Corrigé du DS1 1ALT

Notes

Exercice 1 : Calculer avec les nombres complexes (1.5 pts) 1,5

Déterminer les parties réelles et imaginaires du nombre complexe ci-dessous :

$$\frac{5-3.j}{2+5.j} = \frac{5-3j}{2+5j} \times \frac{2-5j}{2-5j} = \frac{(5-3j)(2-5j)}{2^2-(5j)^2} = \frac{10-25j-6j+15j^2}{4-25j^2}$$

$$= \frac{10-31j-15}{4+25} = \frac{-5-31j}{29} = \frac{-5}{29} - \frac{31}{29}j$$

$Re(z) = \left(\frac{-5}{29}\right)$ et $Im(z) = \left(\frac{-31}{29}\right)$

Notes

$\underline{Z}$	Re($\underline{Z}$)	Im($\underline{Z}$)	Z	Arg($\underline{Z}$)	Autre écriture	$\underline{Z}^*$ exponentielle et algébrique
$5.e^{-j\frac{5\pi}{6}}$	$5.\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$	$5.\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{5}{2}$	5	$-\frac{5\pi}{6}$	algébrique $-\frac{5\sqrt{3}}{2} - j\frac{5}{2}$	$5.e^{j\frac{5\pi}{6}}$ $-\frac{5\sqrt{3}}{2} + j\frac{5}{2}$
$-1+j$	-1	1	$\sqrt{2}$	$-\text{Arctan}(1) + \pi = \frac{3\pi}{4}$	exponentielle $\sqrt{2}.e^{j\frac{3\pi}{4}}$	$\sqrt{2}.e^{-j\frac{3\pi}{4}}$ $-1-j$
$-7e^{j\frac{\pi}{3}}$	$7.\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{7}{2}$	$7.\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{7\sqrt{3}}{2}$	7	$-\frac{2\pi}{3}$	exponentielle $7e^{-j\frac{2\pi}{3}}$	$7e^{j\frac{2\pi}{3}}$ $-\frac{7}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{2}$

2) Déterminer le module et un argument de : $\underline{Z} = \frac{(x+3j)^{12}}{(-x-3j)^4}$ où x est réel strictement positif. Simplifier au maximum les résultats obtenus.

$$Z = \frac{|(x+3j)^{12}|}{|(-x-3j)^4|} = \frac{|x+3j|^{12}}{|-x-3j|^4} = \frac{\sqrt{x^2+9}^{12}}{\sqrt{x^2+9}^{4}} = \sqrt{x^2+9}^{8} = \left((x^2+9)^{1/2}\right)^8$$

$$= (x^2+9)^4$$

$$\operatorname{Arg}(\underline{z}) = \arg\left((x+3j)^{12}\right) - \arg\left((-x-3j)^4\right)$$

$$= 12\arg(x+3j) - 4\arg(-x-3j)$$

$$= 12\arctan\left(\frac{3}{x}\right) - 4\left(\arctan\left(\frac{-3}{-x}\right) \pm \pi\right)$$

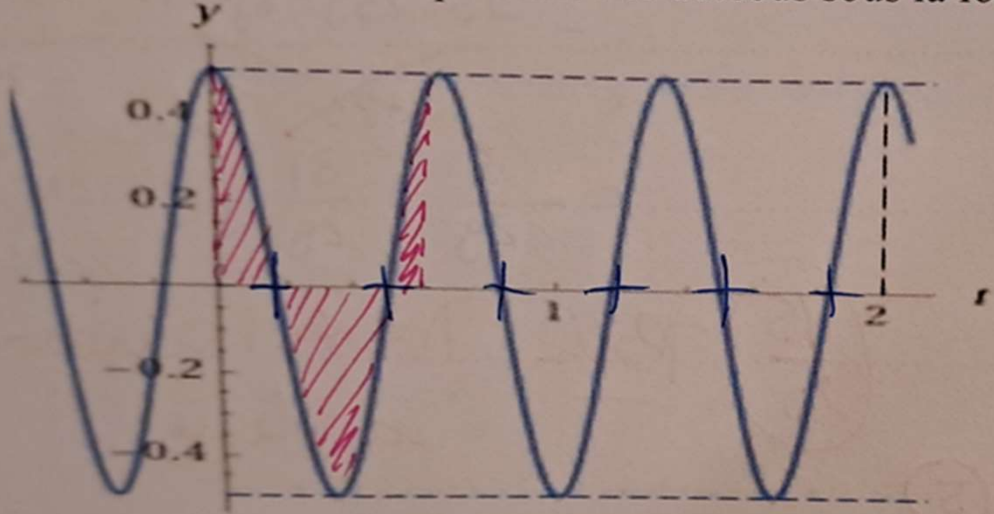
Calcul de base

$$= 8\arctan\left(\frac{3}{x}\right) \pm 4\pi$$

Note

Exercice 3 : Sinusoïde (4,5 pts) 3

1) Exprimer la fonction représentée ci-dessous sous la forme : $f(t) = A.\cos(\omega t + \varphi)$



$A = 0,5$ $3T = 2 \Leftrightarrow T = \frac{2}{3}$ $f = \frac{3}{2}$ $\omega = \frac{2\pi \times 3}{2} = 3\pi$

$\varphi = 0$

donc $f(t) = 0,5 \cos(3\pi t)$

Notes

2) Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_0^{0.6} f(t)dt$, interpréter graphiquement le résultat obtenu sur la figure ci-dessus.

$I = \int_0^{0,6} 0,5 \cos(3\pi t).dt = 0,5 \int_0^{0,6} \cos(3\pi t).dt$

$= 0,5 \left[\frac{1}{3}\sin(3\pi t)\right]_0^{0.6} = \frac{1}{6}\left[\sin(3\pi t)\right]_0^{0,6}$

$= \frac{1}{6}\left(\sin\left(\frac{5\pi+4\pi}{5}\right) - \sin(0)\right] = \frac{1}{6}\left(\sin\left(\pi + \frac{4\pi}{5}\right)\right) = \frac{1}{6}\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$

Notes

3) Résoudre l'équation f(t) = 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu sur la figure précédente

correcte

$\frac{1}{2}\cos(3\pi t)=0$ or $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\cancel{2}k\pi\right)=0$ donc $\cos(3\pi t)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\cancel{2}k\pi\right)$

$\Leftrightarrow \cos(3\pi t)=0$ $\Leftrightarrow 3\pi t=\frac{\pi}{2}+\cancel{2}k\pi$ $t=\frac{1}{6}+\frac{\cancel{2}k}{3}$

Cela signifie que $f(t)$ s'annule ($f(t)=0$) pour tout $t=\frac{1}{6}+\frac{\cancel{2}k}{3}$.

Notes

Exercice 4 : **Equation trigonométrique (3 pts)** 2,5

Résoudre l'équation : $4.\cos^2(x) - 6.\sin(x) - 6 = 0$

on a $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$

Ainsi $4(1 - \sin^2(x)) - 6\sin(x) - 6 = 0$

$-4\sin^2(x) - 6\sin(x) - 2 = 0$

Soit $X = \sin(x)$

$-4X^2 - 6X - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\times(-4)\times(-2) = 4 = 2^2$

$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-2}{-8} = -\frac{1}{2}$

$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+2}{-8} = -1$

$X_1 = \sin(x_1) = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$X_2 = \sin(x_2) = -1$

$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

Excellent

$S = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice 5 **Trigonométrie et calcul d'intégrales (4.5 pts)** 4,5

1) Compléter :

$\cos(a+b) = \cos(a)\cdot\cos(b) - \sin(a)\cdot\sin(b)$

$\cos(2a) = \cos(a)\cdot\cos(a) - \sin(a)\sin(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$

Exprimer cos(2a) en fonction de $sin^2(a)$:

$\cos(2a) = 1 - \sin^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a)$

En déduire la formule de linéarisation de $sin^2(a)$:

$\cos(2a) - 1 = -2\sin^2(a) \Leftrightarrow \sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

Notes

$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}$

Calculer à l'aide d'une intégrale la valeur efficace de la fonction u, définie par : $u(t) = \frac{\sin(3t-\frac{\pi}{4})}{4}$

On déterminera d'abord la période de u :

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$ $\quad U_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\cdot dt$

$u(t) = \frac{1}{4}\sin(3t - \frac{\pi}{4})$ $\quad u^2(t) = \frac{1}{16}\sin^2(3t - \frac{\pi}{4})$

$U_{eff}^2 = \frac{3}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{16}\sin^2(3t - \frac{\pi}{4})\cdot dt$

$= \frac{3}{32\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin^2(3t - \frac{\pi}{4})\, dt$

$= \frac{3}{32\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1 - \cos(6t - \frac{\pi}{2})}{2}\, dt$

$= \frac{3}{32\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(6t - \frac{\pi}{2})\right) dt$

$= \frac{3}{32\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{2}\, dt - \frac{3}{64\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos(6t - \frac{\pi}{2})\, dt$

$$= \frac{3}{32\pi}\left[\frac{1}{2}t\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} - \frac{3}{64\pi}\left[\frac{1}{6}\sin\left(6t-\frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \frac{3}{32\pi}\times\frac{\pi}{3} - \frac{3}{384\pi}\left[\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$-1 \quad +1 \quad = 0$

or sin(x) est 2π - périodique donc

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{32} \qquad U_{eff} = \sqrt{U_{eff}^2} = \sqrt{\frac{1}{32}} = \frac{1}{\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{32}}{32}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{8\times 4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

On a $U_{eff} = \frac{\sqrt{2}}{8}$