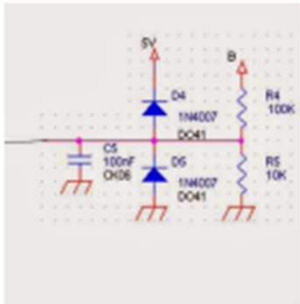
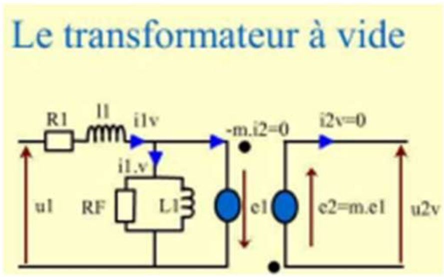
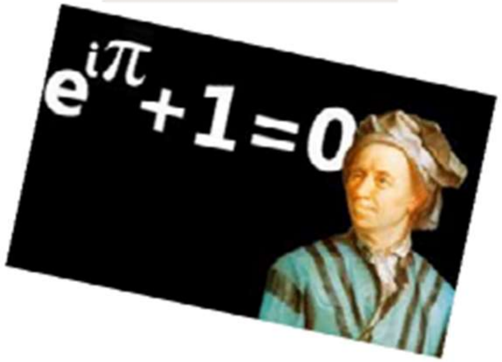
TD et TP 1/2/3 OUTILS LOGICIELS

Résolution numérique d'équations f(x) = 0
Calcul numérique d'une intégrale
Résolution numérique d'une équation différentielle





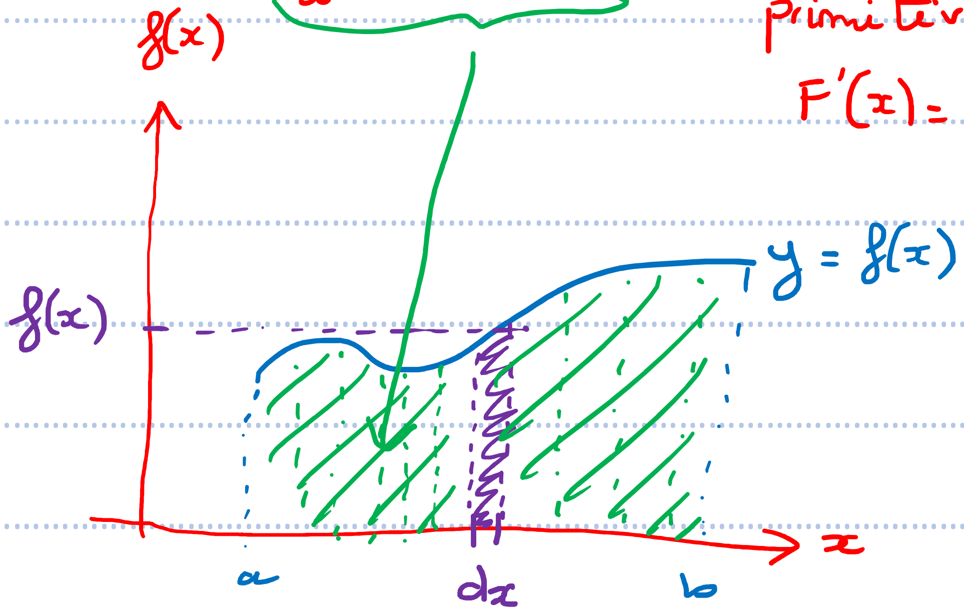


Notes

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

primitive de f

$$F'(x) = f(x)$$



Travaux dirigés 2 : Calcul numérique d'une intégrale

Page 15 TD/TP OL

Dans certains cas, bien que f soit intégrable sur [a,b], on ne peut pas calculer $\int_a^b f(x)dx$ à l'aide de la formule précédente :

- lorsqu'on ne peut pas exprimer F, une primitive de f à l'aide de fonctions usuelles,
- lorsque f est obtenue à partir d'un tableau de valeurs relevé d'expérience physique, ou d'une courbe.

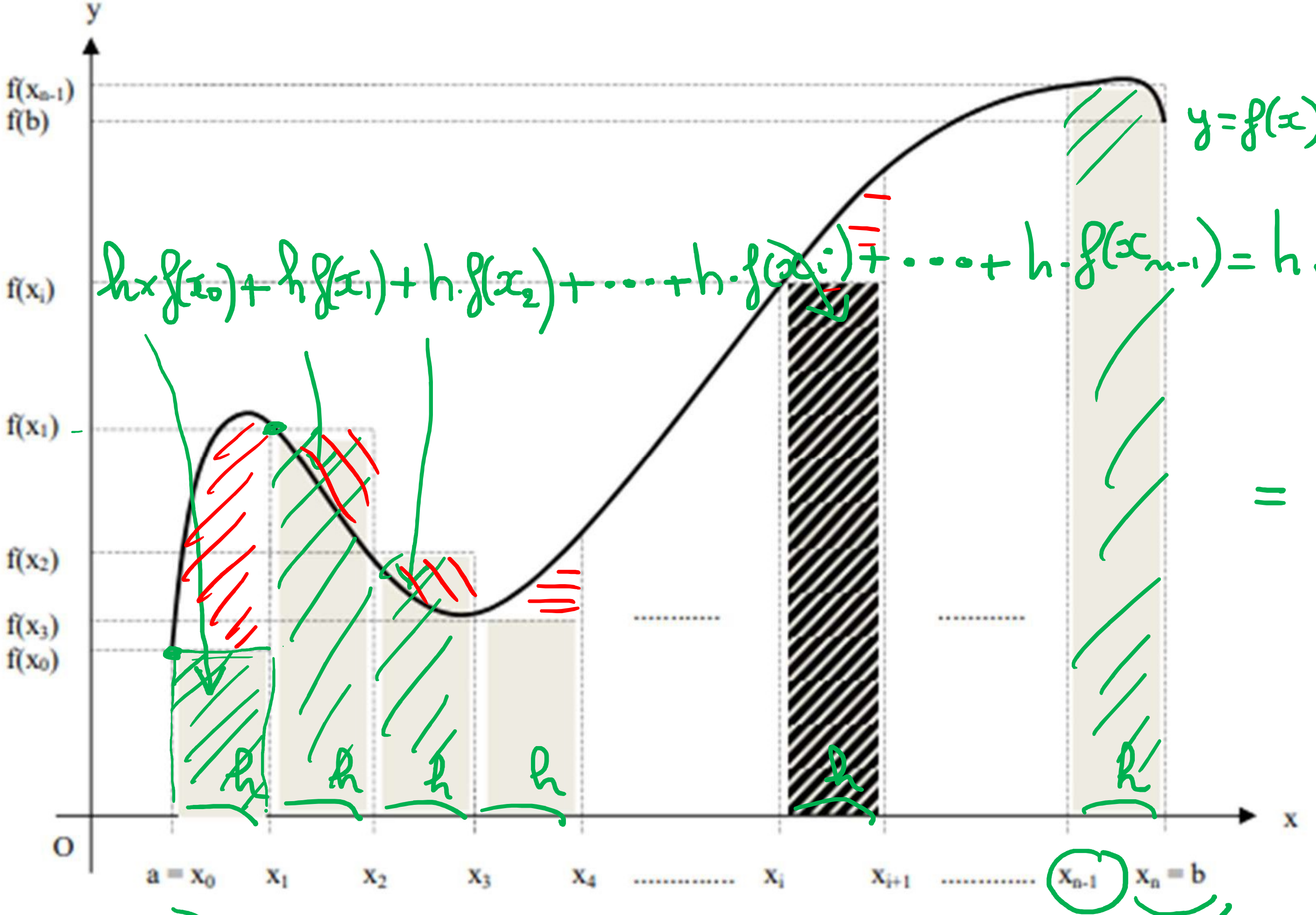
Dans ces cas, on cherche une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$ à l'aide, par exemple, de l'une des trois méthodes ci-dessous.

Notes

Page 15 TD/TP OL

I. **Méthode des rectangles** : (voir schéma de la définition de l'intégrale)

1) Principe



Page 15 TD/TP OL

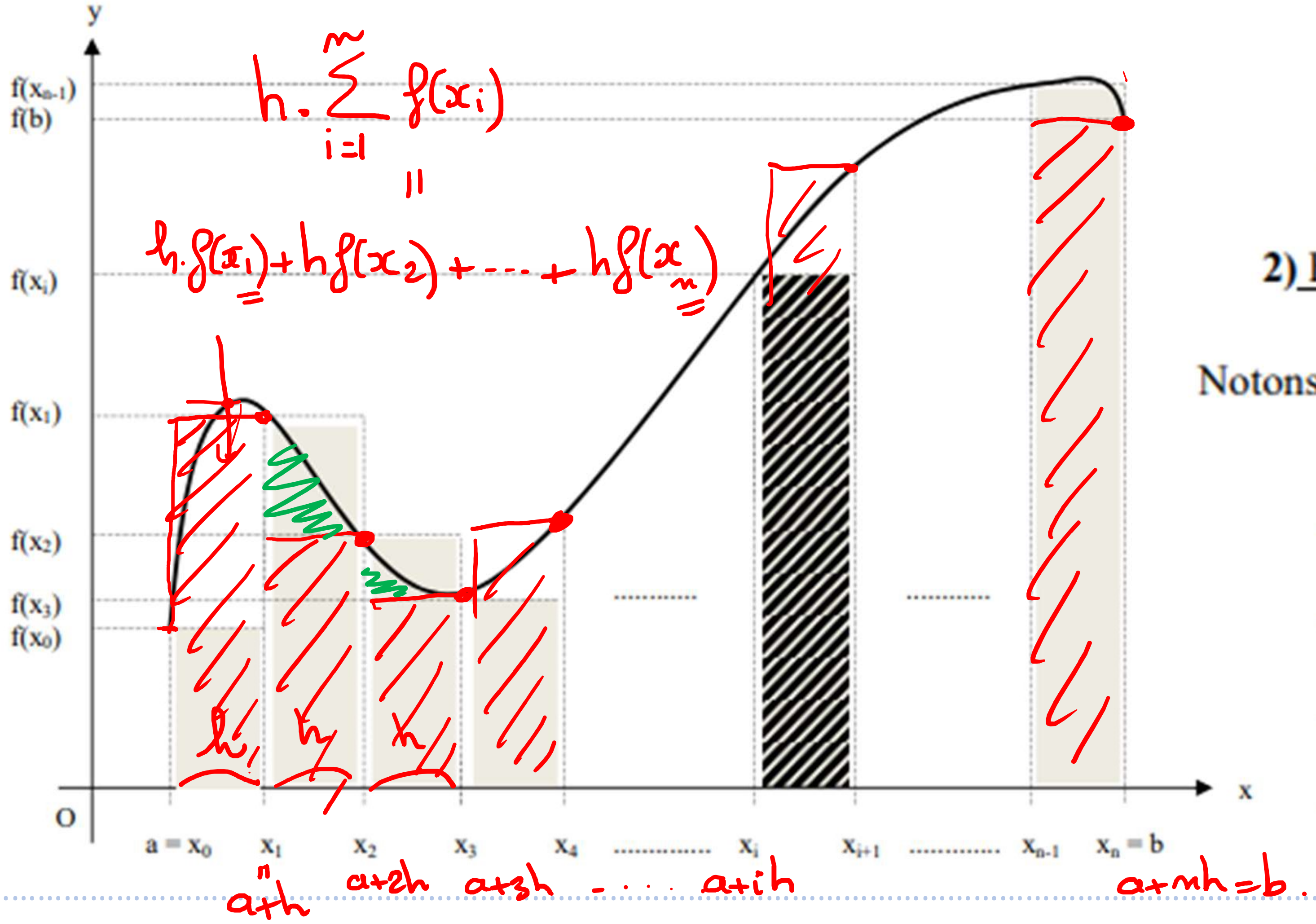
$$h \times f(x_0) + h\,f(x_1) + h\cdot f(x_2) + \dots + h\cdot f(x_i) + \dots + h\cdot f(x_{n-1}) = h\cdot\big(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_i)+\dots+f(x_{n-1})\big)$$

$$= h\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$ valeur approchée de $I = \int_a^b f(x)\,dx$ exacte

$nh = b-a$

n sous intervalles de longueur $h = \frac{b-a}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h \times \sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih) \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)dx \approx h \times \sum_{i=1}^{n} f(a+ih)}$$



Page 16 TD/TP OL

2) Evaluation de l'erreur

$$\text{Notons } \Delta = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{I} - \underbrace{h.\sum_{i=1}^{n} f(a+ih)}_{I_R}$$

val. exacte . val. approchée

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h\times\sum_{i=0}^{n-1} f(\underbrace{a+ih}_{x_i}) \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)dx \approx h\times\sum_{i=1}^{n} f(a+ih)}$$

2) Evaluation de l'erreur

Notons $\Delta = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{I} - \underbrace{h.\sum_{i=1}^{n} f(a+ih)}_{I_R}$

exacte approchée

On pose $M = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, on admet qu'alors : $\boxed{|\Delta| \leq M.\frac{(b-a)^2}{2n}}$.

3) Application Déterminer le nombre de sous-intervalles n à partir duquel on pourra obtenir, à l'aide de la méthode des rectangles, une valeur approchée de $\boxed{I = \int_1^2 x^2dx}$ à 10^{-2} près. Puis, pour n=200, évaluer en utilisant un tableur et la méthode des rectangles une valeur approchée de I.

$I = \int_1^2 x^2 dx \quad a = 1 \quad b = 2 \quad f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

On cherche n tel que $\boxed{|\Delta| \leq 10^{-2}}$

le maximum de $|f'(x)|$ lorsque $x \in [a,b]$

On sait que $|\Delta| \leq M.\frac{(b-a)^2}{2n} \leq 10^{-2}$ où $M = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| = \sup_{[1,2]} \underbrace{|2x|}_{=2x \nearrow} = 2\times 2 = 4$

$\underbrace{4.\frac{\overbrace{(2-1)^2}^{1}}{2n}}_{4\times\frac{1}{2n} = \frac{4}{2n} = \frac{2\times 2}{2n}} \leq 10^{-2} \iff \underbrace{\frac{2}{n} \leq 10^{-2}}_{(*)} \underset{\times n>0}{\iff} 2 \leq 10^{-2}.n \underset{\div 10^{-2}>0}{\iff} \frac{2}{10^{-2}} \leq n \iff 2.10^2 \leq n \iff \boxed{n \geq 200}$

(*) $\frac{2}{n} \leq 10^{-2}$

$\iff \frac{1}{n} \leq \frac{10^{-2}}{2}$ inverse

$\iff n \geq \frac{2}{10^{-2}} = 200$

$\boxed{CC}$: On obtient une val. approchée de I à 10^{-2} près lorsque $n \geq 200$

Notes

$$I_R = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih)$$ valeur approchée de $$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_1^2 x^2\,dx.$$

Tableur :

a	b	n	h
1	2	200	$\boxed{\frac{b-a}{n}}$ Formule

$$I = \int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

i	a+ih	f(a+ih)
0	Formule	$\leftarrow$ au carré
1		
2		
⋮		
200		

val. approchée : I_R $h \times$ Somme( )

val. exacte : I $= 7/3$

erreur absolue : $|I_R - I|$ $< 10^{-2}$???

Notes

a	b	n	h	i	a+ih	f(a+ih)
1	2	200	0,005	0	1	1
				1	1,005	1,010025
				2	1,01	1,0201
				3	1,015	1,030225
				4	1,02	1,0404
				5	1,025	1,050625
				6	1,03	1,0609
				7	1,035	1,071225
				8	1,04	1,0816
				9	1,045	1,092025
				10	1,05	1,1025
				11	1,055	1,113025
				12	1,06	1,1236
				13	1,065	1,134225
				14	1,07	1,1449

Val approché	IR	2,3258375
Val exacte	I	2,33333333
Erreur absolu	Delta	0,00749583

Avec 200 intervalles, on obtient la valeur de I approchée à 10^{-2} près, soit à 1 chiffre après la virgule : 2,3

Notes

Page 17 TD/TP OL

II. Méthode des trapèzes :

1) Principe

Notes

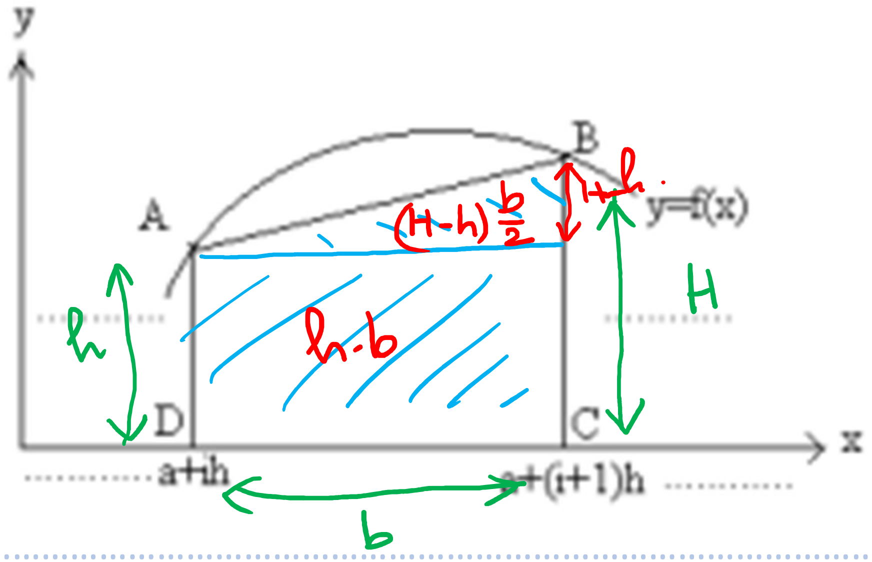
$hb + \frac{b}{2}(H-h)$

$= hb + \frac{b}{2}H - \frac{b}{2}h$

$= b\left(h + \frac{H}{2} - \frac{h}{2}\right)$

$= b\left(\frac{h}{2} + \frac{H}{2}\right)$

$= \frac{b}{2}(h+H)$



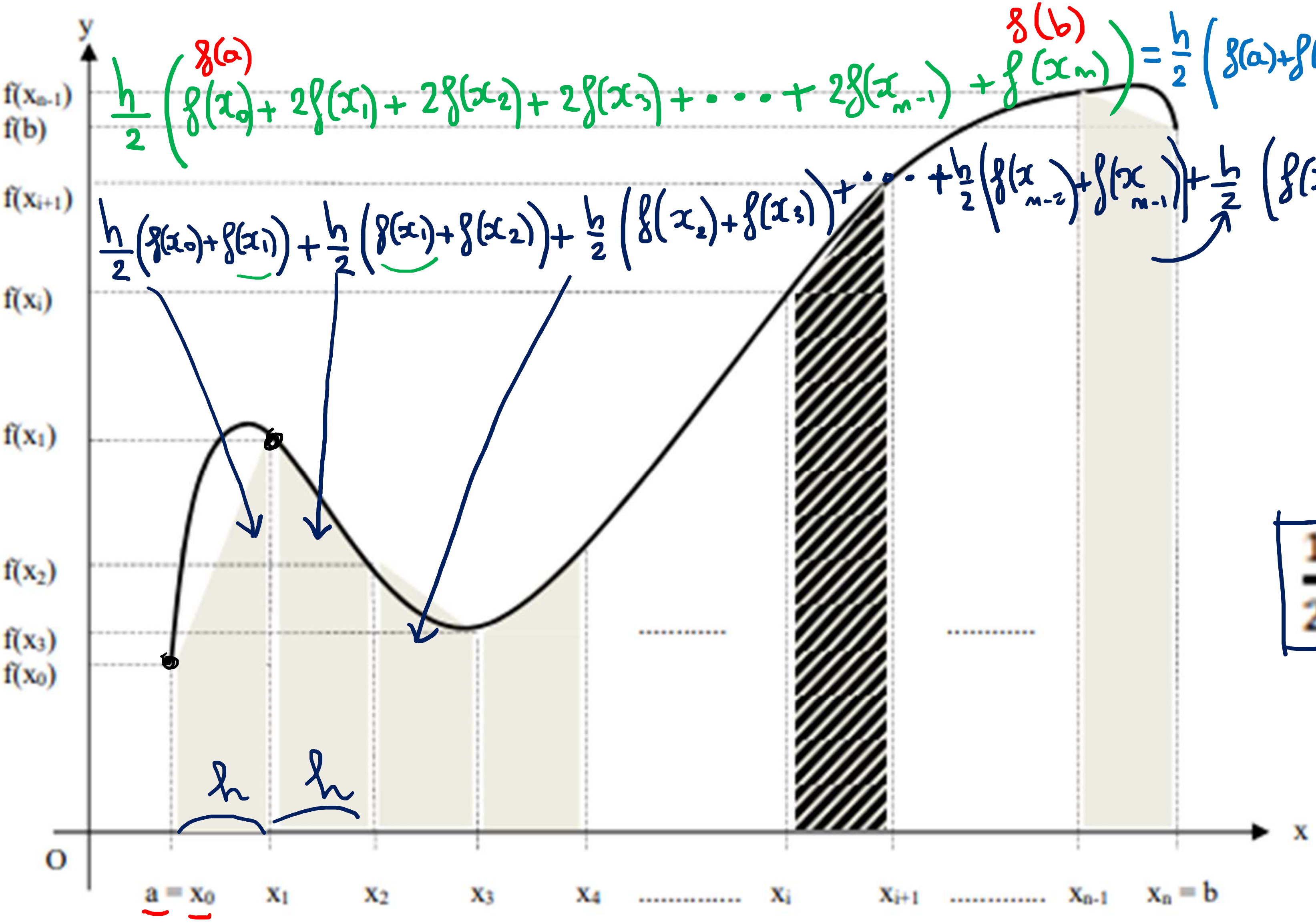
Page 17 TD/TP OL

L'aire d'un trapèze de base b, de petite hauteur h et de grande hauteur H est : $\frac{1}{2}b(h+H)$

$$\frac{h}{2}\left(\overset{f(a)}{f(x_0)}+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+\cdots+2f(x_{n-1})+\overset{f(b)}{f(x_n)}\right)=\frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right)$$

Page 17 TD/TP OL

$$\frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)\right)+\frac{h}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)+\frac{h}{2}\left(f(x_2)+f(x_3)\right)+\cdots+\frac{h}{2}\left(f(x_{n-2})+f(x_{n-1})\right)+\frac{h}{2}\left(f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$



$$\boxed{\frac{1}{2}b(h+H)}$$

Notes

Page 17 TD/TP OL

$$\boxed{\text{On obtient alors : } \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \times \left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right]}$$

2) <u>Evaluation de l'erreur</u>

Notons $\Delta = \underbrace{\overbrace{\int_a^b f(x)dx}^{I}}_{\text{exacte}} - \underbrace{\overbrace{\frac{h}{2}\times[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)]}^{I_T}}_{\text{approchée}}$

On pose $M = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, on admet qu'alors : $|\Delta| \le M.\frac{(b-a)^3}{12n^2}$.

Page 18 TD/TP OL

3) <u>Application</u> Déterminer le nombre de sous-intervalles n à partir duquel on pourra obtenir, à l'aide de la méthode des trapèzes, une valeur approchée de $I = \int_1^2 x^2dx$ à 10^{-2} près. Puis, pour n=10, évaluer en utilisant un tableur et la méthode des trapèzes une valeur approchée de I.

On cherche n tel que $|\Delta| \le 10^{-2}$

$f(x) = x^2$

On sait que $|\Delta| \le M.\frac{(b-a)^3}{12n^2} \le 10^{-2}$ ici $a = 1 ; b = 2$ $f'(x) = 2x$ $f''(x) = 2$

où $M = \sup_{[1,2]} |\underbrace{f''(x)}_{2}| = 2$

$\Leftrightarrow |\Delta| \le 2.\frac{(2-1)^3}{12n^2} \le 10^{-2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6n^2} \le 10^{-2} \underset{\text{inverse}}{\Leftrightarrow} 6n^2 \ge 10^2 \underset{\%6>0}{\Leftrightarrow} n^2 \ge \frac{100}{6} \underset{\text{racine carrée}}{\Leftrightarrow} n \ge \sqrt{\frac{100}{6}} = \frac{10}{\sqrt{6}}$

$\simeq 4,08$

<u>Concl</u> : On obtient une val. approchée de I à 10^{-2} près à partir de 5 sous-intervalles

Notes

Page 18 TD/TP OL

a	b	n	h	i	a+ih	f(a+ih)
1	2	10	0,1	0	1	1
				1	1,1	1,21
				2	1,2	1,44
				3	1,3	1,69
				4	1,4	1,96
				5	1,5	2,25
				6	1,6	2,56
				7	1,7	2,89
				8	1,8	3,24
				9	1,9	3,61
				10	2	4

Val approché	IT	2,335
Val exacte	I	2,33333333
Erreur absolu	Delta	0,00166667

Avec 10 intervalles, on obtient la valeur de I approchée à 10^{-2} près, soit à un chiffre après la virgule : 2,3

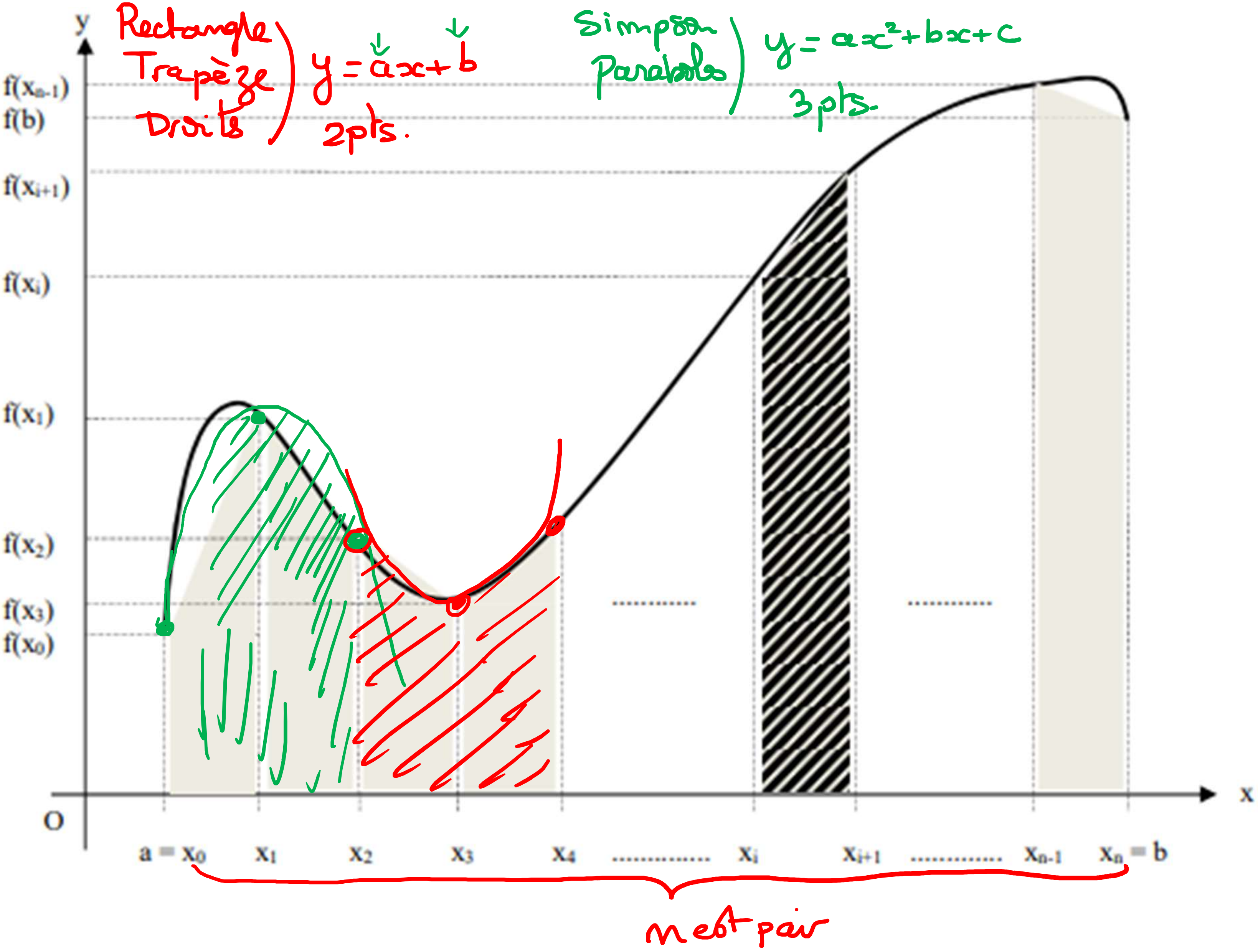
Notes

Page 19 TD/TP OL

III. Méthode de Simpson :

1) Principe

Dans la méthode de Simpson l'arc $M_{i-1}M_iM_{i+1}$ de la courbe est remplacé par l'arc de parabole (P) qui passe par les points M_{i-1}, M_i, M_{i+1} :



Page 17 TD/TP OL

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+4\underbrace{\sum_{k=0}^{n/2-1} f(a+\underbrace{(2k+1)}_{i\ \text{impair}}h)}_{\text{Somme des impairs}} + 2\underbrace{\sum_{k=1}^{n/2-1} f(a+\underbrace{2k}_{i\ \text{pair}}h)}_{\text{Somme des pairs}} \right]$$

Page 19 TD/TP OL

$$4\Big(\underbrace{f(a+h)}_{k=0}+\underbrace{f(a+3h)}_{k=1}+f(a+5h)+\dots+\underbrace{f(a+(n-1)h)}_{k=\frac{n}{2}-1}\Big)+2\Big(\underbrace{f(a+2h)}_{k=1}+f(a+4h)+\dots+f(a+(n-2)h)\Big)$$

$$2\left(\frac{n}{2}-1\right)+1 = n-2+1$$
$$= n-1$$

$$2\left(\frac{n}{2}-1\right) = n-2$$

2) Evaluation de l'erreur

Page 20 TD/TP OL

Notons $\Delta = \int_a^b f(x)dx - S$

On pose $M = \sup_{x \in [a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right|$, on admet qu'alors : $|\Delta| \leq M . \frac{(b-a)^5}{2880 n^4}$,

Exemple Pour n=10, évaluer en utilisant un tableur et la méthode de Simpson une valeur approchée de $I = \int_1^2 x^2 dx$. Quelle est l'incertitude obtenue ?

Tableur :

				C	D	E		
a	b	n	h	i	a+ih	f(a+ih)	pairs	impairs
			2	0			$=Si(estpair(C2);E2;\emptyset)$	$=Si(est.impair(C2);E2;\emptyset)$
				1			$\emptyset$	
				2				$\emptyset$
				3			$\emptyset$	
				⋮				$\emptyset$

alors sinon

Somme : $\boxed{}$ $\boxed{}$

val. approchée I_s :

val. exacte $I = 7/3$

erreur $|\Delta| = |I_s - I|$

Notes

a	b	n	h	i	a+ih	f(a+ih)	Pairs	Impairs			
1	2	10	0,1	0	1	1	1	0			
				1	1,1	1,21	0	1,21			
				2	1,2	1,44	1,44	0			
				3	1,3	1,69	0	1,69			
				4	1,4	1,96	1,96	0	Val approché	IS	2,333333333
				5	1,5	2,25	0	2,25	Val exacte	I	2,333333333
				6	1,6	2,56	2,56	0	Erreur absolu	Delta	0,000000000000E+00
				7	1,7	2,89	0	2,89			
				8	1,8	3,24	3,24	0			
				9	1,9	3,61	0	3,61			
				10	2	4	4	0			
						Sommes	9,2	11,65			

L'erreur est nulle, car la fonction intégrée est un carré, et que la méthode de Simpson approche la courbe de f par des bouts de paraboles.

I. Evaluation de $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$

Nc

1) Evaluer au brouillon la valeur exacte de cette intégrale. $I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_1^2 = \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{=0} = \ln 2$ val. exacte.

Page 21 TD/TP OL

2) A l'aide du logiciel Excel, évaluer la valeur de l'intégrale $\underbrace{\int_1^2 \frac{1}{x} dx}_{= \int_a^b f(x)dx}$ en utilisant les méthodes d'intégration numérique suivantes :

- Méthode des rectangles, on déterminera au préalable le nombre de sous intervalles n, à partir duquel on pourra obtenir une valeur approchée de $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ à 10^{-2} près. Puis, on appliquera la méthode pour n=50. Evaluer alors, l'erreur commise sur l'estimation de l'intégrale en comparant le résultat obtenu avec la valeur exacte déterminée par calcul. feuille Tableur

- Méthode des trapèzes, on déterminera au préalable le nombre de sous intervalles n, à partir duquel on pourra obtenir une valeur approchée de $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ à 10^{-4} près. Puis, on appliquera la méthode pour n=20. Evaluer alors, l'erreur commise sur l'estimation de l'intégrale en comparant le résultat obtenu avec la valeur exacte déterminée par calcul. feuille Tableur

- Méthode de Simpson (on pourra se servir de la fonction EST.PAIR et EST.IMPAIR afin de distinguer les cas pairs et impairs). On déterminera au préalable le nombre de sous intervalles n, à partir duquel on pourra obtenir une valeur approchée de $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ à 10^{-4} près. Puis, on appliquera la méthode pour n=10. Evaluer alors, l'erreur commise sur l'estimation de l'intégrale en comparant le résultat obtenu avec la valeur exacte déterminée par calcul. feuille Tableur.

Notes

1. $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

valeur exacte

Page 21 TD/TP OL

2. Méthode des rectangles :

On cherche n tel que $|\Delta| < 10^{-2} \Leftrightarrow$ (*) $|\Delta| \leq M.\frac{(b-a)^2}{2n} \leq 10^{-2}$ où $M = \sup_{[a,b]} |f'(x)|$

ici $f(x) = \frac{1}{x}$; $a = 1$; $b = 2$.

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\quad M = \sup_{[1,2]} \frac{1}{x^2} = 1.$ $\quad$ (*) $\Leftrightarrow |\Delta| \leq \frac{1}{2n} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow 2n \geq 10^2$

$\Leftrightarrow \boxed{n \geq 50.}$

Notes

Page 21 TD/TP OL

(1) $$I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

valeur exacte

(2) Méthode des rectangles :

On cherche n tel que $|\Delta| < 10^{-2} \Leftarrow (*)\ |\Delta| \le M \cdot \frac{(b-a)^2}{2n} \le 10^{-2}$ où $M = \sup_{[a,b]} |f'(x)|$

ici $f(x) = \frac{1}{x}$; $a = 1$; $b = 2$.

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $M = \sup_{[1,2]} \frac{1}{x^2} = 1$.

$(*) \Leftrightarrow |\Delta| \le \frac{1}{2n} < 10^{-2} \Leftrightarrow 2n \geq 10^2$

$\Leftrightarrow \boxed{n \geq 50.}$

Méthode des rectangles						
a	1					
b	2					
h	0,02					
n	50			Valeur exacte		0,69314718
				valeur approchée		0,68817218
i	a+ih	f(a+ih)		incertitude absolue		0,004975
0	1	1				
1	1,02	0,98039216				
2	1,04	0,96153846				
3	1,06	0,94339623				
4	1,08	0,92592593				
5	1,1	0,90909091				
6	1,12	0,89285714				
7	1,14	0,87719298				
8	1,16	0,86206897				

$\simeq 0{,}69$ 2 ch ap la virgule

$< 10^{-2}$

Méthode des trapèzes :

Notes

On cherche n tel que $|\Delta| \leq 10^{-4}$ $\Longleftrightarrow$ (*) $|\Delta| \leq M.\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$ où $M = \sup_{[1,2]} |f''(x)|$

Page 21 TD/TP OL

$f''(x) = \left(-x^{-2}\right)' = 2x^{-3} = \dfrac{2}{x^3} \Rightarrow M = \sup_{[1,2]} \dfrac{2}{x^3} = 2.$

(*) $\Longleftrightarrow |\Delta| \leq \dfrac{2}{12n^2} \leq 10^{-4} \Longleftrightarrow 6n^2 \geq 10^4$

$\Longleftrightarrow n^2 \geq \dfrac{10^4}{6}$

$\Longleftrightarrow n \geq \dfrac{10^2}{\sqrt{6}} \simeq 40{,}8$

$\Longleftrightarrow \underline{n \geq 41}$

	A	B	C	D	E	F	G	H
8	i	a+ih	f(a+ih)					
9	0	1	1					
10	1	1,05	0,95238095					
11	2	1,1	0,90909091					
12	3	1,15	0,86956522					
13	4	1,2	0,83333333		Valeur exacte		0,69314718	
14	5	1,25	0,8		valeur approchée		0,69330338	
15	6	1,3	0,76923077		incertitude absolue		0,0001562	
16	7	1,35	0,74074074					
17	8	1,4	0,71428571					
18	9	1,45	0,68965517					
19	10	1,5	0,66666667					
20	11	1,55	0,64516129					
21	12	1,6	0,625					
22	13	1,65	0,60606061					
23	14	1,7	0,58823529					
24	15	1,75	0,57142857					
25	16	1,8	0,55555556					
26	17	1,85	0,54054054					
27	18	1,9	0,52631579					
28	19	1,95	0,51282051					
29	20	2	0,5					

3 ch. ap. la virgule

$< 10^{-4}$

Notes

Méthode de Simpson:

Page 21 TD/TP OL

On cherche n tel que $|\Delta| \leq 10^{-4}$ $\overset{(*)}{\Longleftrightarrow}$ $|\Delta| \leq \dfrac{M(b-a)^5}{2880\, n^4}$ où $M = \sup_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

$f''(x) = 2x^{-3} \Rightarrow f^{(3)}(x) = -6x^{-4}$

$\Rightarrow f^{(4)}(x) = 24x^{-5}$

$M = \sup_{[1,2]} |f^{(4)}(x)| = \sup_{[1,2]} |24x^{-5}| = 24$

$(*) \Longleftrightarrow |\Delta| \leq \dfrac{24}{2880 n^4} \leq 10^{-4}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{2880 n^4}{24} \geq 10^{4} \Longleftrightarrow n^4 \geq \dfrac{24.10^4}{2880}$

$\Longleftrightarrow n \geq \sqrt[4]{\dfrac{24.10^4}{2880}} \simeq 3{,}02$

$\boxed{n \geq 4}$

k	a+ih	f(a+ih)	test i pair	test i impair
0	1	1	1	0
1	1,1	0,90909091	0	0,90909091
2	1,2	0,83333333	0,83333333	0
3	1,3	0,76923077	0	0,76923077
4	1,4	0,71428571	0,71428571	0
5	1,5	0,66666667	0	0,66666667
6	1,6	0,625	0,625	0
7	1,7	0,58823529	0	0,58823529
8	1,8	0,55555556	0,55555556	0
9	1,9	0,52631579	0	0,52631579
10	2	0,5	0,5	0
		Valeur exacte		0,69314718
		valeur approchée		0,69315023
		incertitude absolue		3,0501E-06