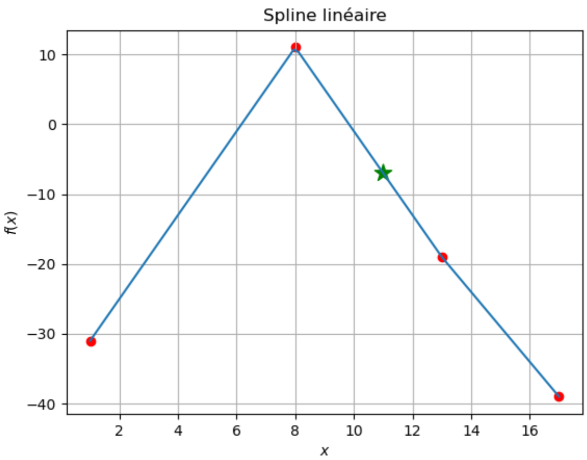
+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La spline linéaire $f\colon [1;17] \to \mathbb{R}$ a pour équation :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{11-(-31)}{8-1}(x-1)+(-31) & \text{si } 1 \le x \le 8 \\ \frac{-19-(11)}{13-8}(x-8)+(11) & \text{si } 8 \le x \le 13 \\ \frac{-39-(-19)}{17-13}(x-13)+(-19) & \text{si } 13 \le x \le 17 \end{cases}$$

En substituant $x = 11$, on trouve :

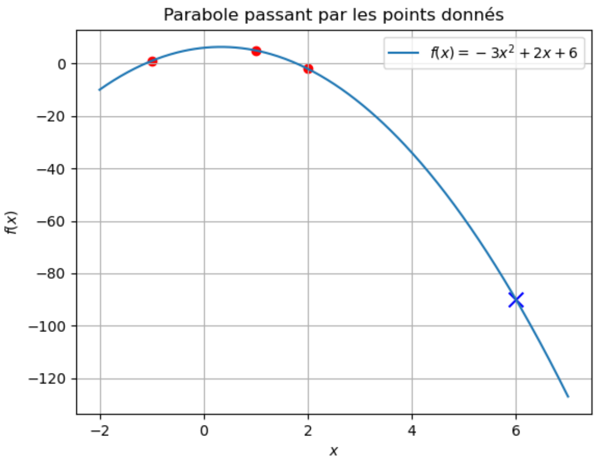
$$f(11) = -7$$



9 Soit f l'unique polynome qui interpole les points $(-1;1)$, $(1;5)$ et $(2;-2)$. Que vaut $f(6)$?

☐ +	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	■ 9
■ −	■ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

Explication : Le seul polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui passe par les trois points est la parabole d'équation $-3x^2+2x+6=\frac{(x-2)(x-1)}{6}-\frac{5(x-2)(x+1)}{2}-\frac{2(x-1)(x+1)}{3}$. Pour la calculer l'équation de ce polynome on peut utiliser soit la méthode directe (résolution du système linéaire pour trouver les coefficients dans la base canonique), soit l'écrire dans la base de Lagrange ou encore dans la base de Newton.



10 Dans la base de Lagrange, le polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ qui interpole les trois points $(1,21)$, $(14,17)$ et $(21,34)$ s'écrit $p(x)=21L_0(x)+17L_1(x)+34L_2(x)$. Que vaut $L_0(17)$?

☐ $-\frac{16}{35}$ ☐ $\frac{12}{65}$ ☐ $-\frac{48}{91}$ ☐ $\frac{64}{91}$ ☐ $-\frac{3}{35}$ ■ $-\frac{3}{65}$ ☐ $\frac{12}{35}$ ☐ $\frac{12}{91}$ ☐ $-\frac{16}{65}$ ☐ Autre

Explication :

$$L_0(x)=\frac{(x-21)(x-14)}{260},\quad L_1(x)=\frac{(x-21)(x-1)}{-91},\quad L_2(x)=\frac{(x-14)(x-1)}{140},$$
$$L_0(17)=\frac{-12}{260},\quad L_1(17)=\frac{-64}{-91},\quad L_2(17)=\frac{48}{140}.$$

11 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(3,2)$, $(7,14)$, $(11,122)$ et $(14,1190)$ s'écrit $p(x)=a+b(x-3)+c(x-3)(x-7)+d(x-3)(x-7)(x-11)$. Que vaut c ?

■ +										
☐ −	☐ 0	☐ 1	☐ 2	■ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

Explication : Les coordonnées dans la base de Newton sont les valeurs encadrées dans le tableau des différences divisées ci-dessous:

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-1},x_i]$
0	3	$\boxed{2=a}$			
1	7	14	$\boxed{3=b}$		
2	11	122	27	$\boxed{3=c}$	
3	14	1190	356	47	$\boxed{4=d}$

12 Dans la base de Newton, le polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui interpole les quatre points $(4,5)$, $(7,26)$, $(12,221)$ et $(16,2249)$ s'écrit $p(x) = 5 + 7(x-4) + 4(x-4)(x-7) + 4(x-4)(x-7)(x-12)$. En déduire l'équation du polynôme de Newton qui n'interpole que les trois points $(4,5)$, $(7,26)$ et $(12,221)$.

0.0 0.5 1 Cases réservées au correcteur

....

Explication : $p(x) = 5 + 7(x-4) + 4(x-4)(x-7)$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Fonction de Meilleure Approximation** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

13 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ la droite de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-1	0	1
y_i	1	0	2

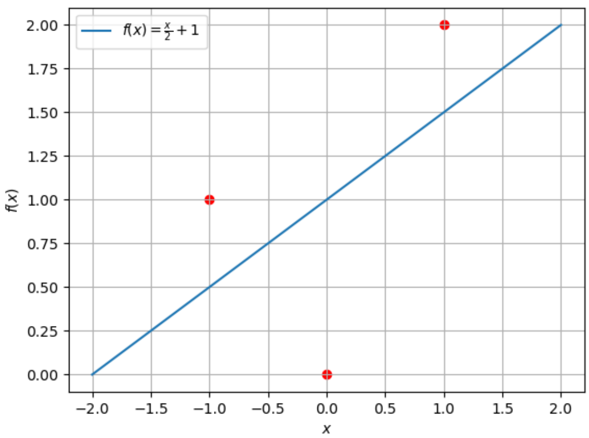
Que vaut α_0 ?

+ − 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : $n = 2$ et il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_1 = 1/2$.



14 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ la parabole de meilleure approximation des points suivants:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	3	-1	-2	-1	1

Que vaut α_0?

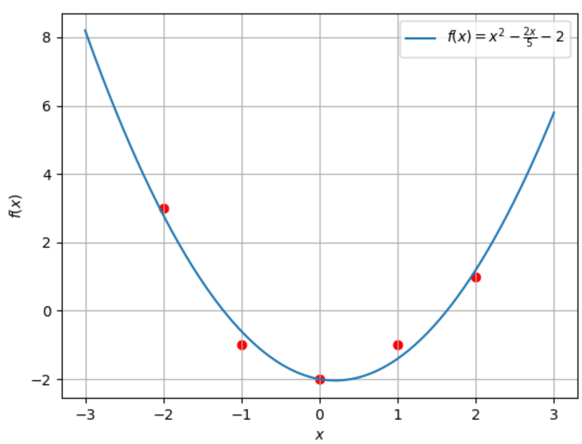
+

− | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

Explication : $n=4$ et il s'agit de chercher α_0, α_1 et α_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 = -2$, $\alpha_1 = -2/5$ et $\alpha_2 = 1$.



15 Soit $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(x)$ la fonction de meilleure approximation des points suivants :

x_i	e^1	e^2	e^3
y_i	6	12	36

Que vaut α_1 ?

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

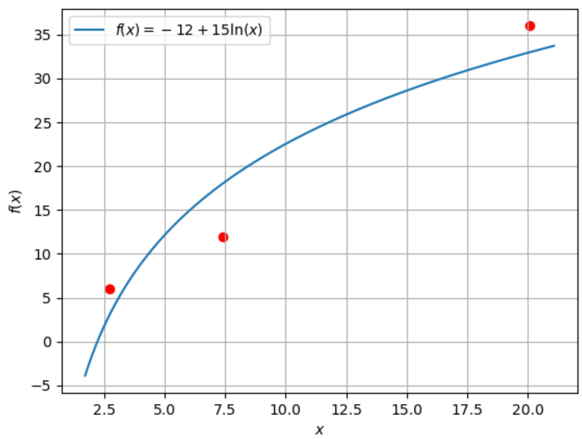
Explication : On doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\begin{aligned}\mathscr{E} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}_+\\ (\alpha_0, \alpha_1) &\mapsto \mathscr{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^{2} \left(y_i - (\alpha_0\varphi_0(x_i) + \alpha_1\varphi_1(x_i))\right)^2.\end{aligned}$$

où $\varphi_0(x) = 1$ et $\varphi_1(x) = \ln(x)$. On doit donc résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} \sum\varphi_0^2(x_i) & \sum\varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) \\ \sum\varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) & \sum\varphi_1^2(x_i)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum y_i\varphi_0(x_i)\\ \sum y_i\varphi_1(x_i)\end{pmatrix} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^2 1 & \sum_{i=0}^2 \ln(x_i) \\ \sum_{i=0}^2 \ln(x_i) & \sum_{i=0}^2 \ln^2(x_i)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{i=0}^2 y_i\\ \sum_{i=0}^2 y_i\ln(x_i)\end{pmatrix} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{bmatrix}3 & 6\\ 6 & 14\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}54\\ 138\end{bmatrix}$$

Ainsi $\alpha_0 =$ -12 et $\alpha_1 = 15$.



16 Considérons les points

x	1	2	3	4	5	6
y	-1145	27	25	73	120	156

Parmi les droites de la forme $f(x) = -1 + \alpha_1 x$, on cherche celle de meilleure approximation des points donnés. Calculer la valeur de α_1.

+
− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication :

- Notons $K = -1$. On doit minimiser la fonction d'une seule variable

$$\mathscr{E}(\alpha_1) = \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right)^2.$$

- On obtient

$$\mathscr{E}'(\alpha_1) = -2 \sum_{i=0}^{5} \left(y_i - (K + \alpha_1 x_i)\right) x_i.$$

- Ainsi,

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^{5} (y_i - K) x_i}{\sum_{i=0}^{5} x_i^2}.$$

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Statistiques descriptives** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Énoncé commun aux 3 questions suivantes.

On considère le tableau de la distribution conjointe de deux variables quantitatives $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2]$ et $\mathbf{y} = [\beta_1, \beta_2]$:

	$\beta_1 = 5$	$\beta_2 = 7$	Effectif marginal de α_i
$\alpha_1 = 1$	$n_{1,1} = 2$	$n_{1,2} = 4$	$n_{1,\cdot} = 6$
$\alpha_2 = 3$	$n_{2,1} = 2$	$n_{2,2} = 1$	$n_{2,\cdot} = 3$
Effectif marginal de β_j	$n_{\cdot,1} = 4$	$n_{\cdot,2} = 5$	$N = 9$

17 Compléter les cases vides du tableau des **fréquences** :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1			
α_2			
Fréq. marg. de β_j			

0.0 0.11 0.22 0.33 0.44 0.56 0.67 0.78 0.89 1 Cases réservées au correcteur

Explication : Les fréquences s'obtiennent en divisant chaque effectif du tableau donné dans l'énoncé par le total $N = 9$. Voici le tableau des fréquences complètes :

	β_1	β_2	Fréq. marg. de α_i
α_1	$f_{1,1} = \frac{2}{9} = 0.222$	$f_{1,2} = \frac{4}{9} = 0.444$	$f_{1,\cdot} = \frac{6}{9} = 0.667$
α_2	$f_{2,1} = \frac{2}{9} = 0.222$	$f_{2,2} = \frac{1}{9} = 0.111$	$f_{2,\cdot} = \frac{3}{9} = 0.333$
Fréq. marg. de β_j	$f_{\cdot,1} = \frac{4}{9} = 0.444$	$f_{\cdot,2} = \frac{5}{9} = 0.556$	1

18 Compléter les tableaux suivants:

Profils en **colonne** $f_{i|j}$ des **fréquences conditionnelles** de α sachant β :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

Profils en **ligne** $f_{j|i}$ des **fréquences conditionnelles** de β sachant α :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1		
α_2		

0.0 0.12 0.25 0.38 0.5 0.62 0.75 0.88 1 Cases réservées au correcteur

Explication :

$f_{i|j} = \frac{n_{i,j}}{n_{\cdot,j}}$ pour chaque colonne. Voici le tableau des profils en colonne complètes :

$f_{i\|j}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{4}{5} = 0.800$
α_2	$\frac{2}{4} = 0.500$	$\frac{1}{5} = 0.200$

$f_{j|i} = \frac{n_{i,j}}{n_{i,\cdot}}$ donc voici le tableau des profils en ligne complètes :

$f_{j\|i}$	β_1	β_2
α_1	$\frac{2}{6} = 0.333$	$\frac{4}{6} = 0.667$
α_2	$\frac{2}{3} = 0.667$	$\frac{1}{3} = 0.333$

19 Le coefficient de corrélation linéaire vaut ? (arrondir à deux chiffres derrière la virgule)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	■ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
+	0	1	2	■ 3	4	5	6	7	8	9
■ −	0	1	■ 2	3	4	5	6	7	8	9

Explication : On calcule d'abord

- les moyennes

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i = \frac{\alpha_1 n_{1,\cdot} + \alpha_2 n_{2,\cdot}}{N} = \frac{1\times 6 + 3\times 3}{9} = \frac{15}{9} = 1.667,$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}\beta_j = \frac{\beta_1 n_{\cdot,1} + \beta_2 n_{\cdot,2}}{N} = \frac{5\times 4 + 7\times 5}{9} = \frac{55}{9} = 6.111,$$

- puis les variances

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i,\cdot}\alpha_i^2 - \bar{\mathbf{x}}^2 = \frac{\alpha_1^2 n_{1,\cdot} + \alpha_2^2 n_{2,\cdot}}{N} - \frac{(15)^2}{9^2} = \frac{1^2\times 6 + 3^2\times 3}{9} - \frac{15^2}{9^2} = \frac{33}{9} - \frac{225}{81} = \frac{33\times 9 - 225}{81} = 0.889,$$

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\cdot,j}(\beta_j)^2 - \bar{\mathbf{y}}^2 = \frac{\beta_1^2 n_{\cdot,1} + \beta_2^2 n_{\cdot,2}}{N} - \frac{(55)^2}{9^2} = \frac{5^2\times 4 + 7^2\times 5}{9} - \frac{55^2}{9^2} = \frac{345}{9} - \frac{3025}{81} = \frac{345\times 9 - 3025}{81} = 0.988$$

et enfin la covariance

$$C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_{i,j}(\alpha_i - \bar{\mathbf{x}})(\beta_j - \bar{\mathbf{y}}) = \frac{n_{1,1}(\alpha_1-\bar{\mathbf{x}})(\beta_1-\bar{\mathbf{y}}) + n_{1,2}(\alpha_1-\bar{\mathbf{x}})(\beta_2-\bar{\mathbf{y}}) + n_{2,1}(\alpha_2-\bar{\mathbf{x}})(\beta_1-\bar{\mathbf{y}}) + n_{2,2}(\alpha_2-\bar{\mathbf{x}})(\beta_2-\bar{\mathbf{y}})}{N}$$

$$= \frac{2\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(5-\bar{\mathbf{y}}) + 4\times(1-\bar{\mathbf{x}})\times(7-\bar{\mathbf{y}}) + 2\times(3-\bar{\mathbf{x}})\times(5-\bar{\mathbf{y}}) + 1\times(3-\bar{\mathbf{x}})\times(7-\bar{\mathbf{y}})}{9}$$

$$= -0.296.$$

On trouve alors le coefficient de corrélation en utilisant la formule $r = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{V(\mathbf{x})V(\mathbf{y})}} = -0.316$.

Énoncé commun aux 4 questions suivantes :

Une série statistique est définie partiellement dans le tableau ci-dessous.

x	2	3	4	5	6
y	26	y_1	y_2	y_3	45

On nous dit que l'équation de la droite de régression de y en fonction de x est $y = \frac{37}{5} + \frac{22}{5}x$.

20 Quelle est la variance $V(\mathbf{x})$ de la série **x** ?

+

− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Explication : La variance est calculée en utilisant la formule $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

21 Quelle est la moyenne $\overline{y}$ de la série **y** ?

+ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dizaines

− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à la droite de régression, $\overline{y}$ est calculé comme $\overline{y} = \frac{37}{5} + \frac{22}{5} \times 4 = 25$.

22 Quelle est la covariance entre les séries **x** et **y** ?

+

− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

Explication : Puisque la pente de la droite de regression de y par rapport à x est égale à $\gamma_1 = \frac{C(\mathbf{x},\mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$, nous pouvons calculer la covariance $C(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en multipliant γ_1 par $V(\mathbf{x})$.

23 Si toutes les valeurs de y augmentent de 3, notons $y = q + mx$ la nouvelle équation de la droite de régression de y en fonction x. Que vaut q ?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dizaines

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Unités

+ .

− 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← Dixièmes

Explication : Notons $y = \gamma_0 + \gamma_1 x$ la droite de regression donnée dans l'énoncé. Elle se réécrit aussi comme $y = \overline{y} + \gamma_1(x - \overline{x})$ avec $\gamma_0 = \overline{y} - \gamma_1\overline{x}$. Si on augmente toutes les valeurs de **y** de K, sa moyenne augmente de K et la droite est translatée vers le haut de K. Ainsi, la pente de la nouvelle droite de régression ne change pas, mais l'ordonnée à l'origine augmente de K. La nouvelle équation est donc $y = \overline{y} + K + \gamma_1(x - \overline{x}) = (\gamma_0 + K) + \gamma_1 x$ ainsi $q = \gamma_0 + K = \frac{37}{5} + 3 = \frac{52}{5} = 10.4$.