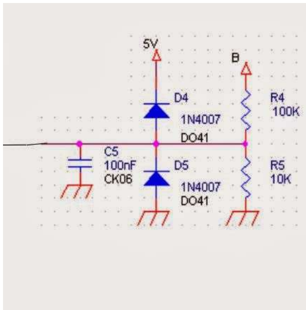
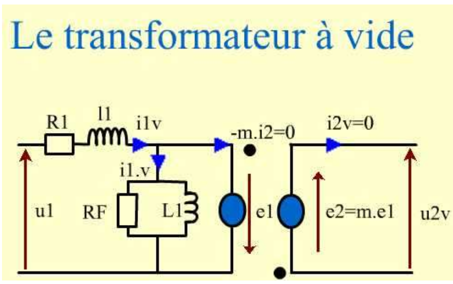
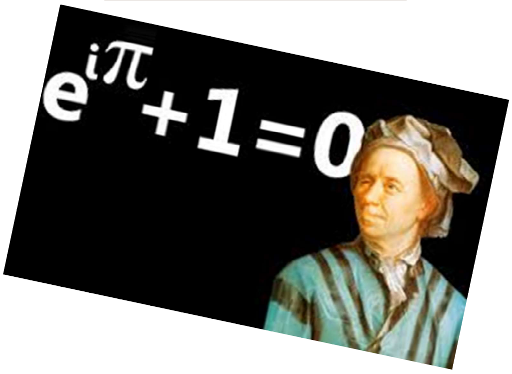
TD et TP 1/2/3 OUTILS LOGICIELS

Résolution numérique d'équations f(x) = 0
Calcul numérique d'une intégrale
Résolution numérique d'une équation différentielle







Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr

Travaux dirigés 1 : Résolution numérique d'équations f(x)=0

Présentation du problème

✓ Exemple de résolution littérale d'une équation f(x) = 0 :

Résoudre $e^{x^2} - 5 = 0$:

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

✓ De nombreuses équations f(x) = 0 ne peuvent pas être résolues de façon littérale, on peut cependant obtenir une valeur approchée de leurs solutions, lorsqu'elles existent.
Par exemple, on souhaite résoudre l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$. Ne trouvant pas de racines évidentes du polynôme $f(x) = x^3 - 2x - 5$, on étudie la fonction f afin de déterminer l'existence de solutions de l'équation f(x) = 0 :

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

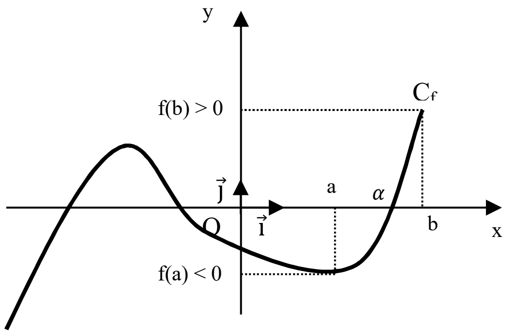
Notes

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

A priori quel est le nombre de solutions de l'équation f(x) = 0 ? Préciser dans quel(s) intervalle(s) elles se trouvent :

………

A l'aide d'un tableur, on détermine un intervalle de longueur 1 dans lequel se trouve l'unique solution notée α. On justifie l'existence et l'unicité de α avec le théorème de monotonie (appelé aussi le corollaire des valeurs intermédiaires, ou théorème de bijection) ci-dessous :



<u>Théorème de monotonie</u> : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur [a,b] telle que : f(a)×f(b) < 0, alors l'équation f(x) = 0 possède une seule et unique solution α dans l'intervalle]a,b[.

………

………

………

………

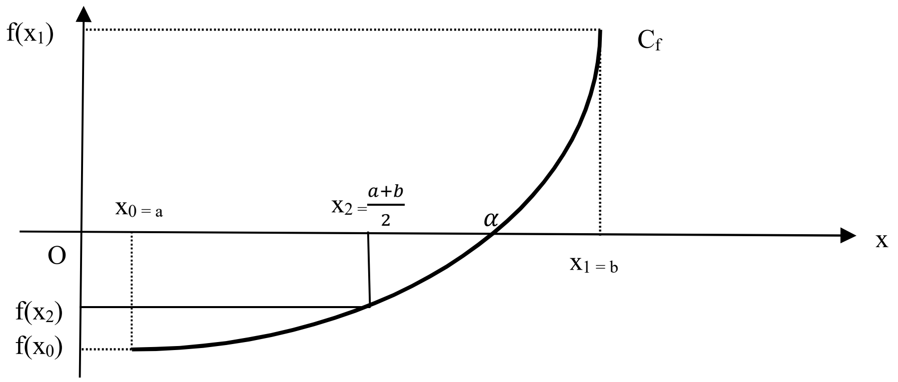
Cherchons alors une valeur approchée à 10^{-8} près de $\alpha \in [2;3]$ à l'aide des trois méthodes suivantes. Chacune d'elle consiste, à partir d'un encadrement d'une solution α de l'équation $f(x)=0$ dans un intervalle $[a,b]$, de réduire la taille de ce dernier jusqu'à la précision voulue, tout en gardant la racine à l'intérieur. Cela suppose que la fonction change de signe au passage de la racine. La réduction de l'intervalle peut se faire de différentes façons…

I. <u>Méthode dichotomique</u>

- ✓ <u>Le principe</u> C'est la méthode la plus simple, elle consiste à diviser l'intervalle $[a,b]$ en deux, en remplaçant une des deux extrémités de l'intervalle par le point milieu : $\frac{a+b}{2}$
- ✓ <u>Algorithme et test d'arrêt</u>

- On pose $x_0 = a$ et $x_1 = b$,
- on calcule $f(x_2)$ avec $x_2 = \dfrac{a+b}{2}$; si $f(x_0).f(x_2)<0$ alors $\alpha \in]x_0, x_2[$, sinon $\alpha \in]x_2, x_1[$
- on recommence le processus jusqu'à ce que l'intervalle [a,b], diminuant de moitié à chaque fois, ait une longueur inférieure à ε, ε étant la précision souhaitée.
- A la $n^{\text{ième}}$ étape, on obtient alors : $|x_{n+1} - \alpha| < \frac{b-a}{2^n}$

- La résolution numérique implique l'utilisation d'un tableur. Le test d'arrêt pourra alors être: $|x_{n+1} - \alpha| < |\boldsymbol{x_{n+1} - x_n}| < \mathbf{10^{-8}}$



✓ <u>Application</u>

Combien d'itérations permettront d'obtenir α, la solution de l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$ dans l'intervalle [2 ; 3] à 10^{-8} près ?

....

....

....

....

<u>A l'aide du logiciel Open Office Calc, tracer la fonction f sur l'intervalle</u> [1 ; 3], x variant avec un pas de 0,1. Vérifier la présence d'une solution à l'équation f(x) = 0 dans l'intervalle [2 ; 3].

<u>Appliquer la méthode dichotomique</u> à l'intervalle [2 ; 3] pour déterminer l'une des solutions de cette équation.

<u>Pour cela :</u>
- Construire 7 colonnes contenant les valeurs de a, (a+b)/2, b, f(a), f((a+b)/2), f(b), $b - a$.
- Pour appliquer cette méthode, vous devez tester le signe d'une valeur ; vous utiliserez pour cela le test logique **Si** dont la syntaxe est :
  Si (*test à effectuer* **;** *valeur de la cellule si test vrai* **;** *valeur de la cellule si test faux*)
- On prendra le test d'arrêt $b - a < 10^{-8}$. Pour cela, ajouter une colonne « test » indiquant « ok » en rouge si $b - a < 10^{-8}$, et « nok » en vert sinon.
- Déterminer une valeur approchée de $\alpha \in [2; 3]$, solution de l'équation :
$x^3 - 2x - 5 = 0$ à 10^{-8} près.

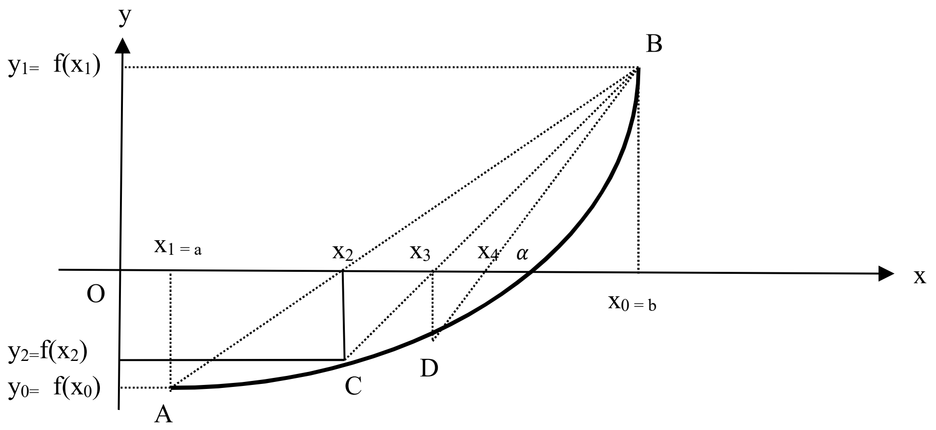
✓ <u>Conclusion</u> L'avantage de cette méthode est qu'elle converge toujours. Par contre, les limites de la méthode sont multiples:
- Elle nécessite un encadrement du zéro recherché. Cela peut s'obtenir en étudiant la fonction f et en évaluant graphiquement l'intervalle de départ.
- La convergence est lente. En effet, pour la division de l'intervalle en deux, la

précision de l'encadrement est multipliée par deux à chaque itération. Il existe, comme nous allons le voir, des méthodes bien plus performantes.

Notes

II. Méthode de la sécante ou méthode de Lagrange

- ✓ Le Principe Au lieu de choisir le point milieu de l'intervalle [a,b], on trace la droite (AB) et on choisit le point d'intersection de (AB) avec l'axe des abscisses.
  Si $\propto$ est plus proche de a que de b, on notera a = x_0, sinon b = x_0



- ✓ Algorithme et test d'arrêt

On recommence le processus jusqu'à ce que l'intervalle [x_n,x_{n+1}], diminuant à chaque itération, ait une longueur inférieure à ε, ε étant la précision choisie. Ou encore, on arrête la méthode dès que : $|f(x_n)| < \varepsilon$.

A la n^ième^ étape, on obtient alors : $x_{n+1} = x_0 - f(x_0)\cdot\dfrac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)}$ pour $n \geq 1$

Démonstration : à l'étape 1, cherchons x_2, l'abscisse du point d'intersection des droites (AB) et (Ox). Pour cela déterminons l'équation de la droite (AB) : y = m.x + p

Le coefficient directeur de (AB) est donné par la formule : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$.

Calculons p, l'ordonnée à l'origine, à l'aide des coordonnées du point B :

$$B \in (AB) \Leftrightarrow y_B = m.x_B + p \Leftrightarrow f(x_0) = m.x_0 + p \Leftrightarrow p = f(x_0) - m.x_0$$

L'équation de la droite (AB) est donc : $y = m.x + f(x_0) - m.x_0$ avec $m = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$.

Cherchons x_2, l'abscisse du point d'intersection des droites (AB) et (Ox) : x_2 est solution de l'équation :

$0 = m.x + f(x_0) - m.x_0$ avec $m = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$, c'est-à-dire :

$m.x = m.x_0 - f(x_0) \Leftrightarrow x = \frac{m.x_0 - f(x_0)}{m} = x_0 - f(x_0).\frac{1}{m}$ (m≠0)

Ainsi, $x_2 = x_0 - f(x_0).\frac{1}{m} = x_0 - f(x_0).\frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)}$.

A l'étape 3, x_3 est l'abscisse du point d'intersection des droites (CB) avec (Ox), ainsi :

$x_3 = x_0 - f(x_0).\frac{x_0 - x_2}{f(x_0) - f(x_2)}$ etc…

- ✓ Application

Appliquer la méthode de Lagrange à l'intervalle [2 ; 3] pour déterminer l'une des solutions de l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$. On construira la suite (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 = ? \\ x_1 = ? \\ x_{n+1} = x_0 - f(x_0) \cdot \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \quad pour\ n \geq 1 \end{cases}$$

On prendra le critère d'arrêt suivant : $|f(x_n)| < 10^{-8}$. Pour cela, ajouter une colonne « test » indiquant « ok » en rouge si $|f(x_n)| < 10^{-8}$, et « nok » en vert sinon.
Déterminer alors une valeur approchée de $\alpha \in [2; 3]$, solution de l'équation :
$x^3 - 2x - 5 = 0$ à 10^{-8} près, et comparer la vitesse de convergence de chacune des deux méthodes.

✓ <u>Conclusion</u> dans la méthode de la sécante, la suite (x_n) converge lentement mais plus rapidement vers la solution que dans la méthode dichotomique.

<u>Notes</u>

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

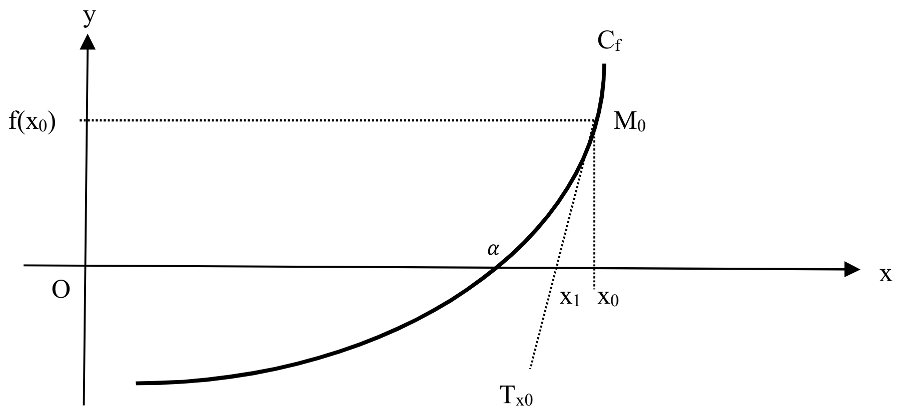
……

……

……

III. Méthode de Newton

✓ Le Principe La méthode de Newton-Raphson est beaucoup plus évoluée que les méthodes précédentes : elle utilise les variations de la fonction f.
En partant de x_0, une valeur approchée de $\propto$, on trace la tangente à la courbe que l'on suit jusqu'à intercepter l'axe des abscisses. Le nouveau point x_1 obtenu est ainsi plus proche de α, et on recommence l'opération jusqu'à la précision souhaitée. Sur le schéma ci-dessous placez x_2.



✓ Algorithme et test d'arrêt

A la $n^{ième}$ itération, on obtient alors : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

On arrête le processus dès que : $|f(x_n)| < \varepsilon$.

Démonstration : A la première étape, cherchons x_1, l'abscisse de l'intersection de la tangente à la courbe C_f en M_0.
Pour cela, déterminons l'équation de T_{x0}, la tangente à la courbe C_f en M_0 : $y = f(x_0) + (x - x_0).f'(x_0)$
x_1, l'abscisse du point d'intersection de T_{x0} et (Ox), est la solution de l'équation : $0 = f(x_0) + (x - x_0).f'(x_0)$

$$0 = f(x_0) + (x - x_0).f'(x_0) \Leftrightarrow (x - x_0).f'(x_0) = -f(x_0) \Leftrightarrow x.f'(x_0) - x_0.f'(x_0) = -f(x_0)$$

$\Leftrightarrow x.f'(x_0) = x_0.f'(x_0) - f(x_0) \Leftrightarrow x = \frac{x_0.f'(x_0) - f(x_0)}{f'(x_0)}$ On précise que $f'(x_0) \neq 0$, sinon le point d'intersection n'existerait pas (rappel : $f'(x_0)$ est la pente de la tangente T_{x0}, si $f'(x_0) = 0$ alors la tangente T_{x0} est horizontale.)
Ainsi, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.
A la deuxième étape, x_2 est l'abscisse de l'intersection de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse x_1, ainsi : $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ etc…

✓ Application

Appliquer la méthode de Newton en construisant la suite (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

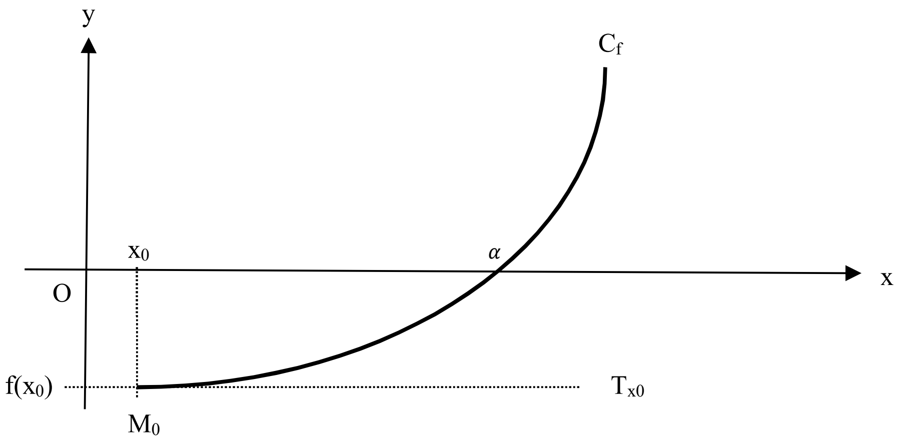
On prendra le critère d'arrêt suivant : $|f(x_n)| < 10^{-8}$. Pour cela, ajouter une colonne « test » indiquant « ok » en rouge si $|f(x_n)| < 10^{-8}$, et « nok » en vert sinon.
Déterminer alors une valeur approchée de $\alpha \in [2; 3]$, solution de l'équation : $x^3 - 2x - 5 = 0$ à 10^{-8} près, et comparer la vitesse de convergence de chacune des trois méthodes.

✓ <u>Conclusion</u> Cette méthode est très efficace dès que x_0 est proche de la solution recherchée. Elle a cependant certaines limites.

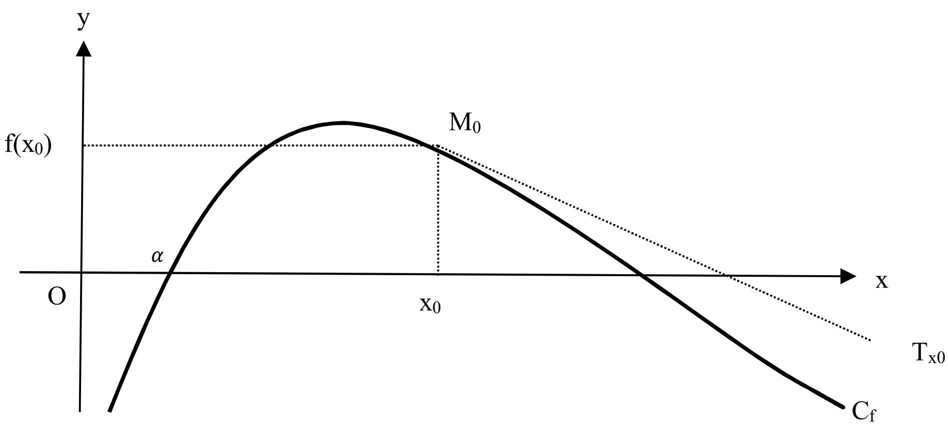
- Le premier inconvénient de la méthode est le besoin de la dérivée de la fonction f. Si on connaît une expression analytique de f, cela ne pose pas de problème. Cependant, il arrive souvent que ce ne soit pas le cas. Il faut alors évaluer numériquement la dérivée de cette fonction, ce qui est très délicat.

- Bien que plus rapide, la méthode de Newton échoue dans plusieurs cas :

Cas n°1 : $f'(x_0) = 0$ ou bien est proche de 0.



Cas n°2 : il y a deux solutions et x_0 est mal choisi



Notes

Travaux pratiques 1 :
Résolution numérique d'équations f(x)=0

Exercice 1 On définit la fonction f telle que pour tout x réel, $f(x) = e^x - 4x$

1. Peut-on résoudre à la main l'équation $f(x) = 0$?

En utilisant le tableur d'Open Office Calc, on souhaite résoudre l'équation : $f(x) = e^x - 4x = 0$ sur l'intervalle [0 ; 3] en utilisant les différentes méthodes numériques étudiées en T.D. Il faut tout d'abord localiser la ou les solutions de cette équation. Pour cela :

2. Au brouillon, étudier la fonction f sur son ensemble de définition.
Montrer que l'équation f(x) = 0 possède une unique solution dans l'intervalle [0 ; 1].

3. A l'aide du logiciel Open Office Calc, tracer la fonction f sur l'intervalle [0 ; 3], x variant avec un pas de 0,1. Vérifier la présence d'une solution à l'équation f(x) = 0 dans l'intervalle [0 ; 1].

4. Appliquer la méthode dichotomique à l'intervalle [0 ; 1] pour déterminer l'une des solutions de cette équation.

Pour cela :

- Construire 7 colonnes contenant les valeurs de a, (a+b)/2, b, f(a), f((a+b)/2), f(b), $b - a$.
- Pour appliquer cette méthode, vous devez tester le signe d'une valeur ; vous utiliserez pour cela le test logique **Si** dont la syntaxe est :
  Si (*test à effectuer* **;** *valeur de la cellule si test vrai* **;** *valeur de la cellule si test faux*)
- On prendra le test d'arrêt $b - a < 10^{-7}$. Pour cela, ajouter une colonne « test » indiquant « ok » en rouge si $b - a < 10^{-7}$, et « nok » en vert sinon.

5. Appliquer la méthode de Lagrange en construisant la suite (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 = ? \\ x_1 = ? \\ x_{n+1} = x_0 - f(x_0) \cdot \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \quad pour\ n \geq 1 \end{cases}$$

On prendra le critère d'arrêt suivant : $|f(x_n)| < \varepsilon$. Pour cela, ajouter une colonne « test » indiquant « ok » en rouge si $|f(x_n)| < \varepsilon$, et « nok » en vert sinon.

6. Appliquer la méthode de Newton en construisant la suite (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

On prendra le critère d'arrêt suivant : $|f(x_n)| < \varepsilon$. Pour cela, ajouter une colonne « test » indiquant « ok » en rouge si $|f(x_n)| < \varepsilon$, et « nok » en vert sinon.

7. Reprendre les différentes méthodes pour obtenir une valeur approchée de la solution de l'équation sur l'intervalle [2 ; 3].

Exercice 2 On définit la fonction f telle que pour tout x réel, $f(x) = \sin(2x) - 1 + x$
En utilisant le tableur d'Open Office Calc, on souhaite résoudre l'équation : $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}]$ en utilisant les différentes méthodes numériques étudiées en T.D. Il faut tout d'abord localiser la ou les solutions de cette équation. Pour cela :

1. Au brouillon, étudier la fonction f sur son ensemble de définition.
Montrer que l'équation f(x) = 0 possède une unique solution dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}]$.

2. A l'aide du logiciel Open Office Calc, tracer la fonction f sur l'intervalle [-1 ,1 ; 1,1], x variant avec un pas de 0,1. Vérifier la présence d'une solution à l'équation f(x) = 0 dans I, un intervalle de longueur 1.

3. Appliquer la méthode dichotomique à l'intervalle I pour déterminer la solution de cette équation.

   On prendra le test d'arrêt $|f(\alpha)| < 10^{-6}$

4. Appliquer la méthode de Lagrange en construisant la suite (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 \\ x_1 \\ x_{n+1} = x_0 - f(x_0) \cdot \dfrac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

On prendra le même critère d'arrêt que dans la question précédente.

5. Appliquer la méthode de Newton en construisant la suite (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

On prendra le même test d'arrêt que dans les questions précédentes.

Travaux dirigés 2 : Calcul numérique d'une intégrale

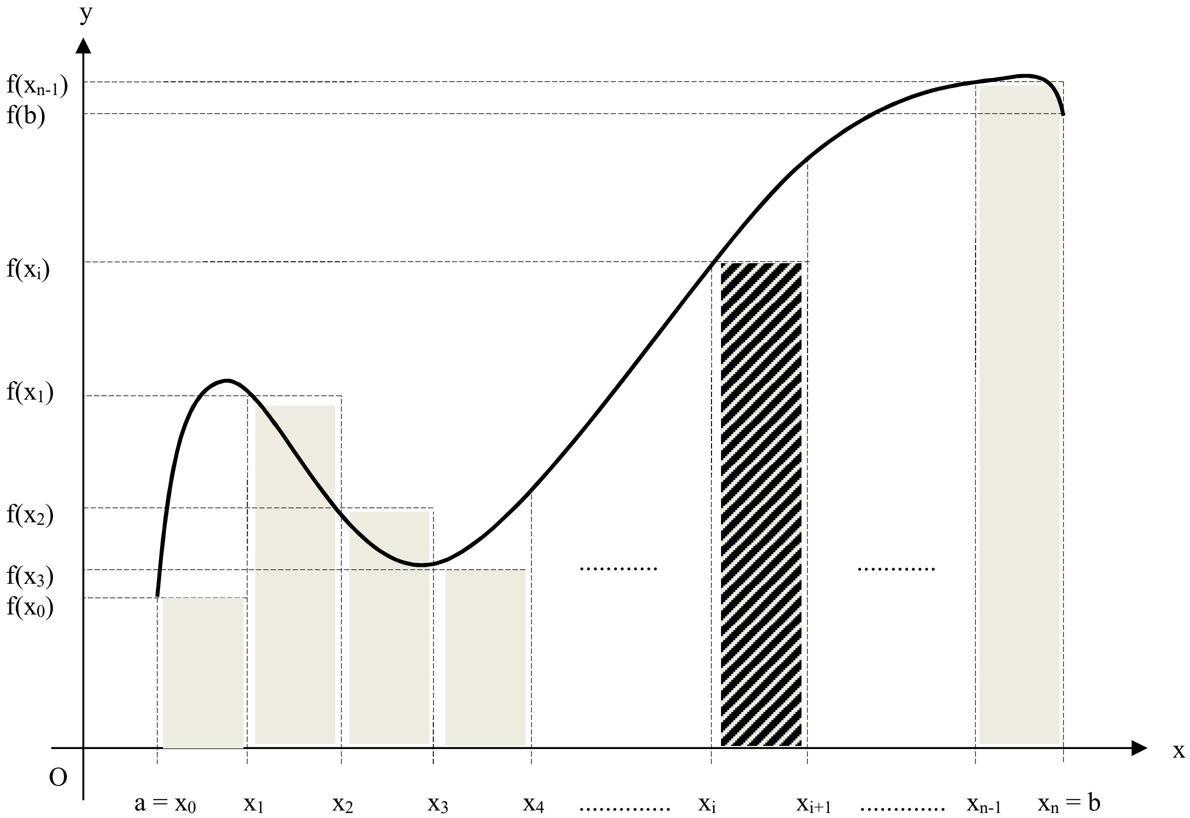
Dans certains cas, bien que f soit intégrable sur [a,b], on ne peut pas calculer $\int_a^b f(x)dx$ à l'aide de la formule précédente :

- lorsqu'on ne peut pas exprimer F, une primitive de f à l'aide de fonctions usuelles,
- lorsque f est obtenue à partir d'un tableau de valeurs relevé d'expérience physique, ou d'une courbe.

Dans ces cas, on cherche une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$ à l'aide, par exemple, de l'une des trois méthodes ci-dessous.

I. <u>Méthode des rectangles</u> : (voir schéma de la définition de l'intégrale)

1) Principe



On découpe l'intervalle [a,b] en n sous-intervalles de même longueur $h = \frac{b-a}{n}$.

On note : $x_0 = a$; $x_1 = a+h$; $x_2 = a+2h$; ... ; $x_i = a+ih$;…$x_{n-1} = a+(n-1)h$; $x_n = a+nh$

On peut alors approcher chaque intégrale $\int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)dx$ par l'aire algébrique du rectangle de dimensions h et f(a+ih) (ou bien f(a+(i+1)h)).

On obtient alors :

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \times \sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih) \quad \text{ou} \int_a^b f(x)dx \approx h \times \sum_{i=1}^{n} f(a+ih)$$

2) Evaluation de l'erreur

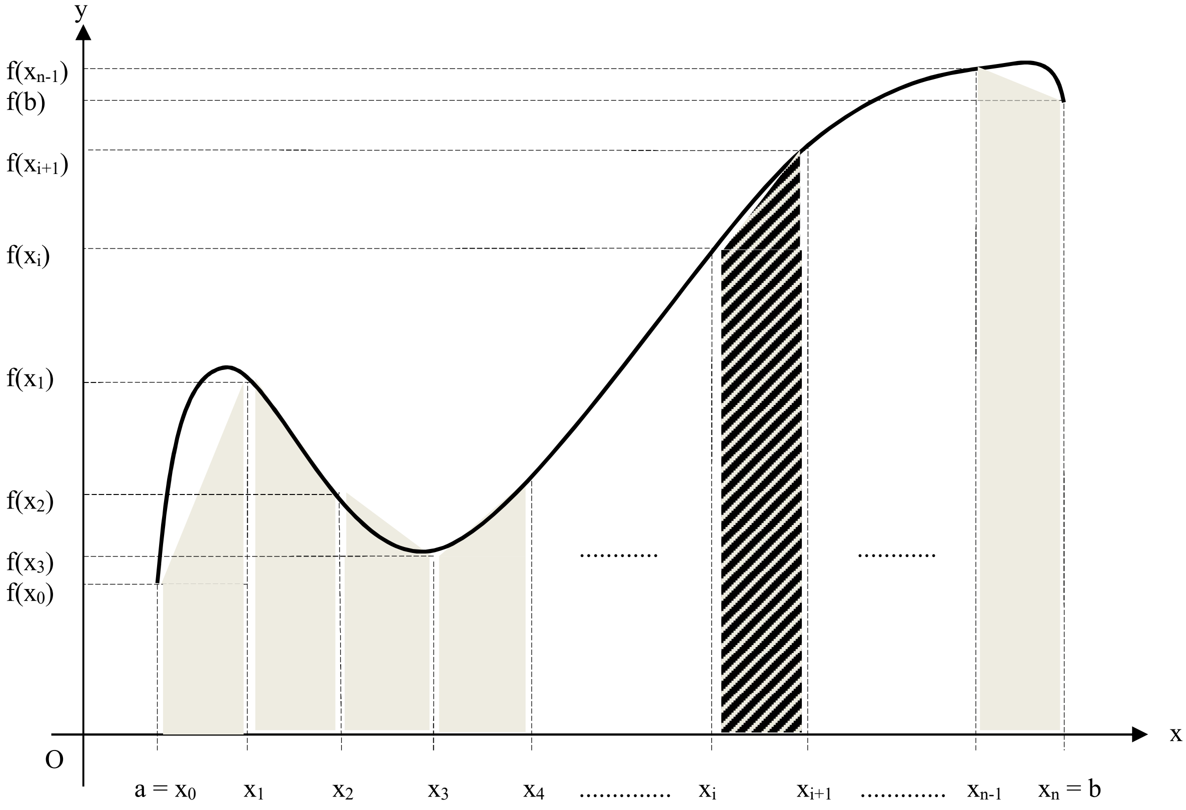
Notons $\Delta = \int_a^b f(x)dx - h.\sum_{i=1}^{n} f(a+ih)$

On pose $M = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, on admet qu'alors : $|\Delta| \leq M.\dfrac{(b-a)^2}{2n}$.

3) Application Déterminer le nombre de sous-intervalles n à partir duquel on pourra obtenir, à l'aide de la méthode des rectangles, une valeur approchée de $I = \int_1^2 x^2 dx$ à 10^{-2} près. Puis, pour n=200, évaluer en utilisant un tableur et la méthode des rectangles une valeur approchée de I.

II. **Méthode des trapèzes** :

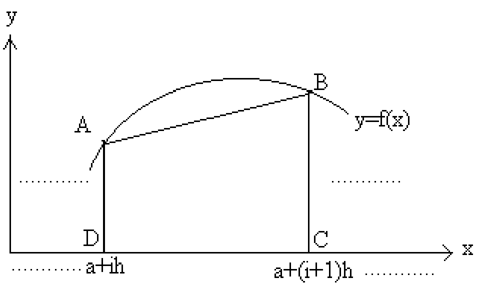
1) Principe



On découpe l'intervalle [a,b] en n intervalles de même longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$.

On note : $x_0 = a$; $x_1 = a+h$; $x_2 = a+2h$; ... ; $x_i = a+ih$;… $x_{n-1} = a+(n-1)h$; $x_n = a+nh$

On approche chaque intégrale $\int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)dx$ par l'aire algébrique du tapèze (DCBA) ci-



dessous :

L'aire d'un trapèze de base b, de petite hauteur h et de grande hauteur H est : $\frac{1}{2}b(h+H)$

Aire algébrique du trapèze DCBA est donc : $\frac{1}{2}h(f(a+ih)+f(a+(i+1)h)$

$$\boxed{\text{On obtient alors : } \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \times [f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)]}$$

Démonstration : La somme des aires algébriques des trapèzes est alors :

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}h(f(a+ih)+f(a+(i+1)h) = \frac{h}{2}.\sum_{i=0}^{n-1}(f(a+ih)+f(a+(i+1)h)$$

$$= \frac{h}{2}.\left[\sum_{i=0}^{n-1}(f(a+ih)+\sum_{i=0}^{n-1}f(a+(i+1)h)\right] = \frac{h}{2}.\left[\sum_{i=0}^{n-1}(f(a+ih)+\sum_{i=1}^{n}f(a+ih)\right]$$

$$= \frac{h}{2}.\left[f(a)+2.\sum_{i=0}^{n-1}(f(a+ih)+f(a+nh)\right] = \frac{h}{2}\times\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(a+ih)\right]$$

2) Evaluation de l'erreur

Notons $\Delta = \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}\times[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(a+ih)]$

On pose $M = \sup_{x\in[a,b]}|f''(x)|$, on admet qu'alors : $|\Delta| \le M.\frac{(b-a)^3}{12n^2}$.

3) Application Déterminer le nombre de sous-intervalles n à partir duquel on pourra obtenir, à l'aide de la méthode des trapèzes, une valeur approchée de $I = \int_1^2 x^2dx$ à 10^{-2} près. Puis, pour n=10, évaluer en utilisant un tableur et la méthode des trapèzes une valeur approchée de I.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

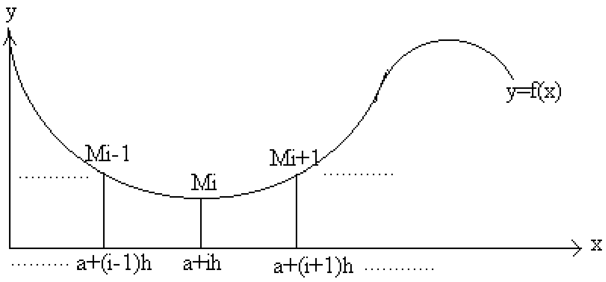
……………………………………………………………………………………………………

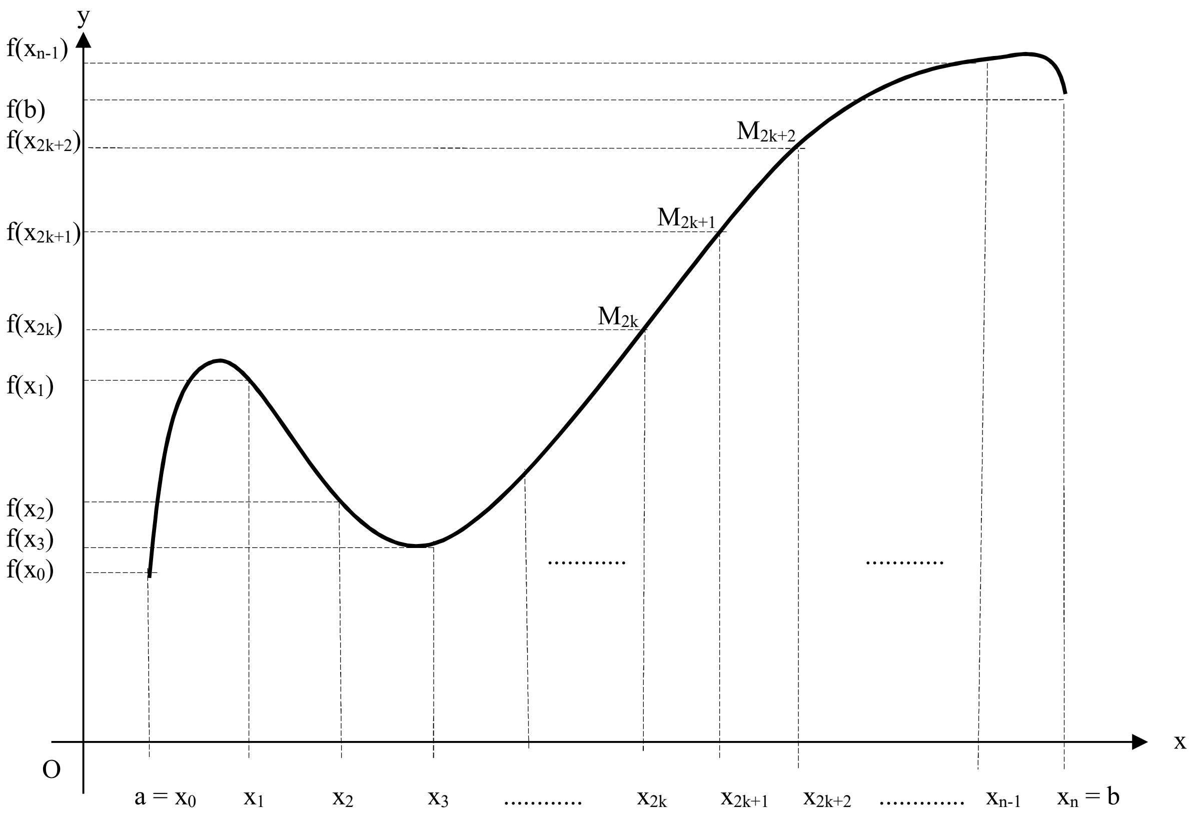
……………………………………………………………………………………………………

III. Méthode de Simpson :

1) Principe

Dans la méthode de Simpson l'arc $M_{i-1}M_iM_{i+1}$ de la courbe est remplacé par l'arc de parabole (P) qui passe par les points M_{i-1}, M_i, M_{i+1} :





Il faut alors diviser l'intervalle [a,b] en un nombre pair, n, d'intervalles de même longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$, on admet qu'on obtient alors la formule suivante :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4.\sum_{k=0}^{n/2-1} f(a+(2k+1)h) + 2.\sum_{k=1}^{n/2-1} f(a+2kh)\right]}$$

2) Evaluation de l'erreur

Notons $\Delta = \int_a^b f(x)dx - S$

On pose $M = \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$, on admet qu'alors : $|\Delta| \leq M.\frac{(b-a)^5}{2880n^4}$

Exemple Pour n=10, évaluer en utilisant un tableur et la méthode de Simpson une valeur approchée de $I = \int_1^2 x^2 dx$. Quelle est l'incertitude obtenue ?

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Sujet du TP : Calcul numérique d'une intégrale

En utilisant le tableur d'Open Office (Calc), nous cherchons à évaluer l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant les méthodes d'intégration numérique vues en TD.

Dans ce TP, la fonction f(x) est définie par son expression mathématique. L'intégrale de cette fonction est connue ; on comparera alors les résultats obtenus à l'aide de différentes méthodes d'intégration avec la valeur exacte.

I. Evaluation de $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$

1) Evaluer au brouillon la valeur exacte de cette intégrale.

2) A l'aide du logiciel Excel, évaluer la valeur de l'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ en utilisant les méthodes d'intégration numérique suivantes :

- Méthode des rectangles, on déterminera au préalable le nombre de sous intervalles n, à partir duquel on pourra obtenir une valeur approchée de $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ à 10^{-2} près. Puis, on appliquera la méthode pour n=50. Evaluer alors, l'erreur commise sur l'estimation de l'intégrale en comparant le résultat obtenu avec la valeur exacte déterminée par calcul.

- Méthode des trapèzes, on déterminera au préalable le nombre de sous intervalles n, à partir duquel on pourra obtenir une valeur approchée de $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ à 10^{-4} près. Puis, on appliquera la méthode pour n=20. Evaluer alors, l'erreur commise sur l'estimation de l'intégrale en comparant le résultat obtenu avec la valeur exacte déterminée par calcul.

- Méthode de Simpson (on pourra se servir de la fonction EST.PAIR et EST.IMPAIR afin de distinguer les cas pairs et impairs). On déterminera au préalable le nombre de sous intervalles n, à partir duquel on pourra obtenir une valeur approchée de $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ à 10^{-4} près. Puis, on appliquera la méthode pour n=10. Evaluer alors, l'erreur commise sur l'estimation de l'intégrale en comparant le résultat obtenu avec la valeur exacte déterminée par calcul.

On rappelle les expressions correspondant à chaque méthode :

Méthode des rectangles $\int_a^b f(x)dx = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(a+ih)$

Méthode des trapèzes $\int_a^b f(x)dx = h \cdot \left[\frac{1}{2}\cdot f(a) + \frac{1}{2}\cdot f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right]$

Méthode de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\cdot\left[f(a)+f(b)+4\sum_{k=0}^{n/2-1} f(a+(2k+1)h) + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} f(a+2kh)\right]$$

II. Application à l'étude du transformateur à vide

Un contrôle qualité est effectué sur des transformateurs en sortie de chaîne de production. On évalue pour cela la puissance consommée à vide (le secondaire du transformateur n'alimente rien) par ceux-ci, en alimentant leur primaire sous tension nominale (230V).
Un transformateur idéal doit absorber une puissance active nulle dans un tel cas de fonctionnement.
Les caractéristiques des transformateurs testés sont les suivantes :

- Tension Primaire : 230 V
- Tension Secondaire : 115 V
- Fréquence nominale de fonctionnement : 50Hz
- Puissance apparente : 50 VA

Un transformateur présentant, en sortie de cette chaîne de production, une puissance à vide P_0 inférieure à 0,5W est jugé apte à la commercialisation.

- Demandez les données à votre enseignant, puis représentez-les graphiquement.
- Evaluer $P_0=\frac{1}{T}\cdot\int_0^T u_{10}(t)\cdot i_{10}(t)\,dt$ en utilisant la méthode de Simpson, et déterminez si le transformateur testé peut être commercialisé.

III. Etude d'un capteur de tension

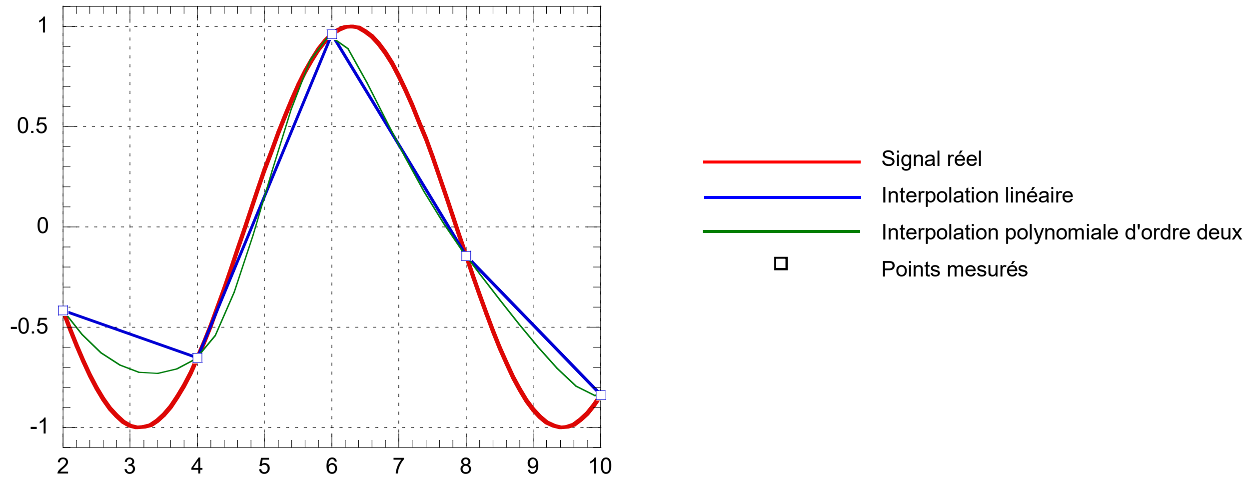
Un capteur de pression de grande sensibilité mesure un signal de très faible amplitude. Les valeurs mesurées sont reportées dans le tableau 1. La deuxième colonne contient les abscisses exprimées en Hz (fréquence), la troisième colonne contient les niveaux exprimés en Volts.

i	x_i (Hz)	$f(x_i)$ (Volts)
0	2	-0,4161
1	4	-0,6536
2	6	0,9602
3	8	-0,1455
4	10	-0,8391
5	12	0,8439
6	14	0,1367
7	16	-0,9577
8	18	0,6603
9	20	0,4081
10	22	-1,0000
11	24	0,4242
12	26	0,6469
13	28	-0,9626
14	30	0,1543

- Tableau 1 -

1. On souhaite déterminer, à partir de ces valeurs, l'énergie du signal en dB (décibels). Sachant que l'énergie s'obtient par intégration de l'amplitude, il nous suffit d'intégrer numériquement les valeurs données par la mesure. Pour se faire, on utilisera successivement la méthode des trapèzes et la méthode de Simpson.
2. Finalement, avec des moyens plus sophistiqués, on a pu mesurer un niveau de –1,8973 dB. Quelles sont les erreurs relatives en pourcentage qui ont été commise avec les deux méthodes ci-dessus ?

3 Expliquez le résultat à l'aide de la figure 1 ci-après.


1
0.5
0
-0.5
-1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Signal réel
Interpolation linéaire
Interpolation polynomiale d'ordre deux
Points mesurés

- Figure 1 -

Travaux dirigés 3 : Résolution numérique d'une équation différentielle du premier ordre

I. Généralités

1) Définition/Théorème

On appelle équation différentielle du premier ordre, toute équation dans laquelle interviennent la variable t, une fonction inconnue y(t) et sa dérivée y'(t),
on note : y'(t) = f (t , y(t))
Résoudre une telle équation, c'est rechercher toutes les fonctions dérivables y, telles que :
y'(t) = f (t , y(t)) $\forall$t $\in$ I (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.)

On démontre que la solution générale d'une équation différentielle du premier ordre dépend d'une constante arbitraire souvent notée λ.
La donnée d'une condition supplémentaire, appelée condition initiale, notée : y (x_0) = y_0 , détermine en général la valeur de la constante λ, et définit une solution unique.

2) Exemple

- ✓ Résoudre l'équation différentielle suivante sur [0;1] :
  (E) $y'(t) + 150y(t) = 49 - 150t$ avec y(0) = 2/3.

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

Notes

La plupart des équations différentielles ne peuvent pas être résolues de façon littérale (c'est à dire par recherche de primitive). On utilise alors des méthodes d'analyse numérique, afin d'obtenir point par point une solution approchée de l'équation. Etudions la méthode d'Euler-Cauchy.

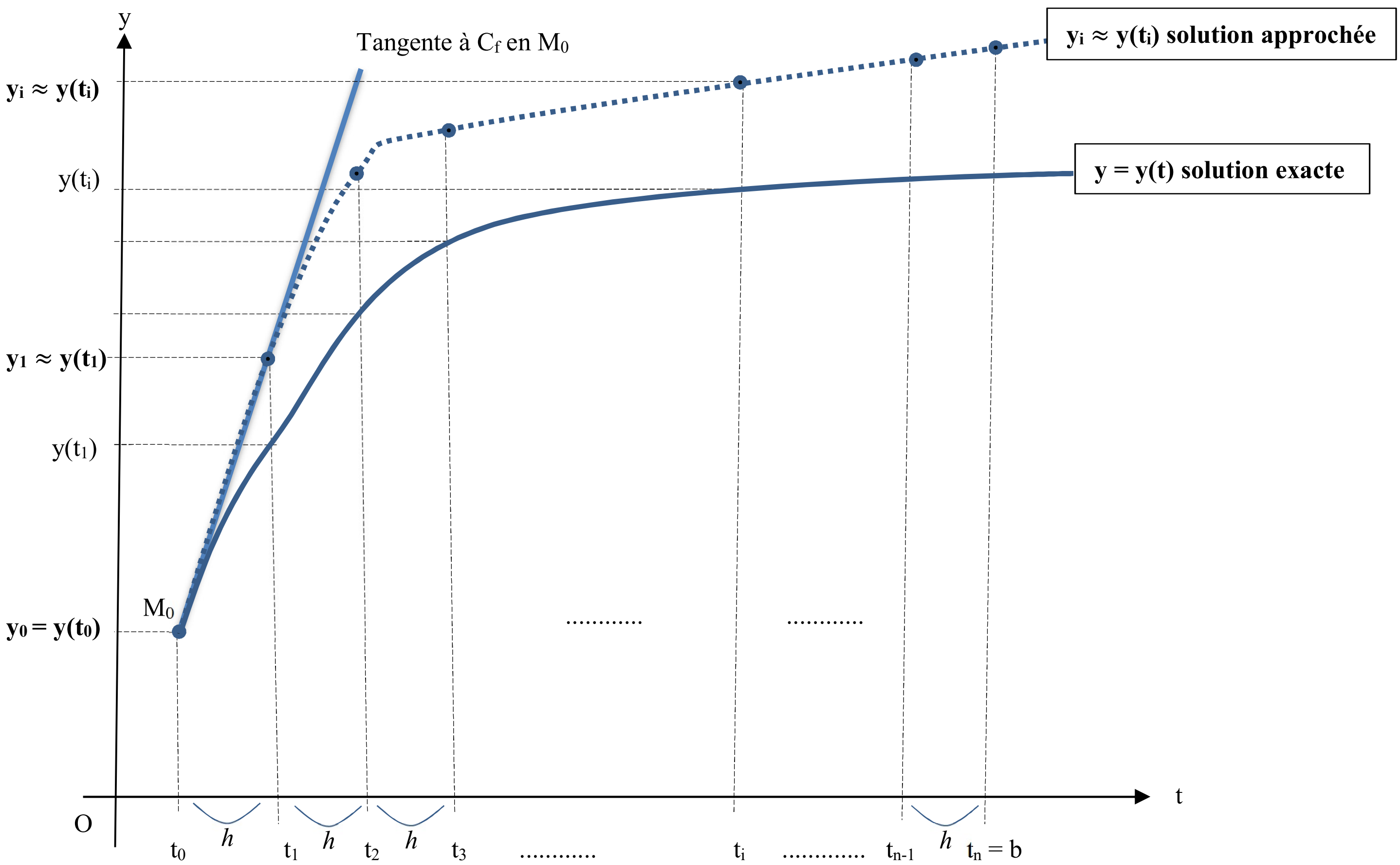
II. Résolution numérique d'une équation différentielle du premier ordre (avec condition initiale) par la méthode d'Euler-Cauchy (Méthode d'ordre 1)

1) Principe

On souhaite résoudre numériquement sur l'intervalle $[t_0,b]$ l'équation différentielle du premier ordre : $(E)\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

Ceci revient à chercher l'unique fonction y de la variable t définie sur $[t_0,b]$ vérifiant (E). Il arrive que les méthodes de résolution ne nous permettent pas d'expliciter cette solution

Pour cela, nous allons construire de façon approximative la fonction y point par point sur l'intervalle $[t_0,b]$:



On découpe l'intervalle $[t_0,b]$ en n sous intervalles de même longueur $h=\dfrac{b-t_0}{n}$.

On notera : $t_i=t_0+ih$ avec $0\le i\le n$.

$t \mapsto y(t)$ la solution exacte de (E) (qui nous est supposée inconnue).

y_i une valeur approchée de $y(t_i)$ pour tout i, entier naturel tel que : $0 < i \leq n$

On peut obtenir une approximation de $y(t_1)$ en appliquant l'équation de la tangente à la courbe au point d'abcisse t_0 :

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

On évalue alors $y(t_2)= y(t_1+h)$ par le même procédé où t_0 est remplacé par t_1 et y_0 par y_1, on obtient alors :

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

et ainsi de suite jusqu'à $y(t_n) = y(b)$.

La formule générale est donc : $y_{i+1} = y_i + h.f(t_i,y_i)$ pour $i \in \{1; \dots; n\}$

2) Evaluation de l'erreur :

On note $E(y) = \max_{i\in\{1\dots n\}} |y_i - y(t_i)|$. On démontre que sous certaines conditions vérifiées par f, il existe une constante K telle que : $E(y) \leq \frac{K}{n}$.
Cette méthode n'est donc pas très efficace, on lui préfèrera les méthodes d'Euler améliorée et de Runge –Kutta (voir TP3).

3) Application sur un exemple

- A l'aide d'un tableur et en appliquant la méthode d'Euler normale, résoudre approximativement l'équation différentielle suivante sur [0;1] :
  $y'(t) + 150y(t) = 49 - 150t$ avec $y(0) = 2/3$. On choisira le pas de calcul h = 0.01.
- Avec le même pas de calcul, appliquer la méthode d'Euler améliorée :
  $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\cdot(k1 + k2)$ où $k1 = f(t_i, y_i)$ et $k2 = f(t_{i+1}, y_i + h\cdot f(t_i, y_i))$
- Comparer graphiquement les résultats obtenus dans les questions précédentes (Solutions approchées avec Euler normale et Euler améliorée) et en I.2. (solution exacte).

Notes

Travaux pratiques 3 : Résolution numérique d'une équation différentielle du premier ordre

I. Présentation du T.P.

L'objectif du TP est d'introduire, à l'aide du logiciel Excel, les méthodes de résolution numériques d'une équation différentielle du 1^er^ordre.
Les résultats obtenus par les méthodes numériques seront comparés au résultat exact obtenu analytiquement.

II. Équations différentielles du 1^er^ ordre

1. Présentation

Soit l'équation différentielle à résoudre $\frac{dy}{dt} = y'(t) = f(t, y)$ avec $y(t_0) = y_0$. Il faut définir y(t) pour chaque valeur $t_0, t_1, t_2, ..., t_n$ de t. Soit h le pas de calcul. Les relations à définir pour chaque méthode sont :

Méthode d'Euler normale : $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i)$

Méthode d'Euler améliorée :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (k1 + k2)$$
$$k1 = f(t_i, y_i)$$
$$k2 = f(t_{i+1}, y_i + h \cdot f(t_i, y_i))$$

Méthode de Runge-Kutta (ordre 4) :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot (k1 + 2 \cdot k2 + 2 \cdot k3 + k4)$$
$$k1 = h \cdot f(t_i, y_i)$$
$$k2 = h \cdot f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k1}{2})$$
$$k3 = h \cdot f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k2}{2})$$
$$k4 = h \cdot f(t_i + h, y_i + k3)$$

2. Travail à effectuer

On souhaite étudier la décharge d'un condensateur $C = 1\,\mu F$ à travers une résistance $R = 1\,k\Omega$.
On sait que la tension aux bornes de la résistance durant la décharge satisfait l'équation différentielle suivante :

$$u'(t) + \frac{1}{R \cdot C} \cdot u(t) = 0$$

On prendra pour intervalle d'étude [0 ; 0,01s]. A $t = 0$, la tension aux bornes de la résistance est de 6 V.

1) Donner la solution analytique de l'équation différentielle.

2) Appliquer la méthode d'Euler "normale" pour un pas de calcul de 0,5 ms puis pour un pas de calcul de 0,1 ms. Comparer graphiquement les résultats obtenus avec la solution analytique. Calculer $E(y) = \max_{i \in \{1 \dots n\}} |y_i - y(t_i)|$.

3) Appliquer la méthode d'Euler améliorée pour un pas de calcul de 0,5 ms. Comparer graphiquement les résultats obtenus avec la solution analytique.

4) Appliquer la méthode de Runge-Kutta pour un pas de calcul de 0,5 ms. Comparer graphiquement les résultats obtenus avec la solution analytique.

Notes

Notes

Notes

Notes