Exercice 5 Résolution d'équations du second degré : MATHS $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$

Page 21 chapitre 2

Rappel : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$.

Pour résoudre l'équation $P(x) = 0$, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

$|a+jb| = \sqrt{a^2+b^2}$

- Si $\Delta > 0$, P possède deux racines réelles : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, P possède une racine réelle double : $x_1 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, P possède deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-b+j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Résoudre l'équation $1 + z + z^2 = 0$ $\Leftrightarrow z^2+z+1=0$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$

$\begin{cases} x_1 = \frac{-b+j\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-1+j\sqrt{3}}{2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{=a} + j\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{=b} \\ x_2 = \overline{x_1} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ MATHS

$S = \{-1/2 + j\sqrt{3}/2 \,;\, -1/2 - j\sqrt{3}/2\}$

$Re(x_1) = -\frac{1}{2}$ et $Im(x_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Module de $x_1 = |x_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

$\arg(x_1) = \theta$ tel que $\begin{cases} \cos\theta = \frac{Re(x_1)}{|x_1|} = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = Im(x_1)/|x_1| = \sqrt{3}/2. \end{cases}$ $\Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Notes

$$\text{donc}\begin{cases}|x_1| = 1\\ \arg(x_1) = \frac{2\pi}{3} \in \left]-\pi\,;\pi\right].\end{cases}$$

$\pi \longleftrightarrow 180°$

$$x_1 = \underbrace{-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\text{algébrique}} = \underbrace{1\,e^{j\frac{2\pi}{3}}}_{\text{exponentielle}} = \underbrace{\left[1\,;\frac{2\pi}{3}\right]}_{\text{Polaire}} = \left[1\,;120°\right]$$

NATHS $\overline{a+jb} = a-jb$

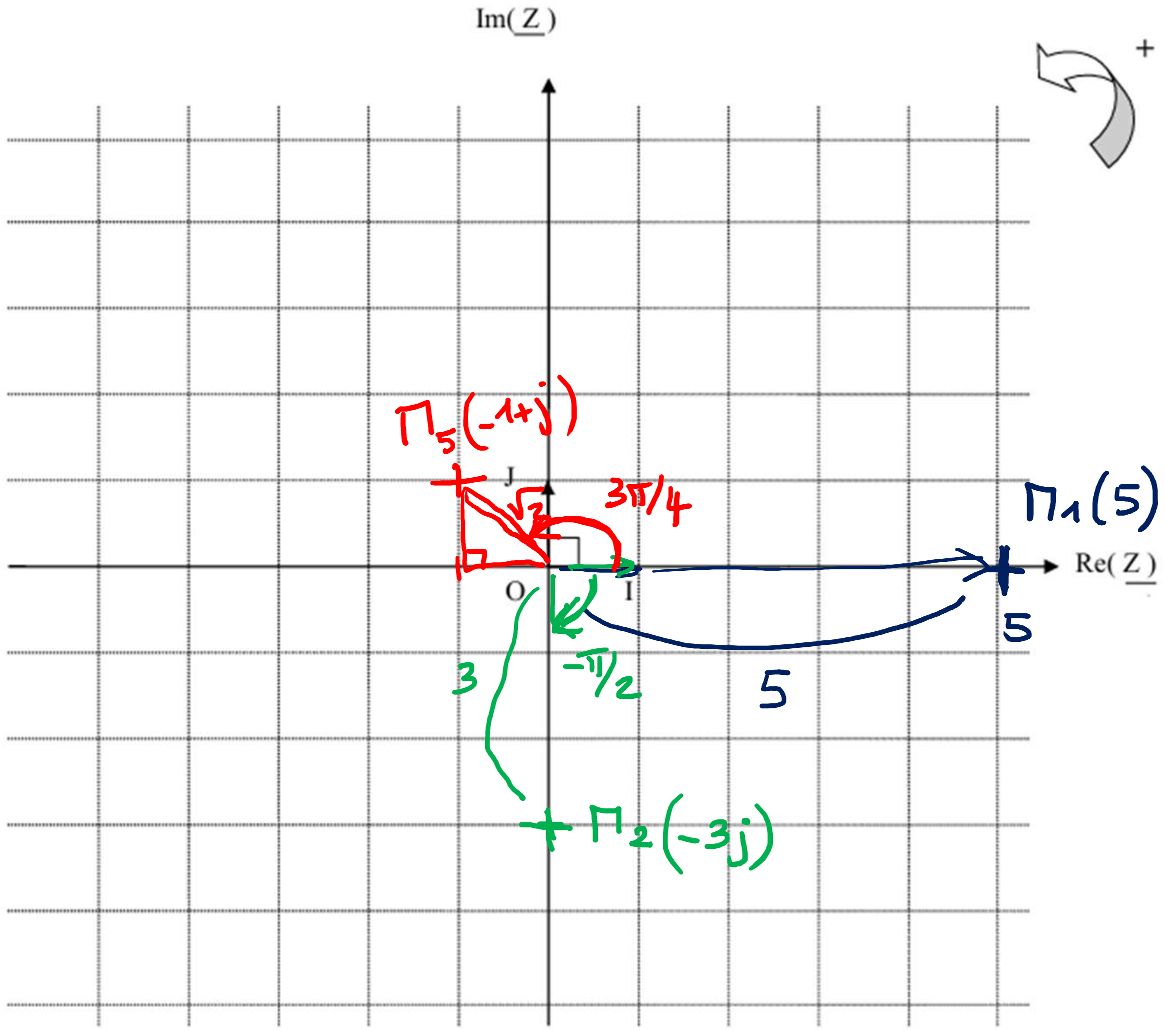
GEII $(a+jb)^* = a-jb$

Conjugué : $\overline{x_1} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = 1.e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \left[1\,;-\frac{2\pi}{3}\right] = \left[1\,,-120°\right]$

GEII $\left(Ze^{j\theta}\right)^* = Z.e^{-j\theta}$

$\underline{Z}=x+jy$ $\underline{Z}=Z.e^{j\theta}$ $\underline{Z}=[Z,\theta]$	$Re(\underline{Z})=x$ $Re(\underline{Z})=Z.\cos\theta$	$Im(\underline{Z})=y$ $Im(\underline{Z})=Z.\sin\theta$	$\lvert\underline{Z}\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$ $\lvert\underline{Z}\rvert=Z$	$Arg(\underline{Z})=\theta$	Ecriture exponentielle ou algébrique	Conjugué : $\underline{Z}^*=x-jy$ $\underline{Z}^*=Z.e^{-j\theta}$ $\underline{Z}^*=[Z,-\theta]$
$\underline{Z_1}=5$	5	0	$Z_1=\sqrt{5^2+0^2}$ $Z_1=5$	$\begin{cases}\cos\theta=1\\ \sin\theta=0\end{cases}$ 2π	$5e^{j2\pi}$	$\underline{Z}_1^*=5=5.e^{-j2\pi}=[5;-360°]$
$\underline{Z_2}=-3j$ $0-3j$	0	-3	$Z_2=\sqrt{3^2}=3$ 3	$\begin{cases}\cos\theta=0\\ \sin\theta=-1\end{cases}$ $-\pi/2$	$3e^{-j\pi/2}$	$\underline{Z}_2^*=3j=3e^{j\pi/2}=[3;90°]$
$\underline{Z_3}=\sqrt{3}+j$	$\sqrt{3}$	1	$Z_3=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}$ 2	$\begin{cases}\cos\theta=\sqrt{3}/2\\ \sin\theta=1/2\end{cases}$ $\pi/6$	$2.e^{j\pi/6}$	$\underline{Z}_3^*=\sqrt{3}-j=2e^{-j\pi/6}=[2;-30°]$
$\underline{Z_4}=\sqrt{3}-j$	$\sqrt{3}$	-1	2	$-\pi/6$	$2.e^{-j\pi/6}$	$\underline{Z}_4^*=\sqrt{3}+j=2e^{j\pi/6}=[2;30°]$

Notes



$Z_5 = -1+j$	-1	1	$Z_5 = \sqrt{1^2+1^2}$ $\sqrt{2}$	$\cos\theta = -1/\sqrt{2} = -\sqrt{2}/2$ $\sin\theta = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$ $3\pi/4$	$\sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}$	$Z_5^* = -1-j = \sqrt{2}.e^{-j\frac{3\pi}{4}} = [\sqrt{2}; -135$
$Z_6 = -4-4j\sqrt{3}$	-4	$-4\sqrt{3}$	$Z_6 = \sqrt{4^2+(4\sqrt{3})^2}$ 8	$\cos\theta = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $-2\pi/3$	$8.e^{-j\frac{2\pi}{3}}$	$Z_6^* = -4+4j\sqrt{3} = 8e^{j2\pi/3} = [8; 120°]$
$Z_7 = 1e^{j\frac{\pi}{2}}$	$1.\cos\frac{\pi}{2}$ 0	$1.\sin\pi/2$ 1	$Z_6 = 1$	$\pi/2$	$0+1.j$ j	$Z_7^* = -j = e^{-j\pi/2} = [1; -90°]$
$Z_8 = 1e^{j\pi}$	$1.\cos\pi$ -1	$1.\sin\pi$ 0	$Z_7 = 1$	π	-1	$Z_8^* = -1 = e^{-j\pi} = [1; -180°]$
$Z_9 = e^{2j\pi} = 1+j0$ $x+jy$	$1.\cos 2\pi$ 1	$1.\sin 2\pi$ 0	$Z_9 = 1$	2π	1	$Z_9^* = 1 = e^{-2j\pi} = [1; -360°]$

$\sqrt{16+48} = \sqrt{64}$

$\frac{3\times180}{4} = \frac{3\times90}{2} = 3\times45 =$

$\frac{2\times180}{3} =$