Correction DM7

*) $D_h = \mathbb{R}$; $h(t) = \sqrt{t^2+1}$

$$h'(t) = \frac{(t^2+1)'}{2\sqrt{t^2+1}} = \frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}.$$

*) $D_\ell = \mathbb{R}$, $\ell(\omega) = \dfrac{\omega}{\sqrt{\omega^2+1}}$

$$\ell'(\omega) = \frac{(\omega)'\sqrt{\omega^2+1} - \omega\left(\sqrt{\omega^2+1}\right)'}{\sqrt{\omega^2+1}^{\,2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\omega^2+1} - \omega \times \dfrac{\omega}{\sqrt{\omega^2+1}}}{\sqrt{\omega^2+1}^{\,2}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{\omega^2+1}^{\,2} - \omega^2}{\sqrt{\omega^2+1}}}{\sqrt{\omega^2+1}^{\,2}}$$

$$= \frac{\cancel{\omega^2} + 1 - \cancel{\omega^2}}{\sqrt{\omega^2+1}^{\,2} \times \sqrt{\omega^2+1}}$$

$D_{h'} = \mathbb{R}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}^{\,3}}$$

6) $D_X = \mathbb{R}^*$; $X'(\omega) = 2\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)'$

$= 2\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\left(L + \frac{1}{C\omega^2}\right)$

$\left(\frac{-1}{Cx}\right)' = \frac{-1}{C}\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{Cx^2}$.

$D_{X'} = \mathbb{R}^*$

7) $D_z = \mathbb{R}$ alors $z'(\omega) = \dfrac{(R^2 + L^2\omega^2)'}{2\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \dfrac{2L^2\omega}{2\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$

$z'(\omega) = \dfrac{L^2\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$. $\longrightarrow D_{z'} = \mathbb{R}$.

8) $D_i = \mathbb{R}$; $i'(t) = -I\sqrt{2}\omega \sin(\omega t + \varphi)$.

$D_{i'} = \mathbb{R}$

9) $f_0(C) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L}} \times \dfrac{1}{\sqrt{C}}$ $\quad D_{f_0} = \mathbb{R}^{+*}$

$f'_0(C) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L}} \times \left(\dfrac{-1}{2\sqrt{C}^3}\right) = \dfrac{-1}{4\pi\sqrt{L}\sqrt{C}^3}$

$D_{f'_0} = \mathbb{R}^{*+}$

10) $W(C) = \frac{1}{2} \times \frac{Q^2}{C}$

$D_W = \mathbb{R}^*$

$W'(C) = \frac{1}{2} Q^2 \times \left(-\frac{1}{C^2}\right)$

$\boxed{W'(C) = -\frac{Q^2}{2C^2}}$

$D_{W'} = \mathbb{R}^*$

11) $W(Q) = \frac{1}{2} \times \frac{Q^2}{C}$;

$D_W = \mathbb{R}$

$W'(Q) = \frac{1}{2} \times \frac{2Q}{C}$

$\boxed{W'(Q) = \frac{Q}{C}}$

$D_W = \mathbb{R}$

12) $V(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2} - x\right)$

$D_V = \mathbb{R}$

$V'(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+R^2}} - 1\right)$

$V'(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} - 1\right)$

$D_{V'} = \mathbb{R}$

Ex4 : Pour que la puissance dissipée soit maximum il faut que : $P'(R) = 0$

ssi $$\frac{E^2 \times \left(R'(R+r)^2 - ((R+r)^2)' \times R\right)}{(R+r)^4} = 0$$

$$= \frac{E^2 \left((R+r)^2 - 2(R+r)R\right)}{(R+r)^4} = 0$$

$$= \frac{E^2 (R+r)\left[R+r-2R\right]}{(R+r)^4} = 0$$

$$= \frac{E^2 (r-R)}{(R+r)^3} = 0$$

ssi $r - R = 0$ ssi $R = r$.

tableau de signe :

R	$-\infty$	$-r$		r	$+\infty$
$E^2(-R+r)$	$+$	‖	$+$	0	$-$
$\dfrac{1}{(R+r)^2}$	$-$	‖	$+$		$+$
$P'(R)$	$-$	‖	$+$		$-$
P	$\searrow$	‖	$\nearrow$	$\dfrac{E^2}{4r}$	$\searrow$

$E^2(-R+r) = 0$

$\Leftrightarrow -R+r = 0$

$\Leftrightarrow -R = -r$

$\Leftrightarrow R = r$

$\dfrac{1}{(R+r)^3} = 0$

or $(R+r)^3 \neq 0$

car on ne peut pas diviser par 0.

donc pas de solution

et $R \neq -r$.

$$\lim_{R \to r} P(R) = \frac{E^2 r}{(r+r)} = \frac{E^2 r}{4r^2}$$

$\lim_{R \to r} P(r) = \dfrac{E^2}{4r}$. $\dfrac{E^2}{4r}$ est le maximume.

Donc le maximum de la puissance dissipé est atteint lorsque $R = r$.