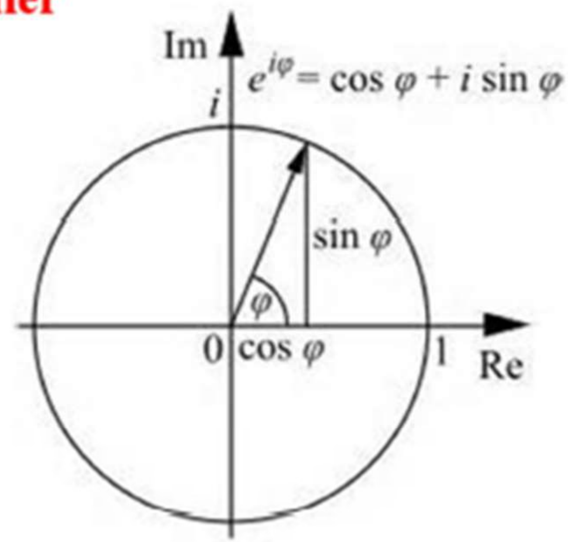
Chapitre 2 : Les bases des nombres complexes pour le GEII

Leonhard Euler



$$e^{i\pi}+1=0$$

Page 5 chapitre 2

Partie A : Définitions et notations du GEII

I. Introduction

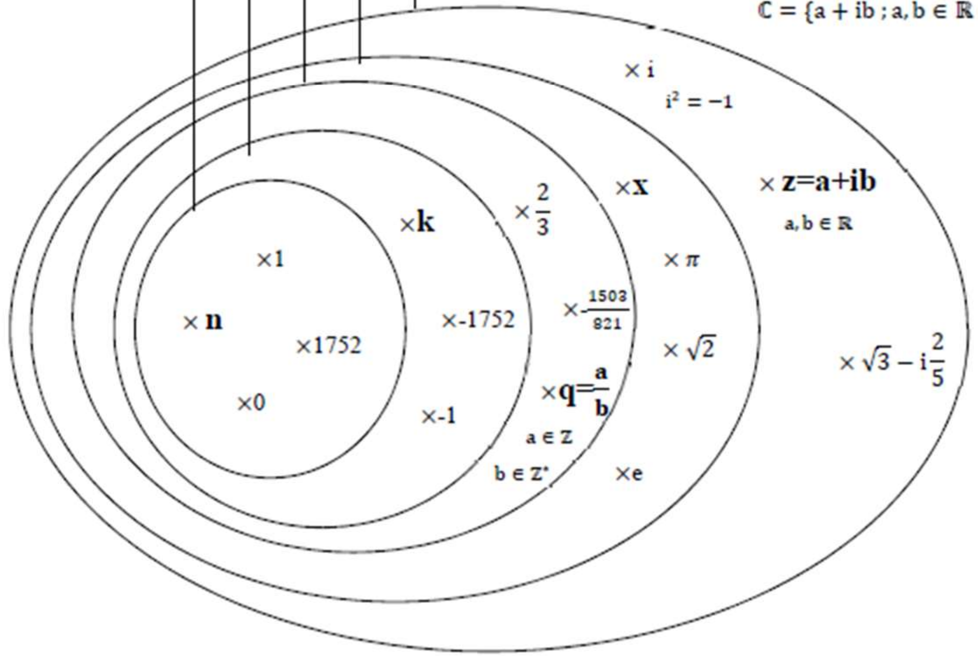
Ensemble des nombres <u>entiers naturels</u> : $\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;3\,;\ \dots;n\,;\dots\}$

Ensemble des nombres <u>entiers relatifs</u> :
$\mathbb{Z} = \{\dots;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;1\,;2\,;3\,;\dots;k\,;\dots\}$

Ensembles des nombres <u>rationnels</u> : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}\,;a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$

Ensembles des nombres <u>réels</u> : $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \underbrace{\{\sqrt{2}\,;\ e\,;\ \pi\,;\dots;x\,;\dots\}}_{\text{nombres irrationnels}}$

Ensemble des nombres <u>complexes</u> :
$\mathbb{C} = \{a + ib\,; a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Notes Résoudre $x^2+1=0 \iff x^2=-1<0$ c'est impossible dans $\mathbb{R}$. Page 4 chapitre 2

Soit i, un nombre imaginaire tel que $\boxed{i^2=-1}$

$x^2=-1 \iff x^2=i^2 \iff x=i$ ou $-i$

$(-i)^2=i^2=-1$

$S_{\mathbb{R}}=\emptyset$ et $S_{\mathbb{C}}=\{-i;i\}$

Résoudre $x^2+4=0 \iff x^2=\underbrace{-4}_{-1\times 4}$

$\iff x^2=i^2.2^2 \iff x^2=(2i)^2 \iff x=2i$ ou $-2i$

$S_{\mathbb{R}}=\emptyset \quad S_{\mathbb{C}}=\{-2i;2i\}$

Résoudre $x^2+2x+5=0$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times5=4-20=-16<0$ pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Rappel : $\Delta>0$ $\begin{cases} x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$

$\Delta=i^2.4^2=(4i)^2$

Une racine carrée de Δ dans $\mathbb{C}$ est donc $4i$

On obtient : $x_1=\dfrac{-2-4i}{2}=\dfrac{\cancel{2}(-1-2i)}{\cancel{2}}=-1-2i$ et $x_2=-1+2i$ $S_{\mathbb{C}}=\{-1-2i;-1+2i\}$

Notes Résoudre $x^2+1=0$

Page 4 chapitre 2

Résoudre $x^2+4=0$

Résoudre $x^2+2x+5=0$ $a=1$ $b=2$ $c=5$

$\Delta>0$
$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta=b^2-4ac=4-4(1)(5)=4-20=-16=i^2.4^2=(4i)^2$

Les solutions : $\begin{cases} x_1=\frac{-2+i4}{2}=\frac{2(-1+2i)}{2}=-1+2i \\ x_2=\frac{-2-i4}{2}=\frac{2(-1-2i)}{2}=-1-2i \end{cases}$

$S_{\mathbb{R}}=\emptyset$

$S_{\mathbb{C}}=\{-1+2i\,;-1-2i\}$

- Notations MATHS - $i^2=-1$.

$\mathbb{C}=\{z=a+ib\ ;\ a,b\in\mathbb{R}\}$

NOTATIONS GEII

$\mathbb{C}=\{\underline{z}=a+jb\,;\,a,b\in\mathbb{R}\}$ ici $j^2=-1$

Ensemble des nombres entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots ; n ; \ldots\}$

Ensemble des nombres entiers relatifs :
$\mathbb{Z} = \{\ldots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots ; k ; \ldots\}$

Ensembles des nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} ; a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$

Ensembles des nombres réels : $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \underbrace{\{\sqrt{2} ; e ; \pi ; \ldots ; x ; \ldots\}}_{\text{nombres irrationnels}}$

Ensemble des nombres complexes :
$\mathbb{C} = \{a + ib ; a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$

$\times i$

$i^2 = -1$

On appelle i le nombre imaginaire, défini par : $\boxed{i^2 = -1}$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$: $\mathbb{C} = \{z = a + ib ; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$

Dans cet ensemble toute équation du second degré possède deux solutions.

En électricité la lettre i étant réservée à l'intensité d'un courant, nous la remplacerons par la lettre j.

Pour résoudre $az^2+bz+c=0$ avec $\Delta=b^2-4ac<0$, on a les solutions suivantes: $z_1=\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Notes

Simplifier dans $\mathbb{C}$:

$(3-4i).(1+i) = 3+\underbrace{3i-4i}-4\underbrace{i^2}_{-1} = 3-i+4 = 7-i$

$1+i+i^2+i^3 = 1+i-1-i = 0$

$\boxed{i^2=-1}$ $\quad i^3 = i \times i^2 = -i$

$\underbrace{(1+2i)^2}+(2-i)^2 = 1^2+4i+\overset{-4}{(2i)^2}+4-4i+\overset{-1}{i^2} = 0$

$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$

$(3-4i).(3+4i) = 3^2-(4i)^2 = 3^2-(-16) = 9+16 = 25.$

$(A-B)(A+B) = A^2-B^2.$

$z = \dfrac{2+i}{3-4i} = \underbrace{\dfrac{2+i}{3-4i} \times \dfrac{3+4i}{3+4i}} = \dfrac{6+8i+3i-4}{3^2+4^2} = \dfrac{2+11i}{25} = \dfrac{2}{25} + \dfrac{11}{25}i$

$a+ib$

$\dfrac{2}{25}$: partie réelle de z

$\dfrac{11}{25}$: partie imaginaire

Notations Maths

$z = a+ib$ où $i^2=-1$

$a,b \in \mathbb{R}$

Notations du GEII.

$Z = a+jb$ où $j^2=-1$

$a,b \in \mathbb{R}$

II. Définitions et notations du GEII

Page 7 chapitre 2

- ✓ **Tout nombre complexe $\underline{Z}$ s'écrit de la forme :**

$$\underline{Z} = x + j.y \quad \text{où} \quad x \in \mathbb{R}\ ,\ y \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ j^2 = -1$$

x est la partie réelle de $\underline{Z}$
On note : $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$
On note : $y = \mathrm{Im}(\underline{Z})$

Page 6 chapitre 2

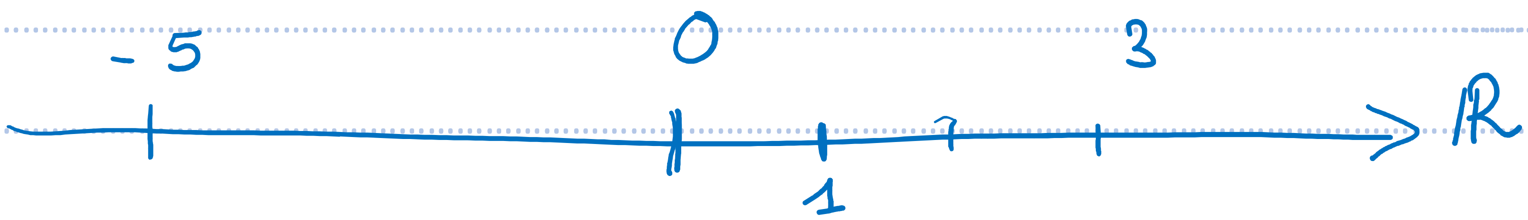
Notes

$z_1 = 3+5j \qquad Re(z_1) = 3 \qquad Im(z_1) = 5$

$z_2 = 5 \qquad Re(z_2) = 5 \qquad Im(z_2) = 0$

$z_3 = j-1 \qquad Re(z_3) = -1 \qquad Re(z_3) = 1$

$z_4 = -3j \qquad Re(z_4) = 0 \qquad Re(z_4) = -3$



Page 6 chapitre 2

Notes

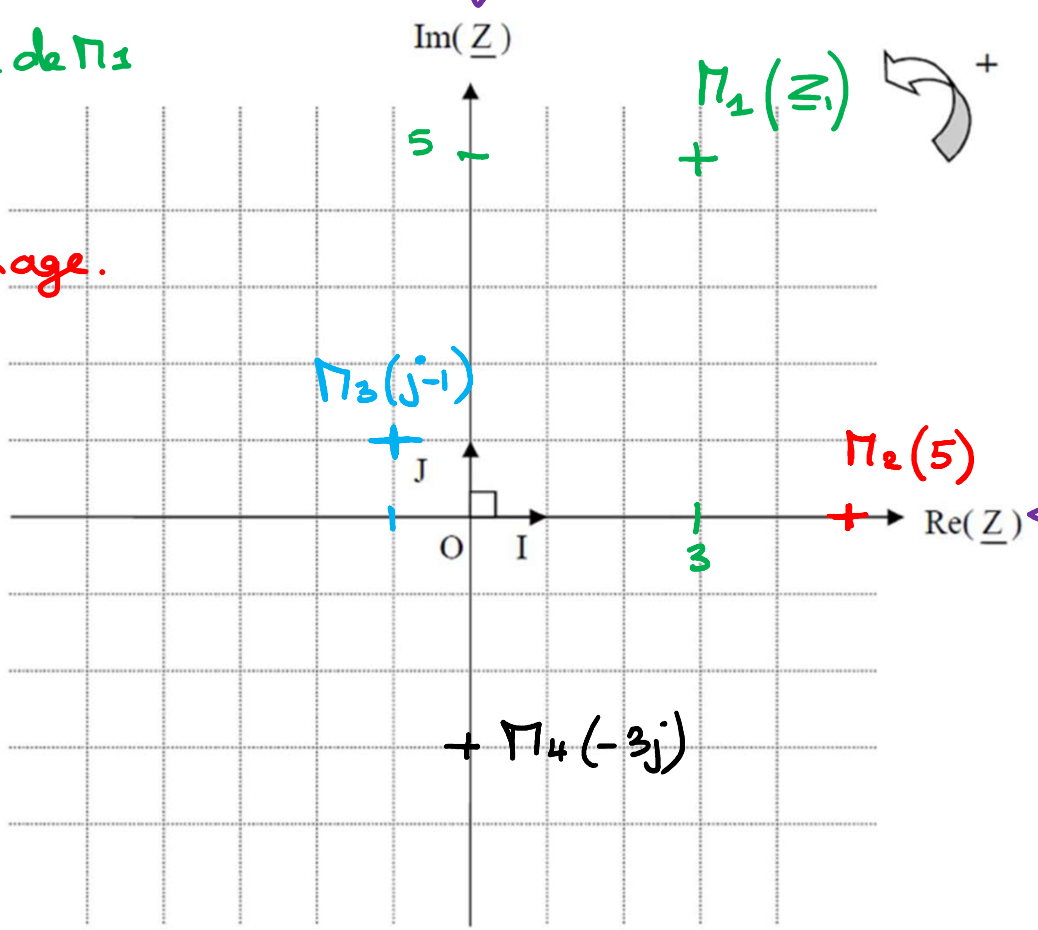
$Z_1 = 3+5j$ est l'affixe de M_1

$Z_2 = 5$. M_2 est son image.

$Z_3 = j-1$

$Z_4 = -3j$

axe des imaginaires purs.



axe des réels

Page 7 chapitre 2

II. Définitions et notations du GEII

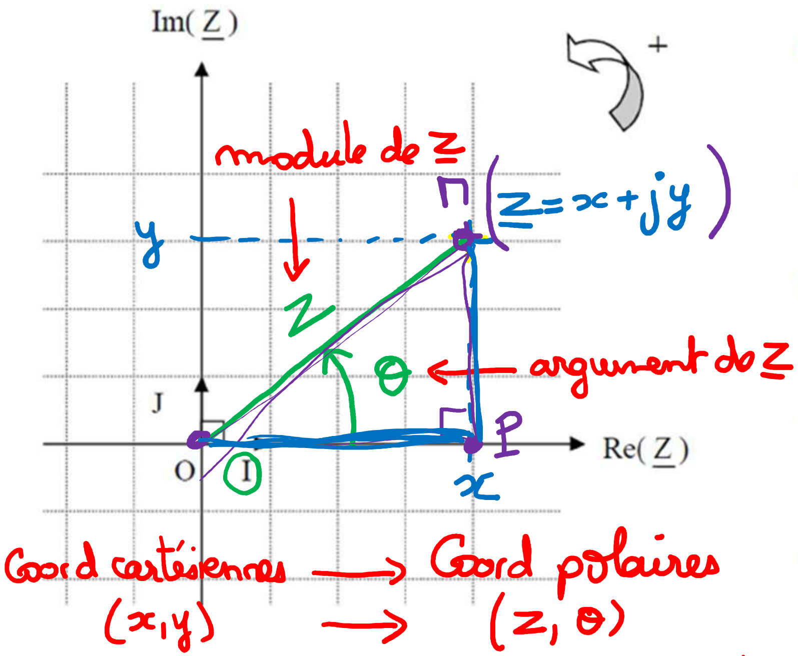
- ✓ **Tout nombre complexe $\underline{Z}$ s'écrit de la forme :**

$$\underline{Z} = x + j.y \quad \text{où } x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \text{ et } j^2 = -1$$

x est la partie réelle de $\underline{Z}$
On note : $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$
On note : $y = \mathrm{Im}(\underline{Z})$

- ✓ **Le plan complexe : On représente un nombre réel sur une droite munie d'un repère $\left(O, \vec{OI}\right)$. Tout nombre complexe $\underline{Z} = x + j.y$ (où $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) est représenté dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{OI}, \vec{OJ}\right)$ par le point M d'abscisse $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$ et d'ordonnée $y = \mathrm{Im}(\underline{Z})$**
Le point M(x,y) est appelé image de $\underline{Z}$.
$\underline{Z}$ est appelé l'affixe du point M.
$\underline{Z}$ est aussi appelé l'affixe du vecteur $\vec{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$



Calcul de $\underline{\underline{OM}}$: Pythagore : $OM^2 = OP^2 + PM^2$

$Z^2 = x^2 + y^2$

module de Z : $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Page 7 chapitre 2

Soit θ, la mesure de l'angle de vecteur orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$

$$\cos(\theta) = \frac{Adj}{Hyp} = \frac{OP}{OM} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{Z} = \frac{Re(\underline{Z})}{Z}$$

$$\sin(\theta) = \frac{Opp}{Hyp} = \frac{PM}{OM} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{Z} = \frac{Im(\underline{Z})}{Z}$$

GEII MATHS

- ✓ **Le module de $\underline{Z}$ est noté Z ou encore $|\underline{Z}|$, c'est la distance de O à M, ainsi :**
  $|\underline{Z}| = Z = \sqrt{x^2 + y^2}$

- ✓ **L'argument de $\underline{Z}$ est noté $\arg(\underline{Z})$, c'est la mesure en radians de l'angle de vecteur orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$, déterminée à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$). On note $\theta = \arg(\underline{Z})$,**

on a alors : $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{Z} = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{Re(\underline{Z})}{Z} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{Z} = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{Im(\underline{Z})}{Z} \end{cases}$ **si $Z \neq 0$.**

Page 7&8 chapitre 2

$$\textbf{on a alors :} \begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{Z} = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{\mathrm{Re}(\underline{Z})}{Z} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{Z} = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{\mathrm{Im}(\underline{Z})}{Z} \end{cases} \quad \text{si } Z \neq 0.$$

<u>Remarques</u> : 1. si Z=0, alors M=O, l'origine du repère, O, ne possède pas d'argument.

2. sinon, on a alors : x = ……………… et y =………………………

3. (x,y) sont appelées « <u>coordonnées cartésiennes</u> » du point M, image du nombre complexe $\underline{Z} = x + j.y$ et ($|\underline{Z}|$, θ) sont appelées « <u>les coordonnées polaires</u> » du point M.

Notes

Page 9 chapitre 2

<u>Forme algébrique</u> de $\underline{Z}$: (coordonnées cartésiennes)

$\underline{Z} = x + j.y$

<u>Forme trigonométrique</u> de $\underline{Z}$: (coordonnées polaires)

$\underline{Z} = Z.\cos(\theta) + j.Z.\sin(\theta) = Z.(\cos(\theta) + j.\sin(\theta))$ **aussi noté :** $\underline{Z} = [Z, \theta]$

<u>Forme exponentielle, géométrique ou polaire</u> : Euler a noté $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j.\sin(\theta)$

$\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$

Voir page 19

écriture cartésienne.

* $z_1 = -1 - j$ $\quad Re(z_1) = -1 \quad Im(z_1) = -1$

<0

module de z_1 = $Z_1 = |-1-j| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

argument de z_1 = $\arg(z_1) = \arctan\left(\frac{Im(z_1)}{Re(z_1)}\right) \pm \pi = \arctan(1) - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = \frac{3\pi}{4}$

écritures: $Z_1 = \sqrt{2} \cdot e^{-3j\pi/4}$ ← écriture exponentielle

$Z_1 = [\sqrt{2} ; -135°]$ car $-\frac{3\pi}{4} = -\frac{3 \times 180°}{4} = -135°$

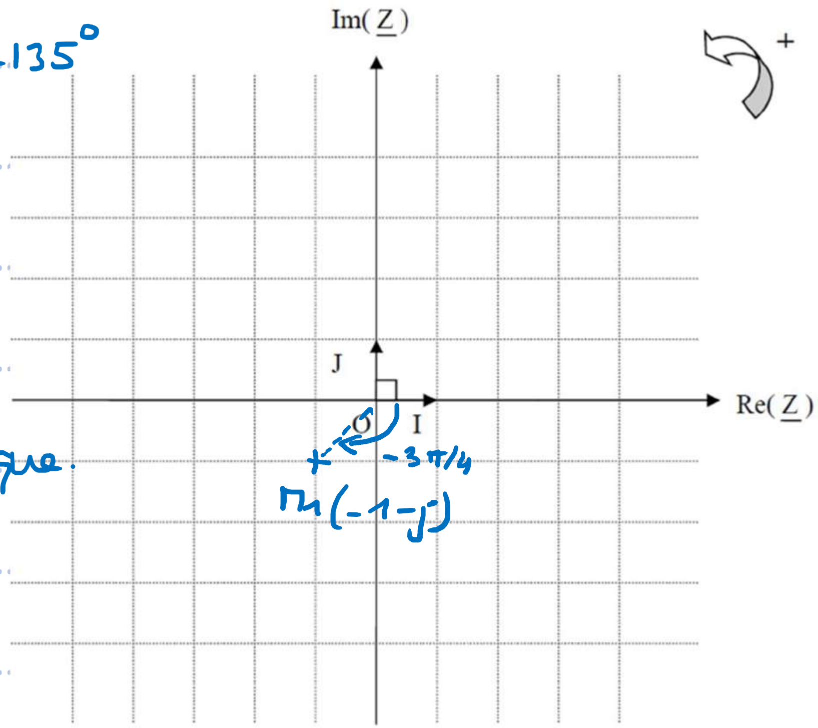
↑ écriture polaire

* $z_2 = 7 \cdot e^{j\pi/3}$ ← écriture exponentielle

$z_2 = [7 ; 60°]$ ← écriture polaire

$z_2 = 7 \cos\frac{\pi}{3} + j\, 7 \sin(\frac{\pi}{2})$ ← écriture trigonométrique.

$z_2 = \frac{7}{2} + j\, 7\frac{\sqrt{3}}{2}$ ← écriture cartésienne.

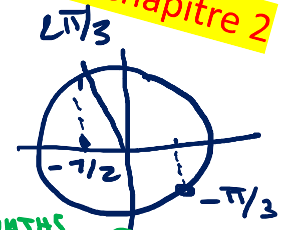


Exercice 5 Résolution d'équations du second degré :

Page 21 chapitre 2

Rappel : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$.
Pour résoudre l'équation $P(x) = 0$, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$, P possède deux racines réelles : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, P possède une racine réelle double : $x_1 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, P possède deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-b+j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$



MATHS GEII

$Z_2 = \overline{Z_1} = \bar{Z_1}$

$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

Résoudre l'équation $1 + z + z^2 = 0$ $\Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0$

z_1 et z_2 sont conjugués

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 < 0$:

$z_1 = \frac{-b+j\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-1+j\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_2 = \frac{-b-j\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-1-j\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$Re(z_1) = -\frac{1}{2}$ $Im(z_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\arg(z_1) = \theta$ tel que : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{Re(z_1)}{|z_1|} = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{Im(z_1)}{|z_1|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

on choisit $\arg(z_1) = \frac{2\pi}{3} \in]-\pi ; \pi]$

$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

Notes

Coord. Cartésiennes — Coord polaire

(x, y) — $(|z| \,;\, \arg(z))$, $\arg(z) = \theta$

Ecritures: Algébrique $z = x + iy = |z|\cos\theta + i\,|z|\sin\theta$

$i = j$: $\underline{Z} = x + jy$

trigonométrique: $z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) = |z|\, e^{i\theta}$ (exponentielle)

$\underline{Z} = Z(\cos\theta + j\sin\theta) = Z \cdot e^{j\theta} = [Z; \theta]$ (polaire)

(Z: module)

$* \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{x}{Z}$

$x = |z| \cdot \cos\theta$

$x = Z\cos\theta$

$* \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{y}{Z}$

$y = |z| \cdot \sin\theta$

$y = Z\sin\theta$

EULER: $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

$\cos\theta + j\sin\theta = e^{j\theta}$

$\underline{Z} = x + jy$ $\quad$ Z (module de $\underline{Z}$) $= \sqrt{x^2 + y^2}$

Exple:

$Z_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ algébrique

$= 1 \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}}$ expo.

$= 1 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ trigo

$Z_1 = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right] = [1, 120°]$

Notes

Page 9 chapitre 2

Forme algébrique de $\underline{Z}$: (coordonnées cartésiennes)

$\underline{Z} = x + j.y$

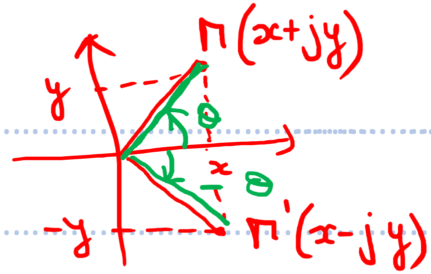
Forme trigonométrique de $\underline{Z}$: (coordonnées polaires) $Z = \sqrt{x^2+y^2}$

$\underline{Z} = Z.\cos(\theta) + j.Z.\sin(\theta) = Z.(\cos(\theta) + j.\sin(\theta))$ aussi noté : $\underline{Z} = [Z, \theta]$ ← mrk.

Forme exponentielle / géométrique ~~ou polaire~~ : Euler a noté $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j.\sin(\theta)$

$\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$

Nbre conjugué de Z : $\underline{Z}^* = x - jy = Ze^{-j\theta} = [Z, -\theta]$



Forme algébrique de $\underline{Z}$: (coordonnées cartésiennes)

$$\underline{Z} = x + j.y$$

Forme trigonométrique de $\underline{Z}$: (coordonnées polaires)

$Z = \sqrt{x^2+y^2}$

$\cos\theta = \frac{x}{Z}$, $\sin\theta = \frac{y}{Z}$ $\Leftrightarrow$ $x = Z\cos\theta$, $y = Z\sin\theta$

Page 9 chapitre 2

$$\underline{Z} = Z.\cos(\theta) + j.Z.\sin(\theta) = \underline{Z}.(\cos(\theta) + j.\sin(\theta))$$ aussi noté : $\boxed{\underline{Z} = [Z, \theta]}$

"polaire" Pr. K.

Forme exponentielle, ~~géométrique ou polaire~~ : Euler a noté $\boxed{e^{j\theta} = \cos(\theta) + j.\sin(\theta)}$

$$\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$$

Nombre complexe conjugué de $\underline{Z}$: Soit $\underline{Z} = x + j.y$, on appelle conjugué de $\underline{Z}$, et on note $\underline{Z}^*$, le nombre complexe défini par : $\underline{Z}^* = x - j.y$. Si $\underline{Z} = \underline{Z}.e^{j.\theta}$, alors $\underline{Z}^* = \underline{Z}.e^{-j\theta}$

$$\frac{Ze^{j\theta}}{Z'e^{j\theta'}} = \frac{Z}{Z'}.e^{j(\theta-\theta')}$$

$$\underline{Z}.\underline{Z}' = Z(\cos\theta + j\sin\theta) \times Z'(\cos\theta' + j\sin\theta')$$

$$Ze^{j\theta} \times Z'e^{j\theta'} = ZZ'(\cos\theta\cos\theta' + j\cos\theta\sin\theta' + j\sin\theta\cos\theta' + \underbrace{j^2}_{-1}\sin\theta\sin\theta')$$

$$ZZ'.e^{j\theta+j\theta'} = ZZ'(\underbrace{\cos\theta.\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'}) + jZZ'(\underbrace{\cos\theta.\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'})$$

$$ZZ'.e^{j(\theta+\theta')} = ZZ'\cos(\theta+\theta') + jZZ'\sin(\theta+\theta')$$

$$\underline{Z}\underline{Z}' = ZZ'(\cos(\theta+\theta') + j\sin(\theta+\theta'))$$

$$e^a \times e^b = e^{a+b}$$

module du produit

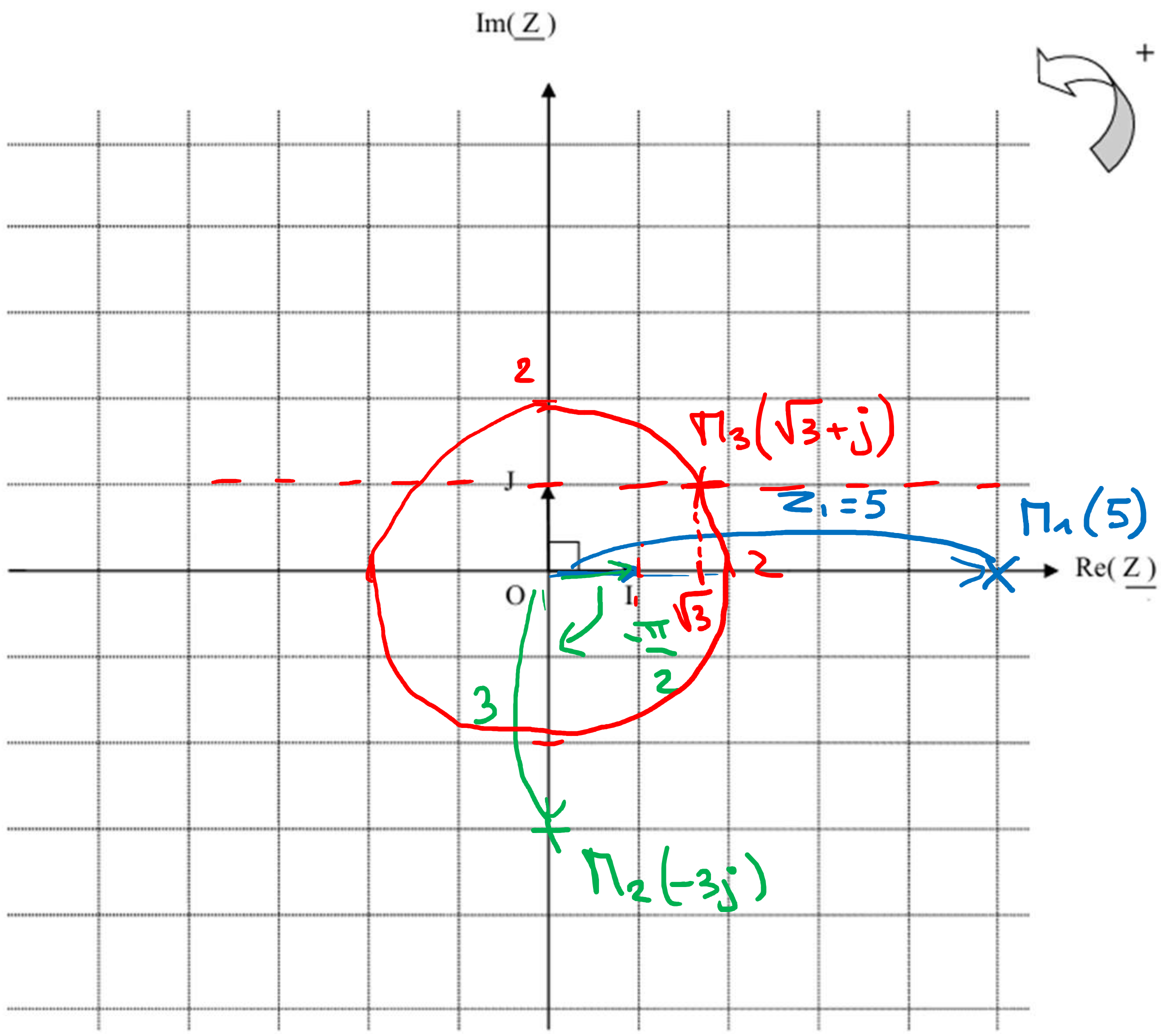
argument du produit

$\underline{Z}=x+jy$ $\underline{Z}=Z.e^{j\theta}$ $\underline{Z}=[Z,\theta]$	$Re(\underline{Z})=x$ $Re(\underline{Z})=Z.\cos\theta$	$Im(\underline{Z})=y$ $Im(\underline{Z})=Z.\sin\theta$	$\lvert\underline{Z}\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$ $\lvert\underline{Z}\rvert=Z$	$Arg(\underline{Z})=\theta$	Ecriture exponentielle ou algébrique	Conjugué : $\underline{Z}^*=x-jy$ $\underline{Z}^*=Z.e^{-j\theta}$ $\underline{Z}^*=[Z,-\theta]$
$\underline{Z_1}=5$ alg.	5	0	$Z_1=\sqrt{5^2+0^2}$ 5	$\cos\theta=\frac{5}{5}=1$ $\sin\theta=\frac{0}{5}=0$ $\theta=0$	$5.e^{j.0}$	$\underline{Z}_1^*=5=5e^{-j0}=[5,0]$
$\underline{Z_2}=-3j$	0	-3	$Z_2=\sqrt{3^2+0^2}$ 3	$\cos\theta=\frac{0}{3}=0$ $\sin\theta=\frac{-3}{3}=-1$ $-\pi/2$	$3e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$\underline{Z}_2^*=3j=3.e^{j\frac{\pi}{2}}=[3,90°]$
$\underline{Z_3}=\sqrt{3}+j$	$\sqrt{3}$	1	$Z_3=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}$ 2	$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\theta=\frac{1}{2}$ $\pi/6$	$2.e^{j\frac{\pi}{6}}$	$\underline{Z}_3^*=\sqrt{3}-j=2e^{-j\frac{\pi}{6}}=[2,-30°]$
$\underline{Z_4}=\sqrt{3}-j$	$\sqrt{3}$	-1	2	$-\pi/6$	$2.e^{-j\pi/6}$	$\underline{Z}_4^*=\sqrt{3}+j=2e^{j\pi/6}=[2,30°]$

page 11, 12, 13.

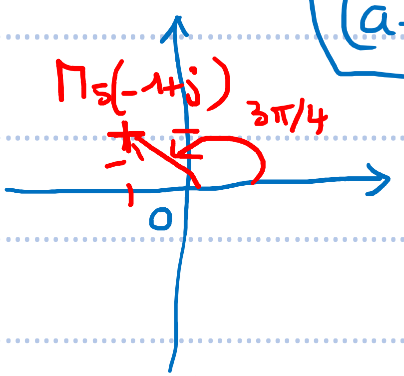
$\sqrt{(0)^2+(\sqrt{3})^2}$

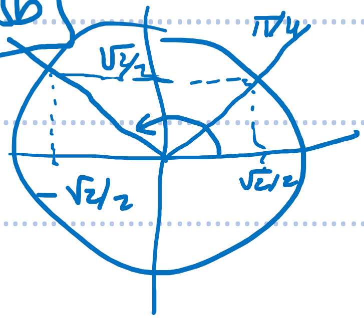
Notes



$\underline{Z}_5 = -1+j$	-1	1	$\sqrt{2}$	$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $3\pi/4$	$\sqrt{2}e^{j3\pi/4}$	$\underline{Z}_5^* = -1-j = \sqrt{2}e^{-3j\pi/4} = [\sqrt{2}, -135°]$
$\underline{Z}_6 = -4-4j\sqrt{3}$	$-4 < 0$	$-4\sqrt{3}$	$\sqrt{16+16\times 3}$, $\sqrt{64} = 8$	$\arctan\left(\frac{4\sqrt{3}}{4}\right) + \pi$ $-\pi$; $\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$	$8e^{-2j\pi/3}$	$\underline{Z}_6^* = -4+4j\sqrt{3} = 8e^{j\frac{2\pi}{3}} = [8;\ 120]$
$\underline{Z}_7 = 1e^{j\frac{\pi}{2}}$	$Z.\cos\theta$; $1.\cos\frac{\pi}{2} = 0$	$Z\sin\theta$; $1.\sin\frac{\pi}{2} = 1$	1	$\pi/2$	j	$-j = [1, -90] = e^{-j\pi/2}$
$\underline{Z}_8 = e^{j\pi}$	$1.\cos\pi = -1$	$1.\sin\pi = 0$	1	π	-1	$\underline{Z}_8^* = -1 = e^{-j\pi} = [1; -180]$
$\underline{Z}_9 = e^{2j\pi}$	$1.\cos 2\pi = 1$	$1.\sin 2\pi = 0$	1	2π	1	$\underline{Z}_9^* = 1 = e^{-2j\pi} = [1, -360]$

$$\boxed{(a+jb)^* = a-jb}$$





$$\frac{3\times 180}{4} = 3\times 45 = 135$$

$$\boxed{e^{-3j\pi/4} = e^{-j\frac{3\pi}{4}}} = \cancel{e^{j\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}}$$

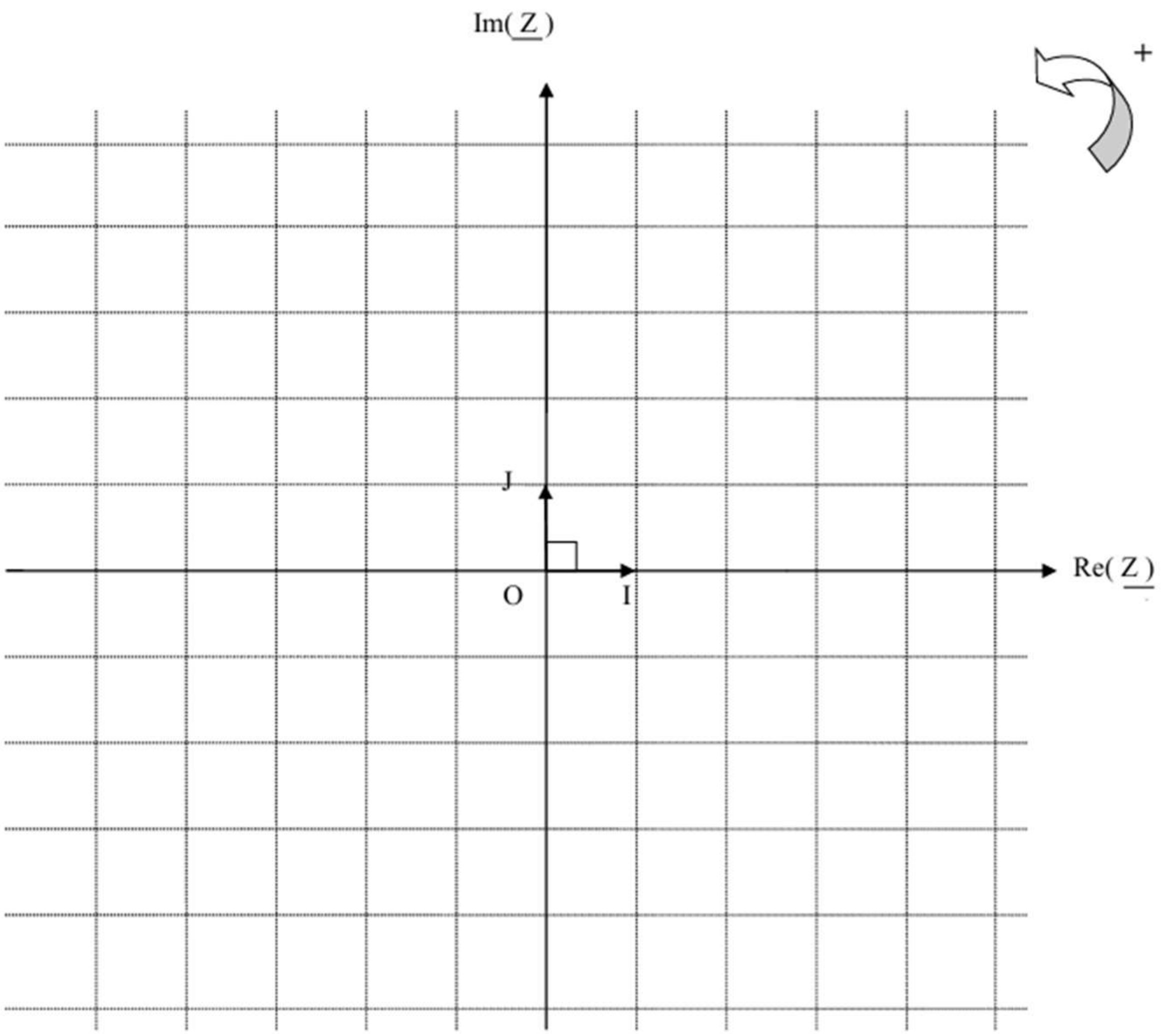
$$x^2 3 - x4 + 12 = 0$$

$$3x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$-\frac{2\pi}{3} = -\frac{2\times 180}{3} = -2\times 60 = -120$$

Page 13 chapitre 2

Notes

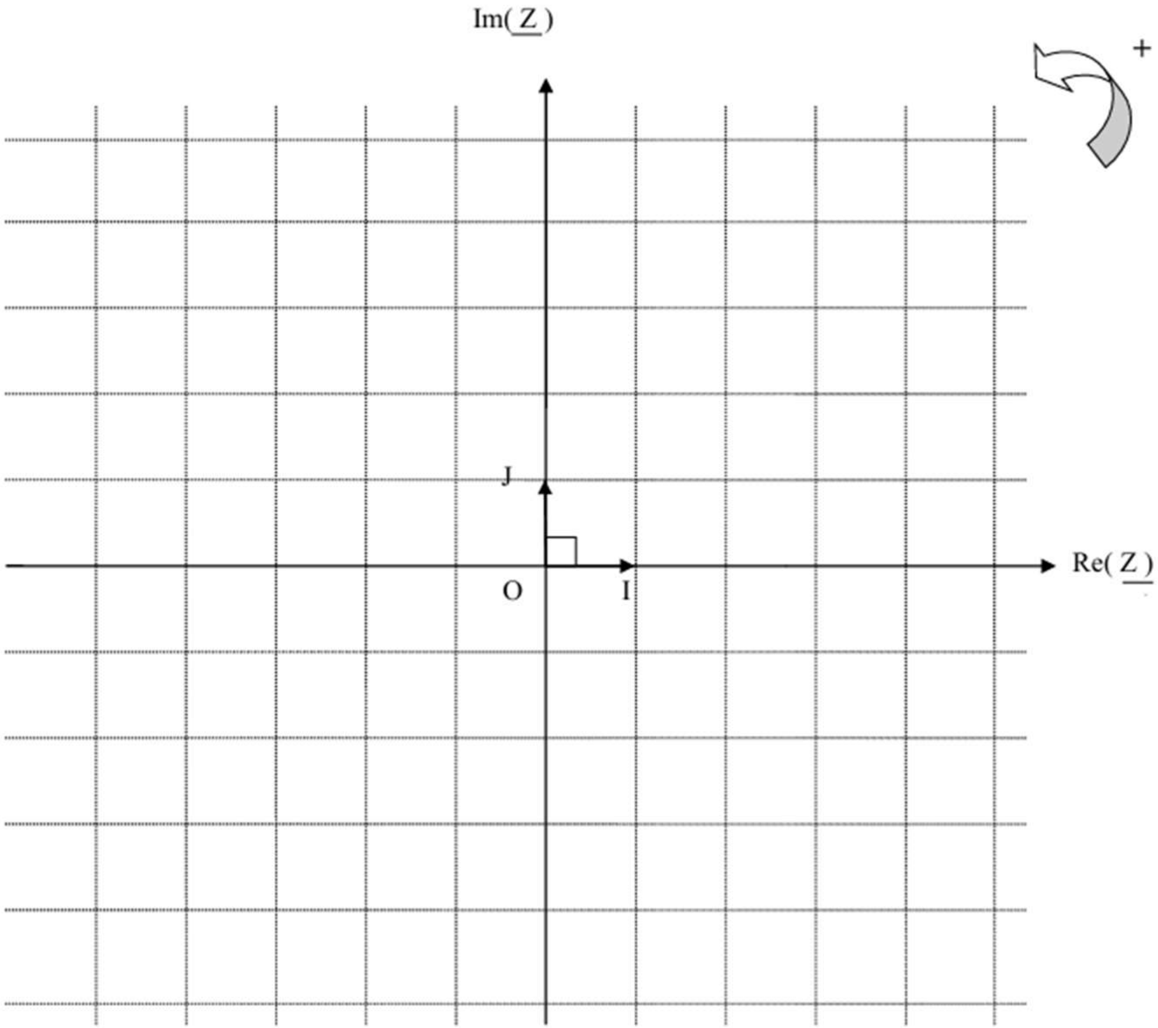


$Z_{10} = [7, -\frac{\pi}{3}]$	$7.\cos(-\pi/3)$ $7 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$	$7.\sin(-\pi/3)$ $-\frac{7\sqrt{3}}{2}$	7	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{7}{2} - j\frac{7\sqrt{3}}{2}$ $7e^{-j\pi/3}$	$Z_{10}^* = \frac{7}{2} + j\frac{7\sqrt{3}}{2} = 7.e^{j\pi/3}$ $= [7, 60°]$
$Z_{11} = e^{kj\pi}$; $k \epsilon \mathbb{Z}$	$1.\cos(k\pi)$ $(-1)^k$	$1.\sin(k\pi)$ 0	1	$k\pi$	$(-1)^k$	$Z_{11}^* = (-1)^k = e^{-jk\pi} = [1, -180k]$

Notes :

$$\cos(k\pi) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ -1 & k=1 \\ 1 & k=2 \\ -1 & k=3 \\ 1 & k=4 \\ \vdots \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ si } k \text{ est pair} \\ -1 \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases} = (-1)^k$$

Notes



Suite de la p.8

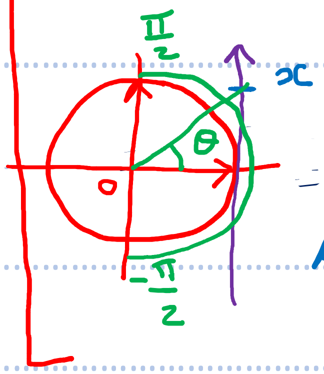
Page 8&14 chapitre 2

$\arctan\left(\frac{Im(Z_4)}{Re(Z_4)}\right)$

Notes $Z_4 = 3+5j \qquad |Z_4| = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$.

$\theta = \arg(Z_4)$ est tel que $\begin{cases} \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{34}} \\ \sin\theta = \frac{5}{\sqrt{34}} \end{cases}$ θ? $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{5}{\cancel{\sqrt{34}}}}{\frac{3}{\cancel{\sqrt{34}}}} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \theta = \arctan\left(\frac{5}{3}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle arctangente de x, et on note $\arctan(x)$, l'unique angle $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\theta = x$. On note alors : $\mathrm{Arctan}(x) = \theta \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

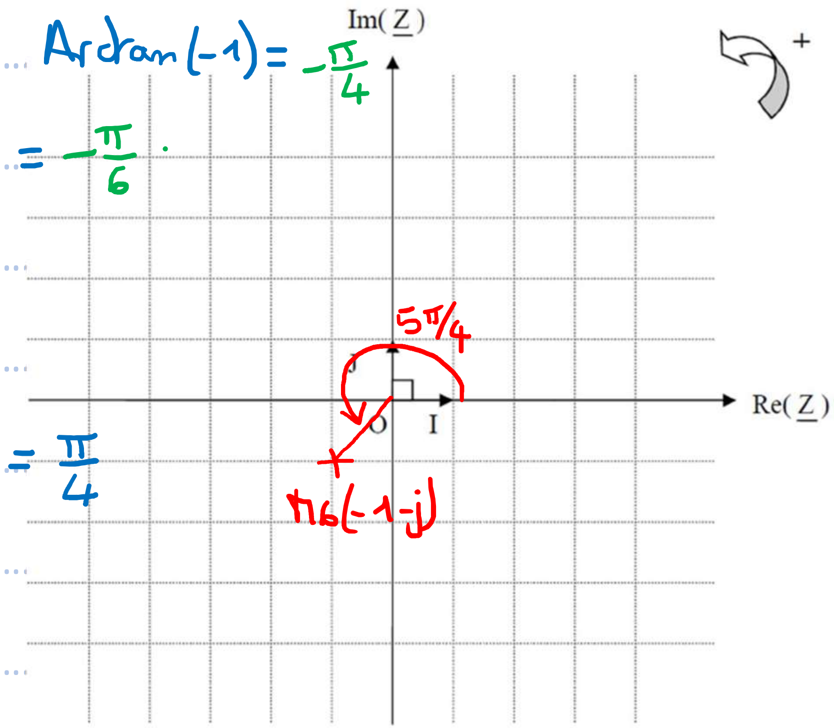


$\mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ $\qquad \mathrm{Arctan}(0) = 0 \qquad \mathrm{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

$\mathrm{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ $\qquad \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$ $\qquad \mathrm{Arctan}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

$Z_6 = -1-j \qquad |Z_6| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\arg(Z_6) = \arctan\left(\frac{Im(Z_6)}{Re(Z_6)}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$



Notes

Partie C : Opérations sur les module et arguments d'un nombre complexe

Page 15 chapitre 2

I. Argument d'un nombre complexe et arctangente

Comment obtenir θ l'argument d'un nombre complexe, lorsqu'il n'est pas remarquable ?

Soit $\underline{Z} = a + j.b$ un nombre complexe non nul et $a \neq 0$.

Pour déterminer un argument de $\underline{Z}$, on calcule

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Si θ n'est pas un angle remarquable, alors on calcule : $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{b}{a}$.

On peut alors en déduire θ, en utilisant la fonction Arctangente, mais en faisant très attention, car $\text{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$!!! En effet, lorsque la partie réelle de $\underline{Z}$ est négative, la mesure principale de son argument θ n'est pas dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, pour obtenir le bon résultat, il suffit donc d'ajouter ou de soustraire π à $\text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$

A retenir

Soit $\underline{Z} = a + j.b$ un nombre complexe non nul, tel que $a \neq 0$.

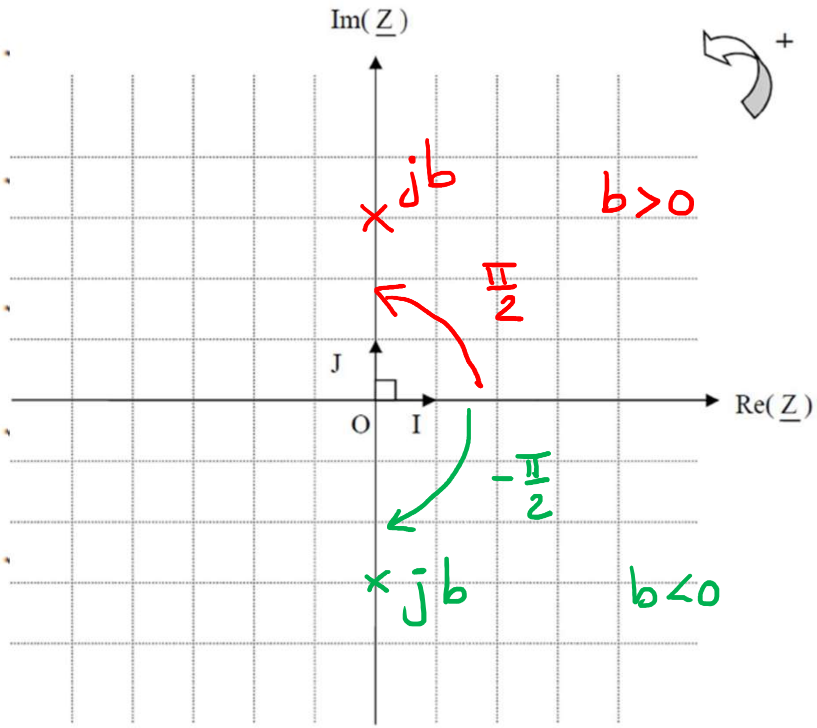
$$\arg(\underline{Z}) = \begin{cases} \text{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right) \text{ si } a > 0 \\ \text{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right) \pm \pi \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Page 15 chapitre 2

Remarque : Que se passe-t-il si a = 0 ?

alors $\underline{Z} = jb$ $\arg(\underline{Z}) = \cancel{\arctan\left(\frac{b}{0}\right)}$

$$\arg(jb) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } b < 0 \end{cases}$$



Exercice 1

Page 21 chapitre 2

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$\underline{Z}_1 = 4 + 3j$; $\underline{Z}_2 = -5 + 3j$; $\underline{Z}_3 = \sqrt{7} - j\sqrt{2}$

<0

* $\underline{Z}_1 = 4 + 3j$

$Z_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$\arg(\underline{Z}_1) = \arctan\left(\frac{Im(\underline{Z}_1)}{Re(\underline{Z}_1)}\right) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$

* $\underline{Z}_2 = -5 + 3j$

$Z_2 = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$\arg(\underline{Z}_2) = \arctan\left(\frac{3}{-5}\right) + \pi$ car $Re(\underline{Z}_2) = -5 < 0$

arctan est impaire car $\arctan(-x) = -\arctan x$

$\arg(\underline{Z}_2) = \pi - \arctan\left(\frac{3}{5}\right)$

* $\underline{Z}_3 = \sqrt{7} - j\sqrt{2}$

$Z_3 = \sqrt{7 + 2} = \sqrt{9} = 3$

$\arg(\underline{Z}_3) = \arctan\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$

$= -\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\right)$

$\arg(\underline{Z}_3) = -\arctan\left(\frac{\sqrt{14}}{7}\right)$

2) Produit de deux nombres complexes (Comme $\boxed{e^{a}.e^{b} = e^{a+b}}$ il est préférable d'utiliser l'écriture exponentielle/polaire le plus possible) Page 16 chapitre 2

$$\underline{Z}.\underline{Z'} = Ze^{j.\theta}.Z'e^{j.\theta'} = \underbrace{Z.Z'}_{\text{module}}e^{j\overbrace{(\theta+\theta')}^{\text{argument}}}$$ on en déduit que :

module argument .

$\arg(\underline{Z}.\underline{Z'}) = \arg(\underline{Z}) + \arg(\underline{Z'}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et $|\underline{Z}.\underline{Z'}| = |\underline{Z}|.|\underline{Z'}|$

$[Z,\theta] \times [Z',\theta'] = [ZZ',\theta+\theta']$ $\quad \arg(\underline{Z_4}) = \frac{-\pi \times 2}{6\times 2} + \frac{\pi \times 12}{12} + \frac{\pi \times 3}{4 \times 3} = \frac{-2\pi + 12\pi + 3\pi}{12} = \frac{13\pi}{12}$.

Le module d'un produit de nombres complexes est le produit des modules, l'argument d'un produit de nombres complexes est la somme des arguments (à 2kπ près)

$* \ \underline{Z_4} = (-\sqrt{3}+j)(1+j)$ parenthèse

$Z_4 = |-\sqrt{3}+j| \times |1+j| = \sqrt{3+1} \times \sqrt{1+1} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

modules

$\arg(\underline{Z_4}) = \arg\left((-\sqrt{3}+j)(1+j)\right) = \arg(\underbrace{-\sqrt{3}}_{<0}+j) + \arg(1+j)$

$= \arctan\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) + \pi + \arctan(1) = -\frac{\pi}{6} + \pi + \frac{\pi}{4}$

Page 16 chapitre 2

3) Quotient (Rappel : $\boxed{\dfrac{e^{a}}{e^{b}} = e^{a-b}}$ on utilisera l'écriture exponentielle/polaire si possible)

$$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z'}} = \frac{Ze^{j.\theta}}{Z'e^{j.\theta'}} = \underbrace{\frac{Z}{Z'}}_{\text{module}} e^{j(\theta-\theta')} \leftarrow \text{argument}$$ on en déduit que :

$$\arg\left(\frac{\underline{Z}}{\underline{Z'}}\right) = \arg(\underline{Z}) - \arg(\underline{Z}') + 2k\pi \ , \ \mathbf{k} \in \mathbb{Z} \ , \text{et} \ \left|\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}'}\right| = \frac{|\underline{Z}|}{|\underline{Z}'|}$$

$$* \ \underline{Z}_5 = \frac{-\sqrt{3}+j}{1+j}$$

$$\frac{[Z,\theta]}{[Z',\theta']} = [\frac{Z}{Z'}, \theta - \theta']$$

$$Z_5 = \left|\frac{-\sqrt{3}+j}{1+j}\right| = \frac{|-\sqrt{3}+j|}{|1+j|} = \frac{\sqrt{3+1}}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

$\sqrt{2}\sqrt{2}$ $\quad \sqrt{2}^2$

Le module d'un quotient de nombres complexes est le quotient des modules, l'argument d'un quotient de nombres complexes est la soustraction des arguments (à 2kπ près)

$$\arg(\underline{Z}_5) = \arg\left(\frac{-\sqrt{3}+j}{1+j}\right) = \arg(\underbrace{-\sqrt{3}}_{<0}+j) - \arg(1+j) = \arctan\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right)+\pi - \arctan(1)$$

$$\arg(\underline{Z}_5) = -\frac{\pi}{6} + \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{-2\pi+12\pi-3\pi}{12} = 7\pi/12.$$

Notes

4) Puissances n$^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe (n est un entier naturel)

Rappel : $\left(e^{p}\right)^{n} = e^{p.n}$ et $(a.b)^n = a^n . b^n$)

$$\underline{Z}^{n} = \left(Ze^{j.\theta}\right)^{n} = Z^{n}.e^{n.j.\theta}$$ on en déduit que :

$\arg\left(\underline{Z}^{n}\right) = n \times \arg(\underline{Z}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et $\left|\underline{Z}^{n}\right| = \left|\underline{Z}\right|^{n}$

$[Z , \theta]^{n} = [\, Z^{n} , n.\theta]$

Le module de $\underline{Z}^n$ est le module de $\underline{Z}$ à la puissance n, l'argument de $\underline{Z}^n$ est n fois l'argument de $\underline{Z}$ (à 2kπ près)

II. Propriétés et Opérations sur les module et arguments

4) Puissances n^{ième} d'un nombre complexe (n est un entier naturel)

Page 17 chapitre 2

$$\arg\left(\underline{Z}^n\right) = n \times \arg(\underline{Z}) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{et} \quad \left|\underline{Z}^n\right| = \left|\underline{Z}\right|^n$$

Le module de $\underline{Z}^n$ est le module de $\underline{Z}$ à la puissance n, l'argument de $\underline{Z}^n$ est n fois l'argument de $\underline{Z}$ (à 2kπ près)

$* \ \underline{Z}_6 = (-\sqrt{3}+j)^{10}$

$Z_6 = \left|(-\sqrt{3}+j)^{10}\right| = \left|-\sqrt{3}+j\right|^{10} = \sqrt{\sqrt{3}^2+1}^{\,10} = 2^{10}$

$\arg(\underline{Z}_6) = \arg\left((-\sqrt{3}+j)^{10}\right) = 10 \times \arg(\underbrace{-\sqrt{3}}_{Z0}+j) = 10 \times \left(\arctan\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) + \pi\right)$

$= 10 \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \underbrace{10\pi}_{5 \text{ tours}} = -\frac{10\pi}{6} + \cancel{10\pi}$ à $2k\pi$ près $= -\frac{5\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{3}$ à $2k\pi$ près.

Page 16 chapitre 2

Cas particulier : (Rappel : $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$) $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z.e^{j.\theta}} = \frac{1}{Z}.e^{-j.\theta}$ avec $\underline{Z} \neq 0$. On en déduit que :

$\arg\left(\frac{1}{\underline{Z}}\right) = -\arg(\underline{Z}) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, et $\left|\frac{1}{\underline{Z}}\right| = \frac{1}{|\underline{Z}|}$ $\frac{1}{[Z,\theta]} = [\frac{1}{Z}, -\theta]$

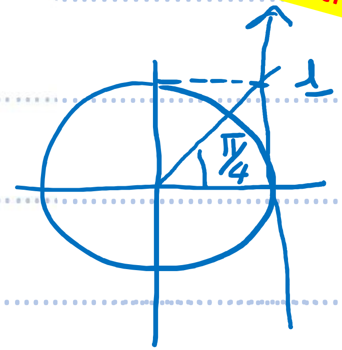
Le module de l'inverse d'un nombre complexe est l'inverse de son module, l'argument de l'inverse d'un nombre complexe est l'opposé de son argument (à 2kπ près)

Exercice 1

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

Page 21 chapitre 2

$$\underline{Z}_7 = \frac{1}{1+j}$$



$$Z_7 = \left|\frac{1}{1+j}\right| = \frac{1}{|1+j|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\arg(\underline{Z}_7) = \arg\left(\frac{1}{1+j}\right) = -\arg(1+j) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$$

Exercice 2

Page 21 chapitre 2

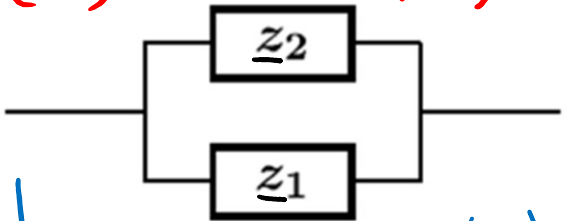
Soient les deux nombres complexes : $\underline{z}_1 = 2 - j3$ et $\underline{z}_2 = 5 + j$.

Calculer l'argument du nombre complexe $\underline{z}$ défini par : $\dfrac{1}{\underline{z}} = \dfrac{1}{\underline{z}_1} + \dfrac{1}{\underline{z}_2}$. Ce calcul correspond au calcul de l'impédance équivalente de deux impédances $\underline{z}_1$ et $\underline{z}_2$ montées en parallèle.

$\arg(\underline{z}) = -\arctan\left(\frac{3}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{2}{7}\right)$

$z = \dfrac{13\sqrt{2}}{\sqrt{53}} \times \dfrac{\sqrt{53}}{\sqrt{53}} = \dfrac{13\sqrt{106}}{53}$

$\sqrt{13}\sqrt{26} = \sqrt{13}\sqrt{2\times 13}$
$= \sqrt{13}\sqrt{2}\sqrt{13}$
$= \sqrt{13}^2\sqrt{2}$
$= 13\sqrt{2}.$



$\dfrac{1}{\underline{z}} = \dfrac{1}{\underline{z}_1} + \dfrac{1}{\underline{z}_2}$

$\dfrac{1}{\underline{z}} = \dfrac{\underline{z}_2 + \underline{z}_1}{\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2}$

$\underline{z} = \dfrac{\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2}{\underline{z}_1 + \underline{z}_2}$

$z = \left|\dfrac{\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2}{\underline{z}_1 + \underline{z}_2}\right|$

$= \dfrac{|\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2|}{|\underline{z}_1 + \underline{z}_2|}$

$= \dfrac{|\underline{z}_1| \cdot |\underline{z}_2|}{|\underline{z}_1 + \underline{z}_2|}$

$z = \sqrt{13} \cdot \sqrt{26} / \sqrt{53}$

$\arg(\underline{z}) = \arg\left(\dfrac{\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2}{\underline{z}_1 + \underline{z}_2}\right)$

$\arg(\underline{z}) = \arg(\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2) - \arg(\underline{z}_1 + \underline{z}_2)$

$= \arg(\underline{z}_1) + \arg(\underline{z}_2) - \arg(\underline{z}_1 + \underline{z}_2)$

$= \arg(2-3j) + \arg(5+j) - \arg(7-2j)$

$= \arctan\left(\frac{-3}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(-\frac{2}{7}\right)$

<u>Exercice 3</u> Dans les impédances suivantes R, L,C et ω sont des nombres réels strictement positifs ; déterminer leurs module et argument :

$\underline{Z}_1 = R + j.L.\omega$; $\underline{Z}_2 = \mathrm{R} + \dfrac{1}{\mathrm{j.C.\omega}}$; $\underline{Z}_3 = R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}$; $\underline{Z}_4 = \dfrac{\mathrm{jRL\omega}}{\mathrm{R+jL\omega}}$

Page 21 chapitre 2

$\underline{Z}_5 = \dfrac{(1+jx)^{10}}{(1-jx)^{6}}$ où x est un nombre réel.

* $\underline{Z}_1 = \underbrace{R}_{>0} + jL\omega$

$$Z_1 = \sqrt{R^2+(L\omega)^2} = \sqrt{R^2+L^2\omega^2}$$

$$\arg(\underline{Z}_1) = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

* $\underline{Z}_2 = R + \dfrac{1}{jC\omega}$

Méthode 1

$$\underline{Z}_2 = \frac{jRC\omega + 1}{jC\omega}$$

$$Z_2 = \left|\frac{1+jRC\omega}{jC\omega}\right| = \frac{|1+jRC\omega|}{|jC\omega|}$$

$$Z_2 = \frac{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}{\sqrt{(C\omega)^2}} = \frac{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}{\underbrace{C\omega}_{>0}}$$

Méthode 2

$$\underline{Z}_2 = R + \frac{1}{jC\omega} \times \frac{j}{j} = R - \frac{j}{C\omega} = R - j\frac{1}{C\omega}$$

$$R + \frac{j}{\underbrace{j^2}_{-1} C\omega}$$

$$Z_2 = \sqrt{R^2+\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{R^2+\frac{1}{C^2\omega^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{R^2C^2\omega^2+1}{C^2\omega^2}}$$

Notes

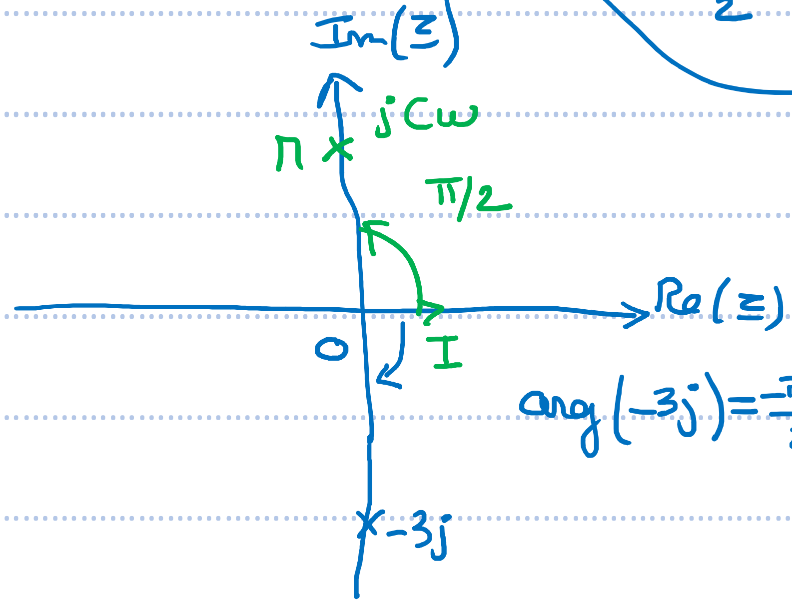
Page 21 chapitre 2

Méth 1

$$\arg(Z_2) = \arg\left(\frac{1+jRC\omega}{jC\omega}\right)$$

$$\arg(Z_2) = \arg(1+jRC\omega) - \arg(jC\omega)$$

$$\arg(Z_2) = \arctan(RC\omega) - \underbrace{\cancel{\arctan\left(\frac{C\omega}{0}\right)}}_{\frac{\pi}{2}}$$



$\arg(-3j) = -\frac{\pi}{2}$

Méth 2

$$\arg(Z_2) = \arg\left(R - j\frac{1}{C\omega}\right)$$

$$\arg(Z_2) = \arctan\left(\frac{-\frac{1}{C\omega}}{R}\right) = \arctan\left(-\frac{1}{RC\omega}\right)$$

$$\arg(Z_2) = -\arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$$

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Notes

$$\underline{Z}_3 = R + jL\omega + \frac{1 \times j}{jC\omega \times j} = \underbrace{R + jL\omega - \frac{j}{C\omega}}_{a+jb}$$

$$\underline{Z}_3 = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$Z_3 = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\arg(\underline{Z}_3) = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$$

$$\arg(\underline{Z}_3) = \arctan\left(\frac{\frac{LC\omega^2 - 1}{C\omega} \times C\omega}{R \times C\omega}\right)$$

$$\arg(\underline{Z}_3) = \arctan\left(\frac{LC\omega^2 - 1}{RC\omega}\right)$$

$$\underline{Z}_5 = \frac{(1+jx)^{10}}{(1-jx)^6} \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\cdot Z_5 = \frac{\sqrt{1+x^2}^{\,10}}{\sqrt{1+x^2}^{\,6}} = \sqrt{1+x^2}^{\,4} = (1+x^2)^2$$

$$10\arg(1+jx) - 6\arg(1-jx)$$

$$\cdot \arg(\underline{Z}_5) = 10\arctan\left(\frac{x}{1}\right) + 6\arctan(x) = 16\arctan x$$

$$* \quad \underline{Z}_4 = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega}$$

$$Z_4 = \left|\frac{jRL\omega}{R + jL\omega}\right| = \frac{|jRL\omega|}{|R + jL\omega|} = \frac{RL\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

$$\arg(\underline{Z}_4) = \arg(jRL\omega) - \arg(R + jL\omega)$$

$$\arg(\underline{Z}_4) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

Exercice 4 Soit $\underline{U} = \underline{I}\left(R - \frac{j}{C\omega}\right)$ l'expression complexe de la tension aux bornes de l'association en série comprenant une résistance R et un condensateur C. Déterminer le module et un argument de I, nombre complexe associé à l'intensité i du courant dans le circuit.

Page 21 chapitre 2

Notes

Page chapitre 2