Notes

Page 38 chapitre 1

# Partie D : Calcul d'intégrales Triples

## I. Généralités :

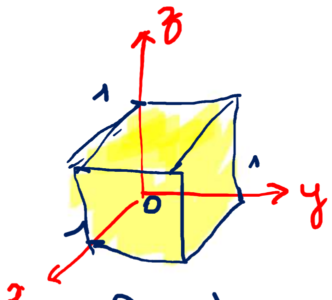
### 1) Domaine fermé de $\mathbb{R}^3$

**Définition** **On appelle domaine fermé de $\mathbb{R}^3$ tout domaine de l'espace délimité par une surface fermée**

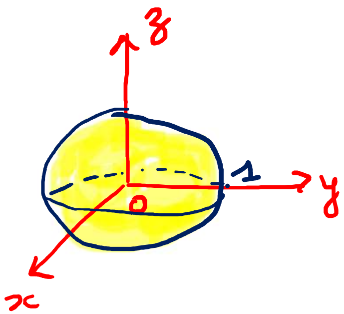
Exemples

$$D_1 = [0;1]\times[0;1]\times[0;1] = \{(x,y,z) \in IR^3 / x \in [0;1],\ y \in [0;1] \text{ et } z \in [0;1]\}$$

$$D_2 = \{(x,y,z) \in IR^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$ = boule de centre O et de rayon 1.



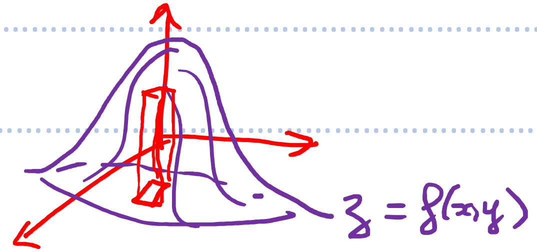

$\mathcal{D}_1$ est fermé.




$\mathcal{D}_2$ est fermé.

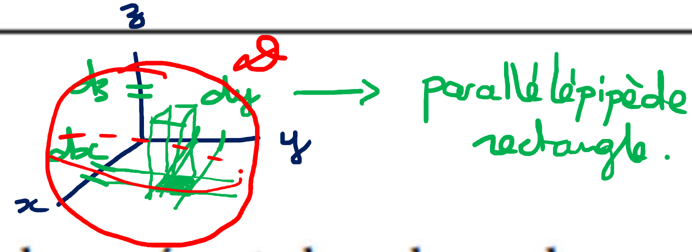
Notes

$\iint_{D} f(x,y)\,dx\,dy$




## 2) Intégrale triple

**Définition/théorème** **Soit f, une fonction continue dans D, un domaine fermé de $\mathbb{R}^3$.**
**Alors l'intégrale triple $I = \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$ existe.**




## 3) Applications

- Si $f(x,y,z) = 1 \ \forall (x,y,z) \in D$, alors $I = \iiint_D \underbrace{f(x,y,z)}_{1}\,dxdydz$ représente le volume du domaine D.

kg/m³

- Si f(x,y,z) est la masse volumique au point M(x,y,z) du domaine D, alors $I = \iiint_D \underbrace{f(x,y,z)}_{kg/m^3} \times \underbrace{dxdydz}_{m^3} \rightarrow kg$ est la masse du domaine D.

4) Propriétés

Page 39 chapitre 1

> **Soient D un domaine fermé de $\mathbb{R}^3$ ; f et g, deux fonctions continues sur D ; $\alpha$ et $\beta$ deux nombres réels.**
>
> **- Si $f(x,y,z) \geq 0 \ \forall (x,y,z) \in D$, alors $\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz \geq 0$**
>
> **- $\iiint_D (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))dxdydz = \alpha \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz + \beta \iiint_D g(x,y,z)\,dxdydz$** linéarité
>
> **- Si $D = D_1 \cup D_2$ où $D_1$ et $D_2$ sont deux domaines fermés de $\mathbb{R}^3$ et disjoints ($D_1 \cap D_2 = \emptyset$) alors : $\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{D_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_{D_2} f(x,y,z)\,dxdydz$**

## II. Calcul d'une intégrale triple en coordonnées cartésiennes :

> **<u>Théorème de Fubini</u> Soit f, une fonction continue dans D, un domaine fermé de $\mathbb{R}^3$. On peut calculer l'intégrale triple $I = \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$ en intégrant soit d'abord par rapport à la variable x, soit d'abord par rapport à la variable y, soit d'abord par rapport à z.**

Notes

Page 39 chapitre 1

**1) $1^{er}$ cas : D est un parallélépipède rectangle de $\mathbb{R}^3$**

Exemple Calculer $I = \iiint_D (x+y+z)\,dxdydz$ où $D = [0;1]\times[-1;1]\times[1;2]$

$$I = \iint_{[-1;1]\times[1;2]} \int_0^1 (x+y+z)\,dx\,dydz = \iint_{[-1;1]\times[1;2]} \left[\frac{x^2}{2} + yx + zx\right]_{x=0}^{x=1} dydz$$

$$= \int_1^2\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}+y+z\right) dydz = \int_1^2 \left[\frac{1}{2}y + \frac{y^2}{2} + zy\right]_{y=-1}^{y=1} dz$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+z-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-z\right)\right]dz = \int_1^2 (1+2z)\,dz$$

$$I = \left[z+z^2\right]_1^2 = 6-2=4.$$

**Application du théorème de Fubini**

$$\iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[e,g]} f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b\int_e^g\int_c^d f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx = \int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \dots$$

<u>Cas particulier</u> : Calculer $I = \iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[e,g]} f(x,y,z)\,dxdydz$ lorsque $f(x,y,z) = g(x)h(y)k(z)$

① parallélépipède rectangle ② à variables séparables.

Page 41 chapitre 1

$$I = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \int_e^g \underbrace{g(x).h(y)}_{\text{cte par rapport à } z}.k(z)\,dz\; dxdy$$

$$= \iint_{[a,b]\times[c,d]} g(x).h(y).\underbrace{\int_e^g k(z)\,dz}_{\text{cte}}\; dxdy$$

$$= \int_e^g k(z).dz \times \iint_{[a,b]\times[c,d]} \overbrace{g(x)h(y)}^{\text{à variables séparables}}\,dxdy$$

$[a,b]\times[c,d] \longrightarrow$ Rectangle

$$I = \int_e^g k(z).dz \times \int_a^b g(x)\,dx \times \int_c^d h(y)\,dy.$$

à variables séparables.

<u>Exemple</u> $I = \iiint_{[0,1]\times[0,2]\times[0,3]} \underbrace{x(y-1)(z-2)}\,dxdydz$

= pavé droit

$$I = \int_0^1 x\,dx \times \int_0^2 1.(y-1)\,dy \times \int_0^3 1.(z-2)\,dz$$

$\int U'.U\,dy = \frac{U^2}{2}$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \times \left[\frac{y^2}{2} - y\right]_0^2 \times \left[\frac{z^2}{2} - 2z\right]_0^3 = \frac{1}{2} \times 0 \times \dots = 0$$

ou ou

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \times \left[\frac{(y-1)^2}{2}\right]_0^2 \times \left[\frac{(z-2)^2}{2}\right]_0^3 = \frac{1}{2} \times \Big(\underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}_{0}\Big) \times \dots = 0 .$$

$$\int \underset{U'}{\cos\theta} . \underset{U}{\sin\theta}\, d\theta = \frac{\sin^2\theta}{2} + cte$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

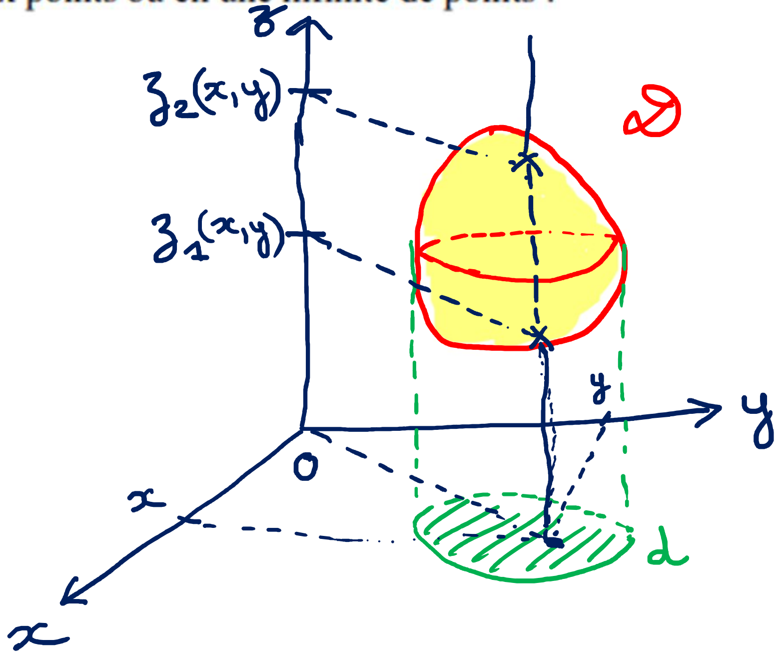
**2) $2^{\text{ème}}$ cas : D est un domaine fermé quelconque de $\mathbb{R}^3$**

Page 42 chapitre 1

D'après le théorème de Fubini, on peut calculer $I = \iiint_D f(x,y,z)\, dxdydz$ soit :

a) En intégrant d'abord par rapport à la variable z

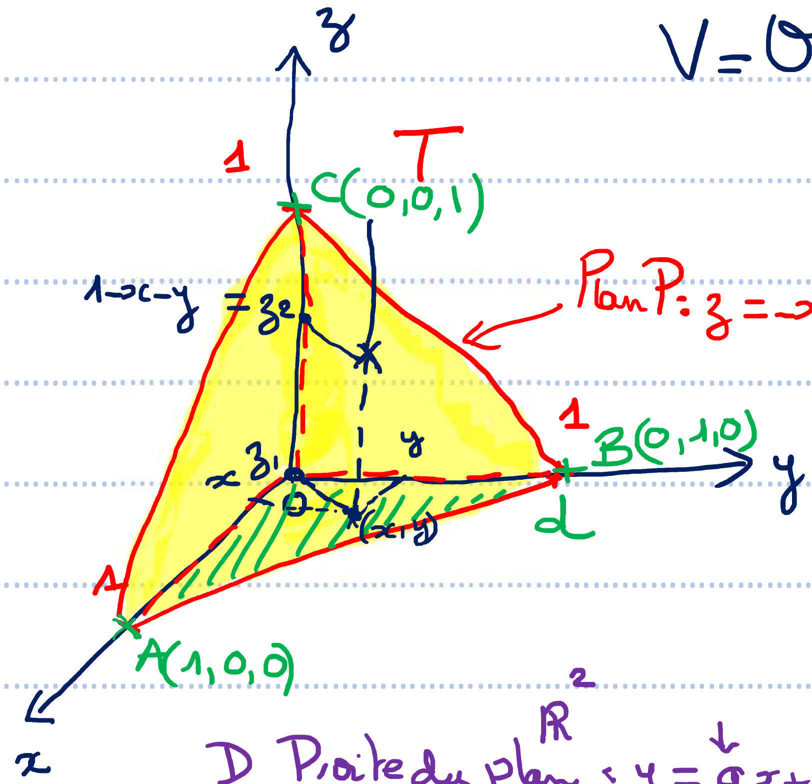
On suppose alors que toute parallèle à l'axe (Oz) coupe la surface délimitant D en au plus deux points ou en une infinité de points :




$$I = \iint_d \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \; dxdy .$$

Exemple Calculer le volume d'un tétraèdre de côtés 1m :

Page 42 chapitre 1




$$V = \text{Volume de } T = \iiint_T 1 \, dx\,dy\,dz$$

$$V = \iint_d \underbrace{\int_0^{1-x-y} 1 \, dz}_{[z]_0^{1-x-y}} \, dx\,dy$$

$$V = \iint_d (1-x-y-0) \, dx\,dy$$

D Droite du plan $\mathbb{R}^2$ : $y = ax + b$

$A(x_A, y_A)$ et $B(x_B ; y_B) \in D$

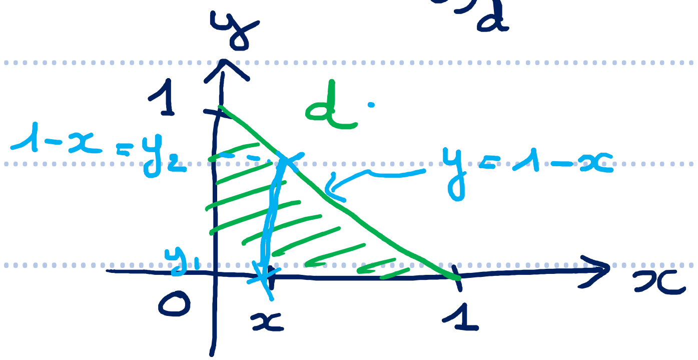
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_A = a x_A + b \\ y_B = a x_B + b \end{cases}$$

P Plan de l'espace $\mathbb{R}^3$ : $z = ax + by + c$

$$A, B, C \in P \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a + b.0 + c \\ 0 = b + c \\ 1 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Notes

$$V = \iint_d (1-x-y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy\,dx$$




$$= \int_0^1 \left[ y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left( 1.(1-x) - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx$$

$$(1-x)(1-x)$$

$$1.(1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2$$

$$\int u' u^{\alpha}\,dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$= -\int_0^1 -\frac{1}{2}(1-x)^2\,dx$$

$$u' u^2$$

$$= -\frac{1}{2}\left[ \frac{(1-x)^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{1}{6}\left(0^3 - 1^3\right)$$

$$V = \frac{1}{6}\,m^3$$