IUT de Toulon
GEII2 ROBOCOM

Nom :
Prénom :

Examen D'Outils logiciels de Mathématiques

Durée : 45 min. **Documents : Aucun** Barème : approximatif

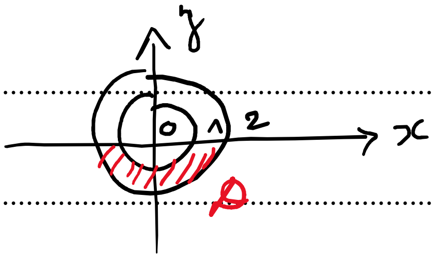
Exercice 1 Calcul d'intégrales doubles (5 pts)

1) Calculer à l'aide d'un passage en coordonnées polaires :

$J = \iint_D (3x + 4y^2).dxdy$ où $D = \{(x,y)/ y \leq 0$ et $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. On représentera D.

intérieur disque de centre O et de rayon 2

extérieur du disque de centre O et de rayon 1.



$\Delta = \{(r,\theta) / 1 \leq r \leq 2 \; ; \; \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$

$$J = \iint_\Delta \left(3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta\right) r\,dr\,d\theta = \iint_\Delta \left(3\cos\theta + 4r\underbrace{\sin^2\theta}_{\frac{1-\cos(2\theta)}{2}}\right) r^2\,dr\,d\theta$$

$$J = \iint_\Delta \left(3\cos\theta + 2r - 2r\cos(2\theta)\right) r^2\,dr\,d\theta$$

$$= \int_1^2 r^2 \int_\pi^{2\pi} \left(3\cos\theta + 2r - 2r\cos(2\theta)\right) d\theta\,dr$$

$$= \int_1^2 r^2 \left[3\sin\theta + 2r\theta - r\sin(2\theta)\right]_\pi^{2\pi} dr$$

$$= \int_1^2 r^2 \left(\overbrace{3\sin 2\pi}^{0} + 4\pi r - \overbrace{r\sin(4\pi)}^{0} - \overbrace{3\sin\pi}^{0} - 2\pi r + \overbrace{r\sin 2\pi}^{0}\right) dr$$

$$= \int_1^2 r^2 (4\pi r - 2\pi r)\,dr = \int_1^2 2\pi r^3\,dr = 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2$$

$$J = \frac{\pi}{2}(2^4 - 1) = \frac{15\pi}{2}$$

Exercice 2 Recherche de points critiques d'une fonction à plusieurs variables. (5 pts)

Soit f, la fonction à deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = (y^2 + x^2 - 2x + y + 2).e^{-y}$

1) Calculer les dérivées partielles premières de f :

$f'_x(x,y) = (2x-2)\,e^{-y}$

$f'_y(x,y) = (2y+1)\,e^{-y} - (y^2+x^2-2x+y+2)\,e^{-y} = (y-1-y^2-x^2+2x)\,e^{-y}$

2) Déterminer les éventuels points critiques de f. Combien y-a-t-il de points critiques ?

$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-2)\,e^{-y} = 0 \\ (y-1-y^2-x^2+2x)\,e^{-y} = 0 \end{cases} \overset{e^{-y} \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 1 \\ \underbrace{y-1-y^2-1+2}\; = 0 \end{cases}$

$-y^2+y = 0 \Leftrightarrow y(-y+1) = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$ ou $y = 1$

Les points critiques ~~sont~~ donc :

$(1;0)$ et $(1;1)$

3) Calculer les dérivées partielles secondes de f :

$f''_{x^2} = 2e^{-y}$; $f''_{y^2} = (1-2y)\,e^{-y} - (y-1-y^2-x^2+2x)\,e^{-y}$

$f''_{y^2} = (1-2y-y+1+y^2+x^2-2x)\,e^{-y} = (2-3y+y^2+x^2-2x)\,e^{-y}$

$f''_{xy} = -(2x-2)\,e^{-y} = (2-2x)\,e^{-y}$

4) Déterminer la nature des points critiques trouvés à la question 2).

points critiques	$(1;0)$	$(1;1)$
$f''_{x^2} = 2e^{-y} = r$	$2 > 0$	$2e^{-1}$
$f''_{xy} = (2-2x)\,e^{-y} = s$	0	0
$f''_{y^2} = (2-3y+y^2+x^2-2x)\,e^{-y} = t$	1	$-e^{-1}$
$rt - s^2$	$2 > 0$	$-2e^{-2} < 0$
	min. local	pt. selle