Corrigé du TP tableaux blancs

Q1 Application 5 $f(x,y) = a(1-x^2-y^2) \quad \forall (x,y) \in \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 1\}$.

f est une densité de probabilité lorsque:

1) $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathcal{D}$

2) $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = 1$.

1) $f(x,y) = a(\underbrace{1-x^2-y^2}_{\geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathcal{D}}) \geq 0 \iff a \geq 0$

à var. séparables

$$2) \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Delta} a(1-r^2)\,r\,dr\,d\theta = a\int_0^1 (r-r^3)\,dr \times \int_0^{2\pi} d\theta$$

$\Delta = [0;1] \times [0;2\pi]$ rectangle

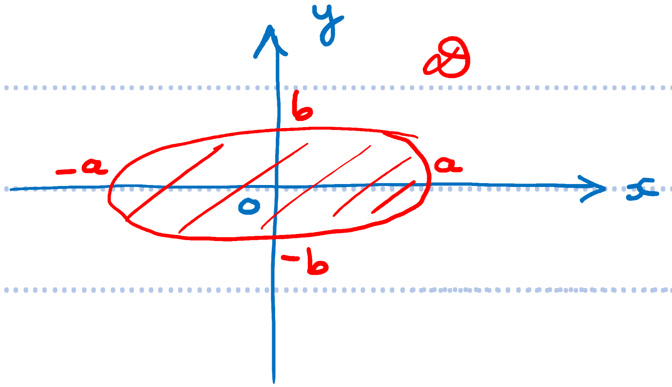
$$= a\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 \times 2\pi = a \times \frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{a\pi}{2}$$

f est une loi de probabilité si et seulement si $a = \frac{2}{\pi}$

Q2) **Application 2 :** $\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ $a>0,\ b>0.$

On calcule l'aire de l'ellipse $\mathcal{D}$ à l'aide de la formule :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} 1 . dx\, dy$$



changement de variable : $\begin{cases} x = a r \cos\theta \\ y = b r \sin\theta \end{cases}$

$$\Delta = \left\{ (r,\theta) \,/\, \frac{a^2 r^2 \cos^2\theta}{a^2} + \frac{b^2 r^2 \sin^2\theta}{b^2} \leq 1 \right\}$$

$$\Delta = \left\{ (r,\theta) \,/\, r^2 \leq 1 \right\} = [0;1] \times [0;2\pi].$$

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta \\ y'_r & y'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr\cos^2\theta + abr\sin^2\theta = abr.$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \iint_{\underbrace{[0;1]\times[0;2\pi]}_{\leftarrow \text{ rectangle}}} \overbrace{abr\, dr\, d\theta}^{\text{à var. séparables}} = ab . \int_0^1 r\, dr \times \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{ab\, 2\pi}{2} = \pi ab.$$

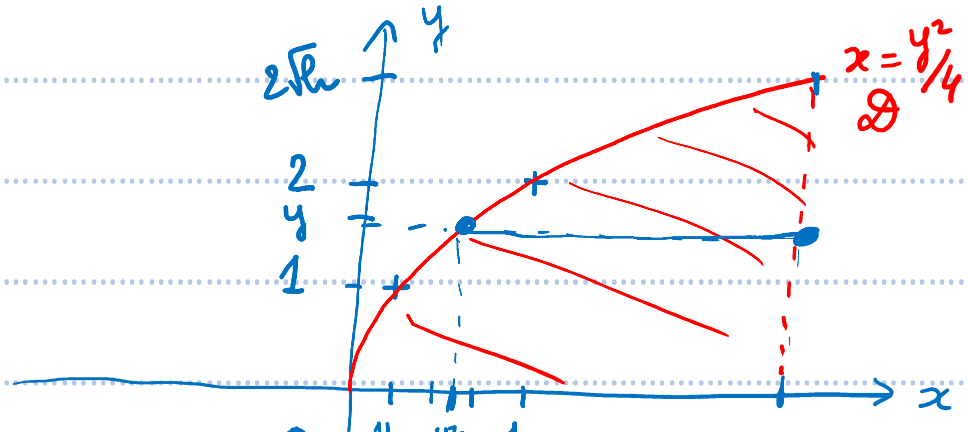
Application 3

Not

P3

Calculer les coordonnées du centre de gravité de la surface qui se trouve dans le demi-plan y≥ 0 et qui est limitée par la courbe d'équation $y^2 - 4x = 0$, la droite d'équation y = 0 et la droite d'équation x = h (h>0). On suppose que $\mu(x,y) = 1$.

$$x_G = \frac{1}{m}\iint_D x.\mu(x,y)\,dx\,dy \quad \text{où} \quad m = \iint_D \mu(x,y)\,dx\,dy$$



$$y^2 - 4x = 0 \iff x = \frac{y^2}{4}$$

$(\text{dom}\; x \geq 0)$

$$h = \frac{y^2}{4} \iff y = 2\sqrt{h}$$

$$m = \iint_D dx\,dy = \int_0^{2\sqrt{h}}\int_{y^2/4}^{h} dx\,dy = \int_0^{2\sqrt{h}}\left(h - \frac{y^2}{4}\right)dy$$

$$m = \left[hy - \frac{y^3}{12}\right]_0^{2\sqrt{h}} = 2h\sqrt{h} - \frac{2h\sqrt{h}}{3}$$

$$m = \frac{4h\sqrt{h}}{3}$$

$$x_G = \frac{3}{4h\sqrt{h}}\int_0^{2\sqrt{h}}\int_{y^2/4}^{h} x\,dx\,dy = \frac{3}{4h\sqrt{h}}\int_0^{2\sqrt{h}}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{y^2/4}^{h}dy = \frac{3}{4h\sqrt{h}}\int_0^{2\sqrt{h}}\left(\frac{h^2}{2} - \frac{y^4}{32}\right)dy$$

Notes

$$x_G = \frac{3}{4h\sqrt{h}}\left[\frac{h^2}{2}y - \frac{y^5}{160}\right]_0^{2\sqrt{h}} = \frac{3}{4h\sqrt{h}}\left(h^2\sqrt{h} - \frac{32\,h^2\sqrt{h}}{160}\right)$$

$$= \frac{3}{4h\sqrt{h}} \cdot h^2\sqrt{h}\,\underbrace{\left(1 - \frac{1}{5}\right)}_{\frac{4}{5}}$$

$$x_G = \frac{3h}{5}$$

$$y_G = \int_0^{2\sqrt{h}}\int_{y^2/4}^{h} y\,dx\,dy = \int_0^{2\sqrt{h}} \underbrace{y\left(h - \frac{y^2}{4}\right)}_{yh - \frac{y^3}{4}} dy$$

$$= \left[\frac{y^2}{2}h - \frac{y^4}{16}\right]_0^{2\sqrt{h}} = 2h^2 - h^2 = h^2$$

$$G\left(\frac{3h}{5} ; h^2\right)$$

Application 4

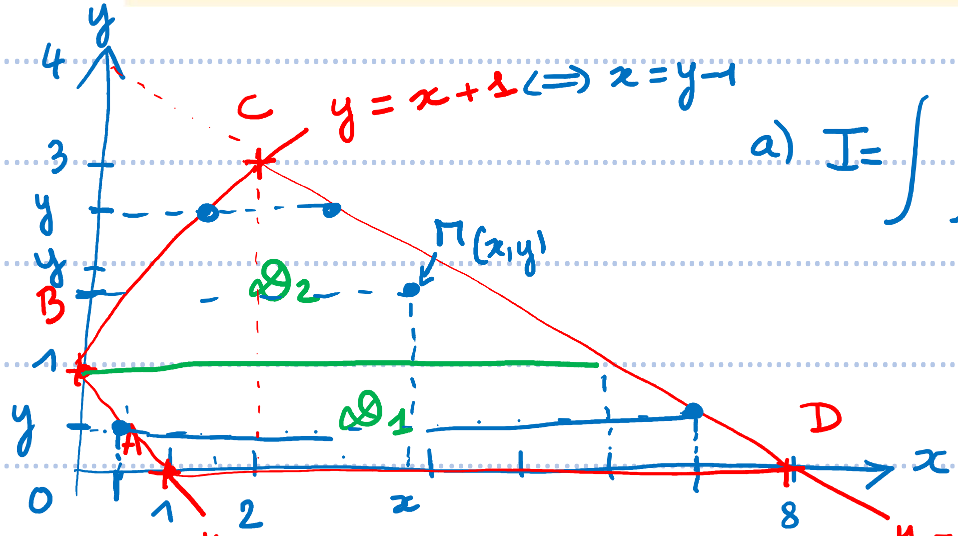
Q4

1. On désigne par $\mathscr{D}$ le domaine limité par le quadrilatère $ABCD$ où

$$A(1,0) \quad B(0,1) \quad C(2,3) \quad D(8,0)$$

(a) Faire une figure. Exprimer à l'aide d'intégrales simples en x et en y l'intégrale double $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy$.

(b) Calculer le moment d'inertie de $\mathscr{D}$ par rapport à l'axe Ox en supposant que la masse surfacique est égale à 1.



$y = -x+1 \Leftrightarrow x = 1-y$

$y = -\frac{3}{6}x + 4 = -\frac{1}{2}x + 4 \Leftrightarrow x = 8-2y$

a) $I = \displaystyle\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathscr{D}_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{\mathscr{D}_2} f(x,y)\,dx\,dy$

$$I = \int_0^1 \int_{1-y}^{8-2y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^3 \int_{y-1}^{8-2y} f(x,y)\,dx\,dy$$

b) Soit $M \in \mathscr{D}$, $d(M;Ox) = y$ donc $I = \displaystyle\iint_{\mathscr{D}} y^2 \cdot \mu\,dx\,dy = \iint_{\mathscr{D}} y^2\,dx\,dy$

$$I = \iint_D d(M,\Delta)^2 . \mu(x,y) . dxdy$$

Notes

$$I = \int_0^1 \int_{1-y}^{8-2y} y^2 \, dx\,dy + \int_1^3 \int_{y-1}^{8-2y} y^2 \, dx\,dy .$$

$$= \int_0^1 \left[x\right]_{1-y}^{8-2y} y^2 \, dy + \int_1^3 \left[x\right]_{y-1}^{8-2y} y^2 \, dy$$

$$= \int_0^1 \underbrace{(8-2y-1+y)\,y^2}_{7y^2-y^3} \, dy + \int_1^3 \underbrace{(8-2y-y+1)\,y^2}_{9y^2-3y^3} \, dy$$

$$= \left[7\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 + \left[3y^3 - \frac{3y^4}{4}\right]_1^3$$

$$\frac{81}{4} - \frac{12}{4} = \frac{69}{4}$$

$$= \frac{7}{3} - \frac{1}{4} + 81 - \frac{3.81}{4} - \left(3 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{3} - \frac{1}{4} + \frac{81}{4} - 3 + \frac{1}{2} = \frac{28 - 3 + 207}{12} = \frac{232}{12} = \frac{58}{3}$$

Application 1

Q5)

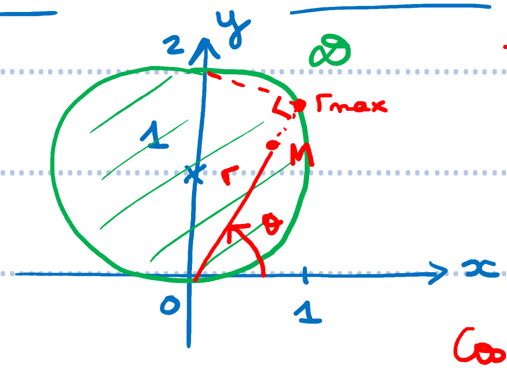
$$V = \iint_{\mathcal{D}} y \, dx\,dy \qquad \mathcal{D} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 - 2y \leq 0 \}$$

$$\iff x^2 + (y-1)^2 \leq 1.$$

$\mathcal{D} = D((0;1);1)$ ← disque, on passe en coordonnées polaires.

$$V = \iint_{\Delta} r \sin\theta \, . \, r \, dr \, d\theta$$

Recherche de Δ



Méth 1 Graphique.

$0 \leq \theta \leq \pi$

$0 \leq r \leq 2 \sin\theta$

$$\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}_{\sin\theta} = \frac{r_{max}}{2} \iff r_{max} = 2 \sin\theta$$

$$\Delta = \{ (r,\theta) / \ 0 \leq \theta \leq \pi \ ; \ 0 \leq r \leq 2 \sin\theta \}$$

Donc :

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin\theta} r^2 . \sin\theta \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3} . \sin\theta \right]_0^{2\sin\theta} d\theta$$

Méth 2 inégalité $\mathcal{D} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \underbrace{x^2 + y^2}_{} - 2y \leq 0 \}$

(pour θ : lecture graphique) $\iff r^2 - 2r \sin\theta \leq 0$

$$\iff \underbrace{r}_{>0} (r - 2\sin\theta) \leq 0 \iff r \leq 2 \sin\theta.$$

Notes

$$V = \int_0^{\pi} \frac{8\sin^4\theta}{3}\, d\theta.$$

$$V = \frac{8}{3}\times\frac{1}{8}\left[3\theta - \frac{4\sin(2\theta)}{2} + \frac{\sin(4\theta)}{4}\right]_0^{\pi}$$

$$V = \frac{1}{3}\left(3\pi\right) = \pi$$

Remarque : linéarisation de $\sin^4\theta$.

$$\sin^4\theta = (\sin^2\theta)^2 = \left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos(2\theta) + \frac{1+\cos(4\theta)}{2}\right)$$

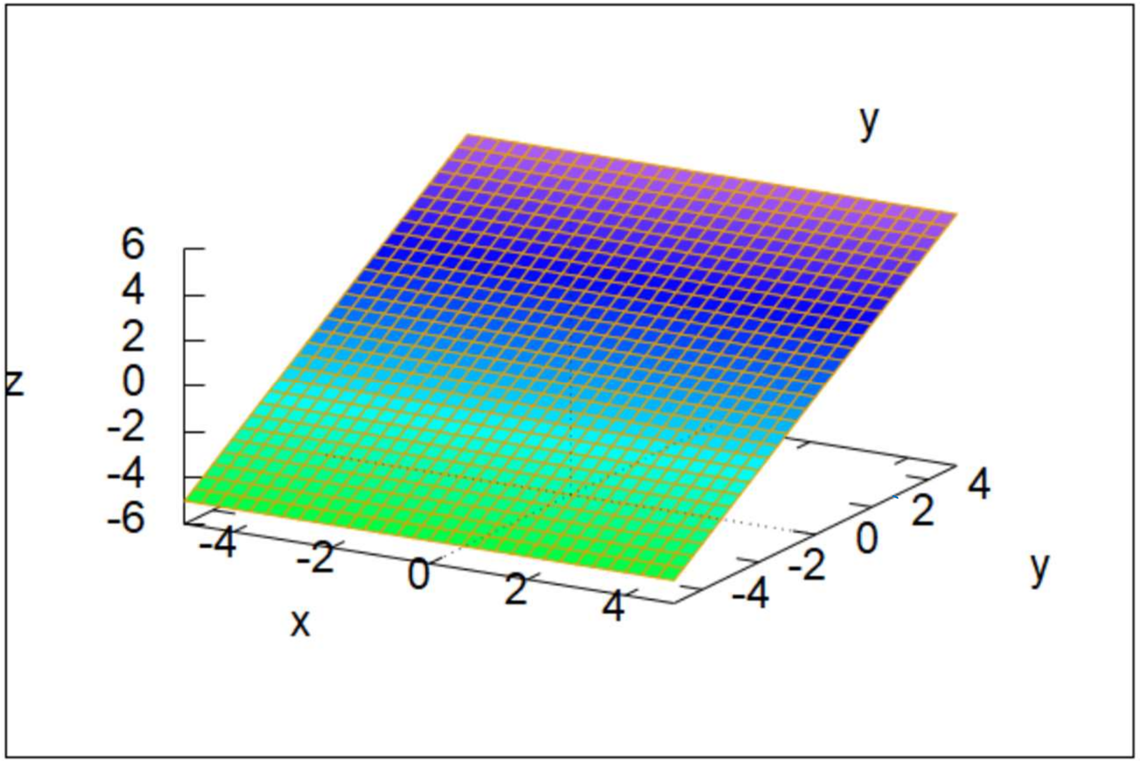
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - 2\cos(2\theta) + \frac{1}{2}\cos(4\theta)\right)$$

$$\sin^4\theta = \frac{1}{8}\left(3 - 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta)\right)$$

Notes

Interprétation de $V = \iint_{d((0;1);1)} y \, dx dy$

C'est le volume du domaine compris entre le plan (xOy), le plan d'équation $z=y$ délimité par disque de centre $(0;1)$ et de rayon 1 (dans le plan (xOy))



C'est donc le volume du domaine cylindrique droit de base le disque $d((0;1;0);1)$ (sur le plan (xOy)) et limité par le plan d'équation $z=y$.