

Correction DS1

Exercice 1 : Calculer avec les nombres complexes (1.5 pts) 1,0 TB

Déterminer les parties réelles et imaginaires du nombre complexe ci-dessous :

$$\frac{3+2j}{1-4j} = \frac{(3+2j)(1+4j)}{(1-4j)(1+4j)} = \frac{3+12j+2j-8}{1+16} = \frac{-5+14j}{17} = -\frac{5}{17} + \frac{14}{17}j$$

la partie réelle de ce nombre est : $-\frac{5}{17}$ ✓

et la partie imaginaire de ce nombre est $\frac{14}{17}$ ✓

20
20 Excellent Travail

Exercice 2 Nombres complexes (6,5 pts) (6,5)

1) Complétez le tableau ci-dessous :

$\underline{Z}$	$\text{Re}(\underline{Z})$	$\text{Im}(\underline{Z})$	Z	$\text{Arg}(\underline{Z})$	Autre écriture	$\underline{Z}^*$ exponentielle et algébrique
$2.e^{-j\frac{3\pi}{4}}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	2	$-\frac{3\pi}{4}$	algébrique $\underline{Z} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}j$	$\underline{Z}^* = 2 e^{j\frac{3\pi}{4}}$ $= -\sqrt{2} + \sqrt{2}j$ -
$-\sqrt{3} + j$	$-\sqrt{3}$	1	2	$\frac{5\pi}{6}$	exponentielle $\underline{Z} = 2 e^{j\frac{5\pi}{6}}$	$\underline{Z}^* = 2 e^{-j\frac{5\pi}{6}}$ $= -\sqrt{3} - j$ -
$-3e^{j\frac{\pi}{6}}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{3}{2}$	3	$-\frac{5\pi}{6}$	exponentielle $\underline{Z} = 3 e^{-j\frac{5\pi}{6}}$	$\underline{Z}^* = 3 e^{j\frac{5\pi}{6}}$ $\underline{Z}^* = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}j$ TB

2) Déterminer le module et un argument de : $\underline{Z} = \frac{(1+2jx)^6}{(-1-3jx)^4}$ où x est réel. Simplifier au maximum les résultats obtenus.

on a : $|1+2jx| = \sqrt{1^2 + 4x^2} = \sqrt{1+4x^2}$ et $|-1-3jx| = \sqrt{1^2 + 9x^2} = \sqrt{1+9x^2}$...

alors $\underline{Z} = \frac{\sqrt{1+4x^2}^6}{\sqrt{1+9x^2}^4}$ et on a : $\arg((1+2jx)^6) = 6 \arg(1+2jx) = 6 \arctan(2x)$...

et $\arg((-1-3jx)^4) = 4 \arg(-1-3jx) = 4 \arctan(3x) + 4\pi$ (TB)

Exercice 3 : Sinusoïde (3 pts)

1) La fonction f , définie par : $f(t) = \cos\left(5t - \frac{\pi}{3}\right)$ est-elle paire, impaire ou ni l'un ni l'autre.

Elle est ni paire, ni impaire. En effet :

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(5\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(4\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-5\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-6\frac{\pi}{3}\right) = \cos(-2\pi) = 1$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ et } f\left(-\frac{\pi}{3}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

2) A l'aide de la formule $\cos(a-b)$, écrire autrement la fonction f .

$$f(t) = \cos(5t) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin(5t) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cos(5t) + \sqrt{3} \sin(5t)}{2}$$

3) En déduire : la fréquence, la période, l'amplitude et le déphasage de la fonction :

$$\pi \rightarrow 180^\circ$$

$$-\frac{\pi}{3} \rightarrow -60^\circ$$

$$g(t) = \cos(5t) + \sqrt{3}\sin(5t) = 2f(t)$$

$$\text{donc } g(t) = 2\cos\left(5t - \frac{\pi}{3}\right) \quad \bullet \text{ On lit : amplitude} = 2 ; \text{ déphasage} = -\frac{\pi}{3} = -60^\circ$$

$$\bullet \text{ On calcule : - période : } \omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5}$$

$$\text{- fréquence : } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{2\pi}{5}} = \frac{5}{2\pi}$$

13

Exercice 4 : Equation trigonométrique (3 pts) (3)

Résoudre l'équation : $2 \sin^2(x) + 7 \cos(x) - 5 = 0$

on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ sig $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

alors $2(1 - \cos^2 x) + 7 \cos x - 5 = 0$ sig $2 - 2 \cos^2 x + 7 \cos x - 5 = 0$

sig $-2 \cos^2 x + 7 \cos x - 3 = 0$ sig $2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 = 0$

$a = 2$; $b = -7$; $c = 3$ alors $\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4 \times 2 \times 3 = 25 = 5^2$

alors $\cos x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $\cos x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
 $= \frac{7 - 5}{4}$ ou $\cos x = \frac{7 + 5}{4}$

$\cos x = \frac{1}{2}$

ou $\cos x = 3$ impossible $-1 \leq \cos x \leq 1$

alors

~~$\cos x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$~~ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$ T.B.

Exercice 5 Trigonométrie et calcul d'intégrales (6 pts) ⑥

- 1) On rappelle la formule de la valeur moyenne d'une fonction T-périodique : $V_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$
Montrer à l'aide du calcul d'une intégrale que la valeur moyenne de la fonction u, définie par :
 $u(t) = 7 \cdot \sin(3t + \frac{\pi}{3})$ est nulle. On déterminera d'abord la période de u :

$$\text{on a } T = \frac{1}{f} \text{ et } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3}{2\pi} \text{ alors } T = \frac{2\pi}{3}$$

$$V_{moy} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} 7 \sin(3t + \frac{\pi}{3}) dt = \frac{7}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin(3t + \frac{\pi}{3}) dt$$

$$= \frac{7}{2\pi} \left[-\frac{1}{3} \cos(3t + \frac{\pi}{3}) \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{7}{2\pi} \left(-\frac{1}{3} \cos\left(\frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(0 + \frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$= \frac{7}{2\pi} \left(-\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \right) = 0 \text{ alors } V_{moy} = 0$$

2) Compléter :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$$

Après avoir sommé les formule ci-dessus, en déduire une expression de $\sin(a) \cdot \cos(b)$ en fonction de $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$:

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a + \sin a \cos b - \sin b \cos a$$
$$= 2 \sin a \cos b$$

$$\Rightarrow \sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$

Linéariser alors $\sin(3t) \cdot \cos(5t)$:

$$\sin(3t) \cos(5t) = \frac{\sin(8t) + \sin(-2t)}{2}$$

$$= \frac{\sin(8t) - \sin(2t)}{2}$$

3) En déduire la valeur de l'intégrale : $I = \int_0^{\pi/4} \sin(3t) \cdot \cos(5t) dt$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (\sin(8t) - \sin(2t)) dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(8t)}{8} + \frac{\cos(2t)}{2} \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\underbrace{-\cos(2\pi)}_{=0} + \underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{=0} + \frac{\cos(0)}{2} - \frac{\cos(0)}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4}$$