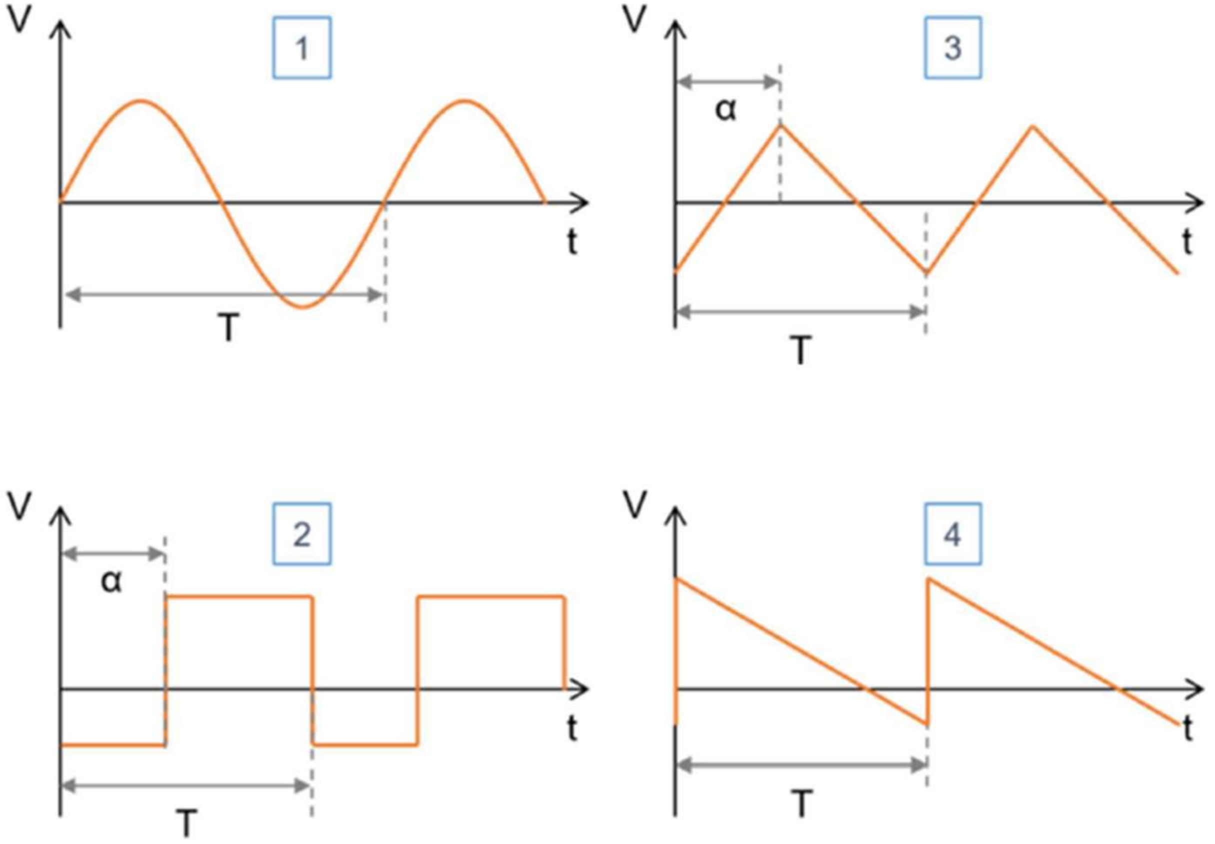
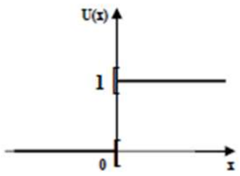
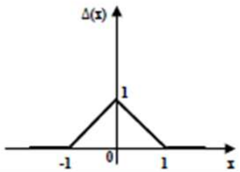
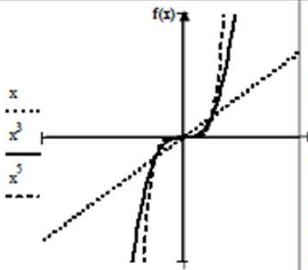
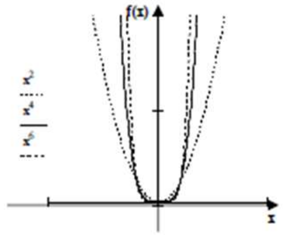
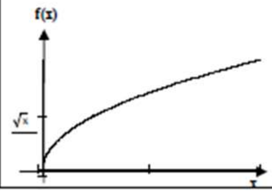
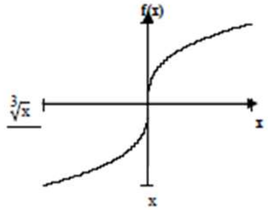
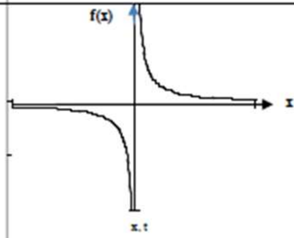
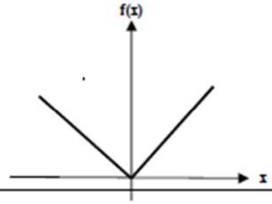
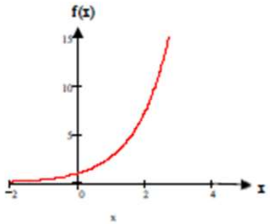
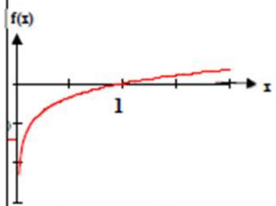
Chapitre 2 : Fonctions numériques à variable réelle.
Signaux du GEII



<u>Echelon-unité</u> : (Heaviside ⊕) $U : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ $x \longmapsto U(x)$ avec $U(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $U(\mathbb{R}) = \{0,1\}$ On dit que la fonction U est continue sur $\mathbb{R}$, sauf en 0. $\lim\limits_{x\to 0^-} U(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to 0^+} U(x) = 1$
<u>Triangle</u> : (notée aussi tri) $\Delta : \mathbb{R} \longrightarrow [0 ; 1]$ $x \longmapsto \Delta(x)$ $\Delta(x) = \begin{cases} 1-\lvert x\rvert \text{ si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : [0 ; 1] On dit que la fonction triangle est continue sur $\mathbb{R}$.
<u>Puissance impaire</u> : $n \in \mathbb{N}$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto f(x) = x^{2n+1}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $\mathbb{R}$ On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
<u>Puissance paire</u> : $n \in \mathbb{N}$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto f(x) = x^{2n}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $\mathbb{R}_+ = [0 ;+\infty[$ On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
<u>Racine carrée</u> : $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto f(x) = \sqrt{x}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}_+$ Ensemble image : $\mathbb{R}_+$ On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

<u>Racine cubique</u> : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto f(x) = \sqrt[3]{x}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $\mathbb{R}$ On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ Page 6 et 7 chapitre 3
<u>Inverse</u> : $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ $x \longmapsto f(x) = 1/x$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}^*$ Ensemble image : $\mathbb{R}^*$ f est continue sur $]0 ;+\infty[$ f est continue sur $]-\infty ; 0[$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
<u>Valeur absolue</u> : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto f(x) = \lvert x\rvert$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $\mathbb{R}_+$ f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
<u>Exponentielle</u> : $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0 ;+\infty[$ $x \longmapsto f(x) = e^x$ $e^0 = 1$ $e^{a+b} = e^a \times e^b$; $(e^a)^n = e^{a.n}$ $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $]0 ;+\infty[= \mathbb{R}^*_+$ f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
<u>Logarithme népérien</u> : $f :]0 ;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto f(x) = \ln(x)$ $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$ $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ $\ln(a^n) = n.\ln(a)$	 $\ln(e^a) = a \ \forall a \in \mathbb{R}$ $e^{\ln(a)} = a \ \forall a > 0$	Ensemble de définition : $\mathbb{R}^*_+$ Ensemble image : $\mathbb{R}$ f est continue sur $\mathbb{R}^*_+$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

<u>Problématique</u> : comment déterminer le sens de variation d'une fonction ?

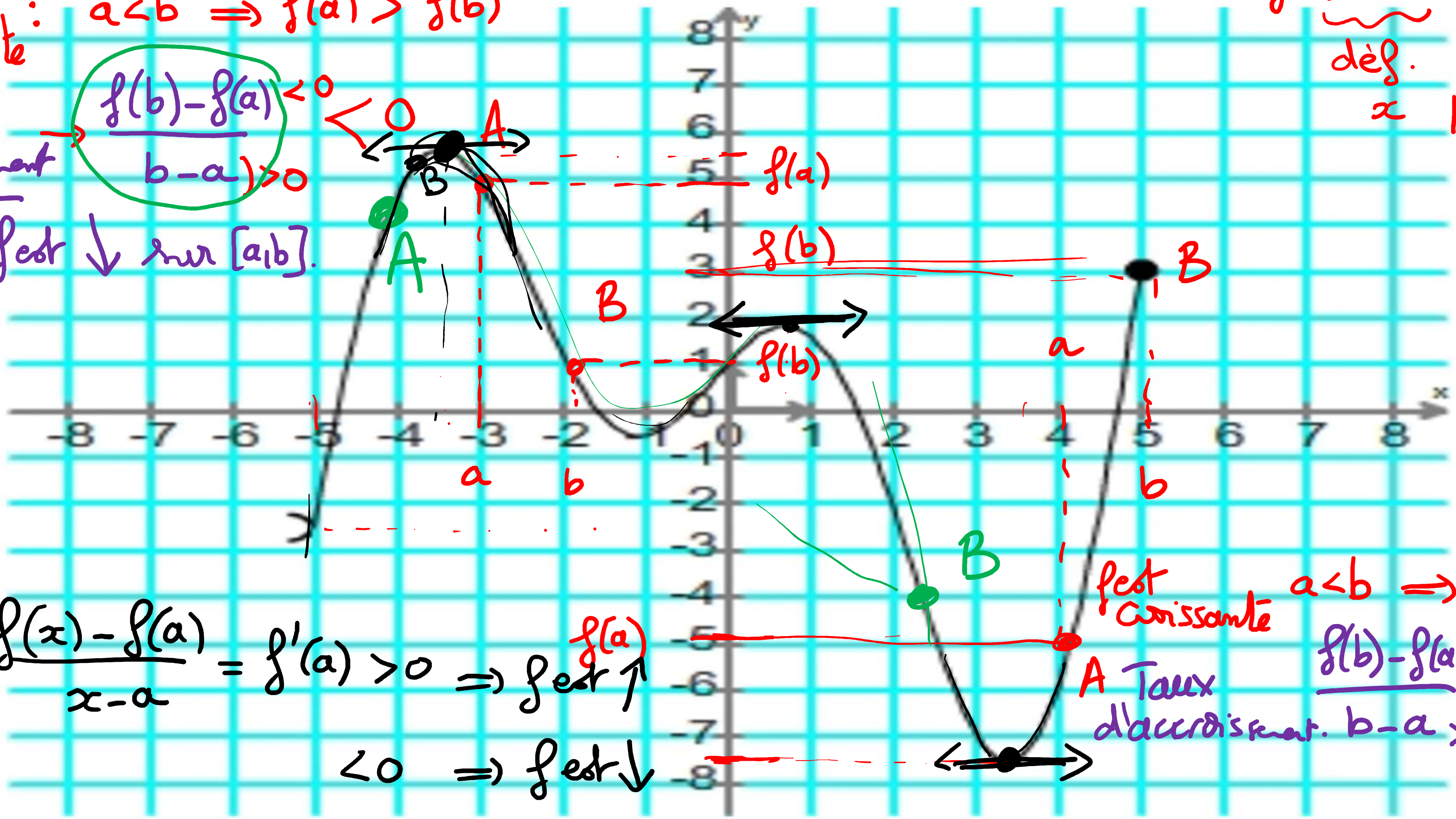
$f : [-5;5] \longrightarrow [-7,5;5,5]$ (déf. ; image)

$x \longmapsto f(x) = y$

f est décroissante : $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

Taux d'accroissement $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0$; $f(b)-f(a) < 0$; $b-a > 0$

f est ↓ sur [a,b].

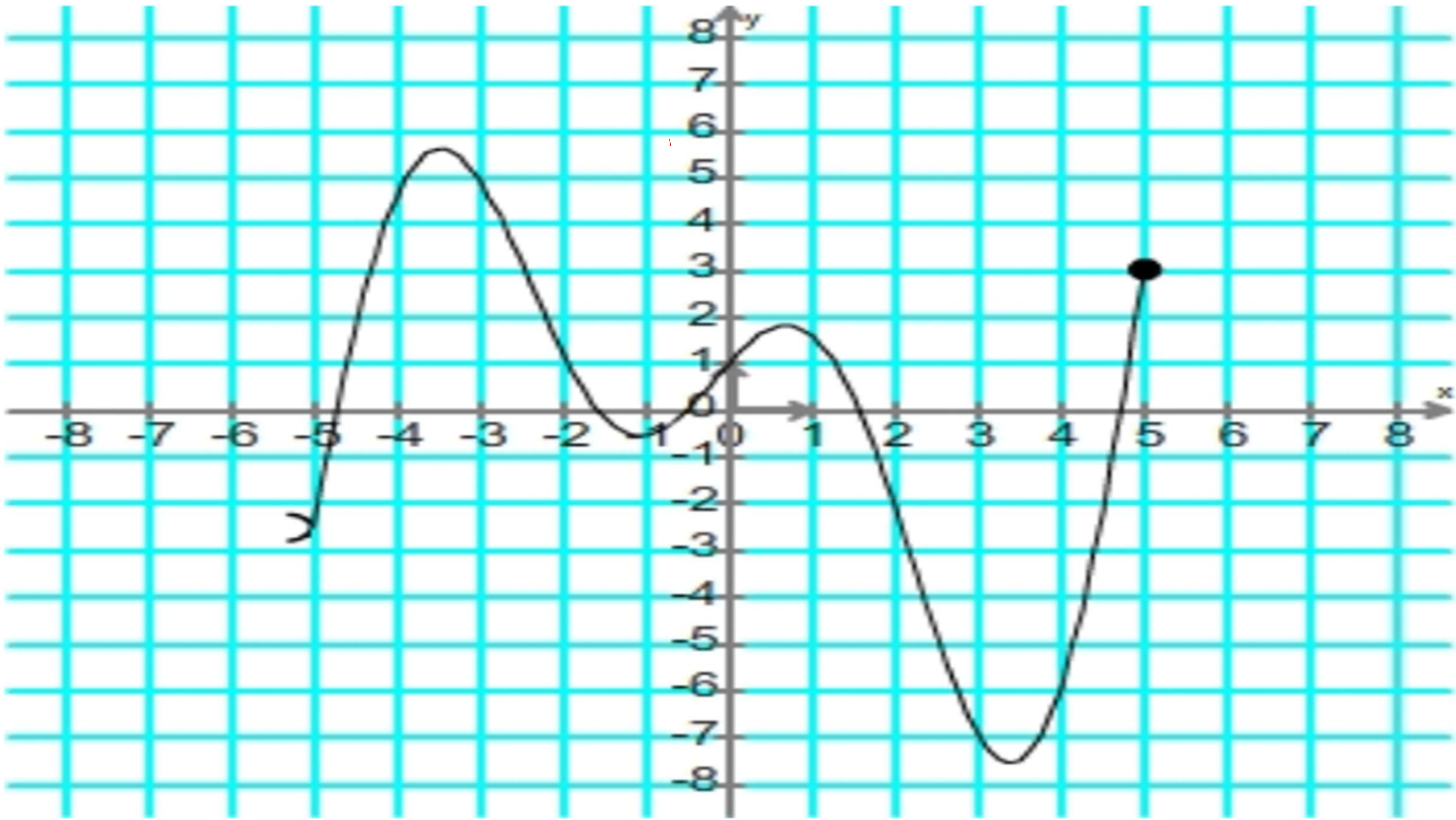


f est croissante $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

Taux d'accroissement. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$; $f(b)-f(a) > 0$; $b-a > 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) > 0 \Rightarrow f \text{ est } \uparrow$$

$$< 0 \Rightarrow f \text{ est } \downarrow$$



y
x
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

III. Dérivabilité

1) Définitions et opérations

Page 14 chapitre 3

Soit f, une fonction définie en a, on dit que f est dérivable en a lorsque : la limite suivante $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On la note alors $f'(a)$ et on l'appelle nombre dérivé de f en a.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ **existe et est finie. On la note alors $f'(a)$**

Page 14 chapitre 3

Exemples

✓ Soit f, la fonction définie par : $f(x) = x^2$. $D_f = \mathbb{R}$

Dérivabilité de f en 3 : $L = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x-3} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ F.I

$A^2 - B^2$

$(A-B)(A+B)$

$L = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} (x+3) = 6$ est finie

f est donc dérivable en 3 et $f'(3) = 6$

Dérivabilité de f en a, réel quelconque : $L = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x-a} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ FI

$A^2 - B^2$

$(A-B)(A+B)$

$L = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x \to a} (x+a) = 2a$ est finie pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est : $f'(x) = 2x$.

$f'(a) = 2a$.

Soit f, une fonction définie en a, on dit que f est dérivable en a lorsque : la limite suivante $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On la note alors $f'(a)$ et on l'appelle nombre dérivé de f en a.

Page 14 chapitre 3

Soit f, une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que f est dérivable sur I, lorsque f est dérivable en tout point a de I. On appelle alors fonction dérivée de f et on note f ', la fonction qui à tout élément a de I, associe son nombre dérivé $f'(a)$.

Si f et g sont dérivables sur I, alors : αf, f+g, $f \times g$ et f/g (avec $g \neq 0$) sont dérivables sur I. (α est un nombre réel) et $\boxed{(\alpha f)' = \alpha f'}$, $(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$ et $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur f(I), alors $g \circ f$ est dérivable sur I et : $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

....

....

2) Formulaire U est une fonction dérivable sur I.

$\sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$

Cas particulier de → Composition avec une fonction U

Page 16 chapitre 3

$(x^n)' = n.x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} - \cancel{\{1\}}$ $(x)' = 1.x^0 = 1$	$(U^n)' = n.U'.U^{n-1}$, $U(I) \subseteq \mathbb{R}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$ $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}.x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{x}}$	$(\sqrt{U})' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$, $U(I) \subseteq \mathbb{R}_+^*$ $f(x) = \sqrt{x^2+1} \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$ $(x^{-1})' = -1.x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{U}\right)' = \frac{-U'}{U^2}$, $U(I) \subseteq \mathbb{R}^*$
$(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$(e^U)' = U'.e^U$, $U(I) \subseteq \mathbb{R}$ $(e^{3x})' = 3.e^{3x}$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$	$(\ln(U))' = \frac{U'}{U}$, $U(I) \subseteq \mathbb{R}_+^*$ $\boxed{(\ln(\underbrace{3x^2}_{>0}))' = \frac{6x}{3x^2} = \frac{2}{x}}$ $\forall x \neq 0$

$f'(x) = (\cos^3 x)' = 3.(\cos x)'.(\cos x)^2 = -3\sin x.\cos^2 x$

Page 16 chapitre 3

$(\sin(x))' = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$(\sin(U))' = U'.\cos(U) \quad , \; U(I) \subseteq \mathbb{R}$
$(\cos(x))' = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$(\cos(U))' = -U'.\sin(U) \quad , \; U(I) \subseteq \mathbb{R}$
$(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$	$(\tan(U))' = \dfrac{U'}{\cos^2(U)} = \left(1 + \tan^2(U)\right).U'$ $U(I) \subseteq \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$

Page 16&17 chapitre 3

<u>Exemples</u>

✓ $f(x) = \underset{U}{(2x - 3)} \underset{\times}{.} \underset{V}{\cos x}$ $\quad (U \times V)' = U'V + UV'$

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = (2x-3)' \cos x + (2x-3)(\cos x)'$

$= 2.\cos x - (2x-3)\sin x$

$D_{f'} = \mathbb{R}$

✓ $g(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{U}{V}$ $\quad \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

$\left(\text{Déf}: \operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \right)$

"sinus cardinal"

$D_g = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

$g'(x) = \frac{(\sin x)' . x - \sin x . x'}{x^2} = \frac{x.\cos x - \sin x}{x^2)>0}$

Page 17 chapitre 3

$D_{g'} = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

$U = 3t + 5$

✓ $i(t) = \underbrace{V_{eff}\sqrt{2}}_{\alpha}.\cos(\omega t + \varphi)$

$(\cos U)' = -U'.\sin U$

$(\alpha f)' = \alpha f'$

ici $U = \omega t + \varphi$

$U' = \omega$

$D_i = \mathbb{R}$

$i'(t) = -\omega V_{eff}\sqrt{2}.\sin(\omega t + \varphi)$

$D_{i'} = \mathbb{R}$

✓ $h(t) = (t^2 + 5)^{10}$ $(u^n)' = n u^{n-1} \cdot \underline{\underline{u'}}$ ici $u = t^2 + 5 \Rightarrow u' = 2t$

Page 17 chapitre 3

$D_h =$ $\mathbb{R}$

$h'(t) = \underline{\underline{2t}} \cdot 10(t^2+5)^9 = 20t(t^2+5)^9$

$D_{h'} =$ $\mathbb{R}$.

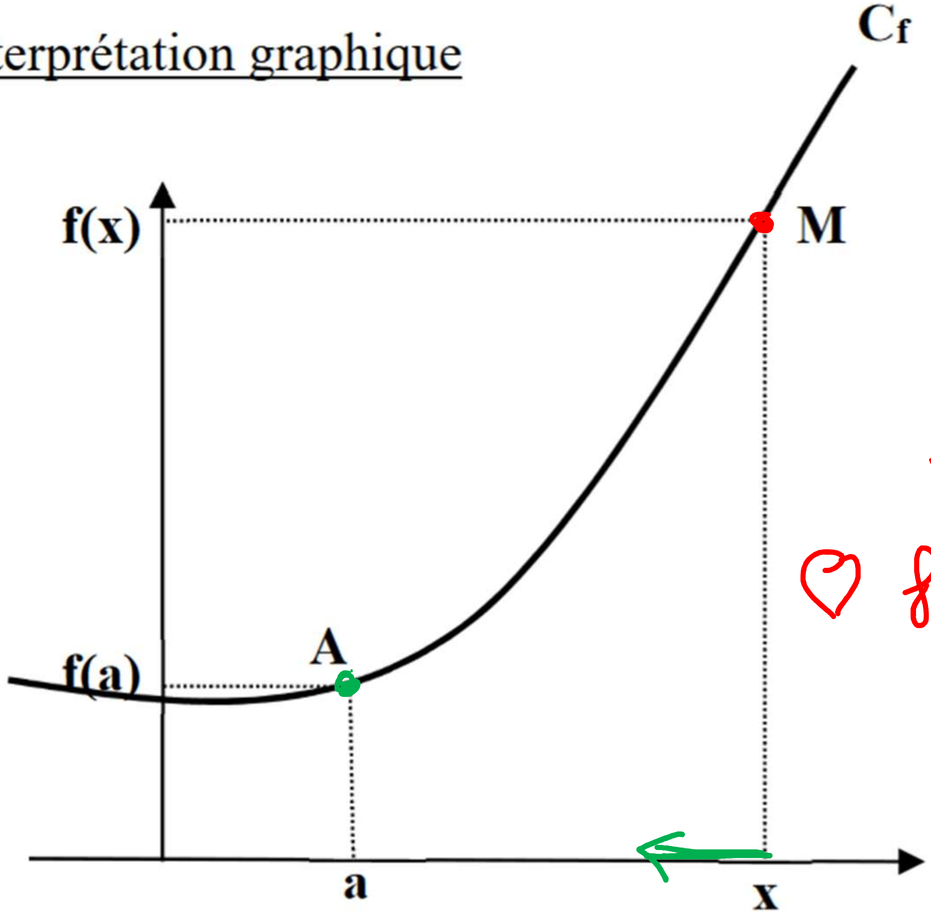
✓ A l'aide de la définition du nombre dérivé du sinus en 0, calculer : $\underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t}} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ F.I

f est dérivable en $a \in D_f$ si et seulement si : $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Elle vaut alors $f'(a)$.

Soit $f(t) = \sin t$. Comme f est dérivable en 0, alors $\lim_{t \to 0} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = f'(0)$.

Ainsi : $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t - \sin 0}{t-0} = \cos 0 = 1$ $\boxed{\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1}$

Interprétation graphique



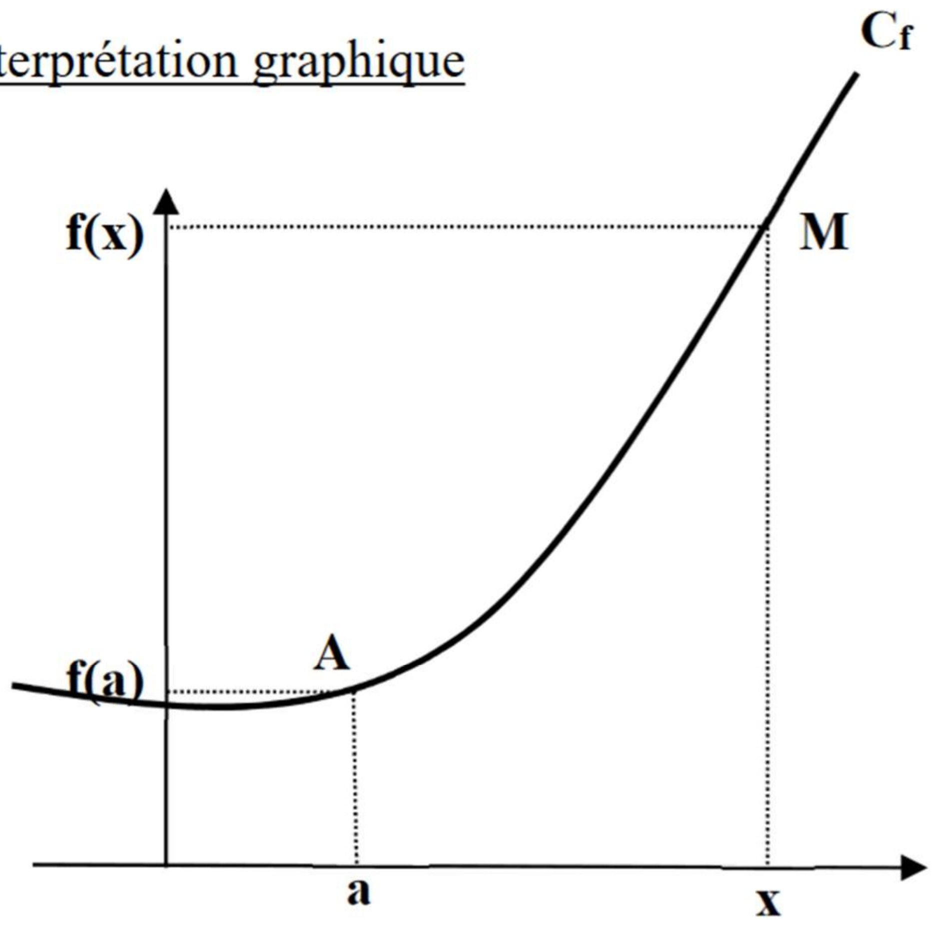
f est dérivable en a :

$$\lim_{x \to a} \boxed{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = f'(a)$$

$$\underbrace{\lim_{M \to A} \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}} = \text{pente de } (AM)$$

$f'(a) =$ pente de la tangente à C_f en A

Interprétation graphique



Page 18 chapitre 3

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est la pente de la droite (AM)

Lorsque x tend vers a, M tend vers A le long de la courbe, et la droite (AM) se rapproche de la droite T_a, qui est la tangente à la courbe au point A.

Conclusion :

f est dérivable en a

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ est la pente de la tangente à la courbe au point A(a,f(a)).

B

....

....

Page 18 chapitre 3

<u>Conséquence</u> Equation de la tangente T_a : $y = mx + p$

$f'(a)$ est la pente de T_a donc $T_a : y = f'(a).x + p$

p ? $A \in T_a \iff y_A = f'(a).x_A + p$ ici $A(a ; f(a))$

$\iff f(a) = f'(a).a + p$

$A \in T_a \iff p = f(a) - f'(a).a$

On obtient : $T_a : y = f'(a).x + f(a) - f'(a).a$

$$\boxed{T_a : y = f(a) + f'(a).(x - a)}$$

Page 19 chapitre 3

Exemples

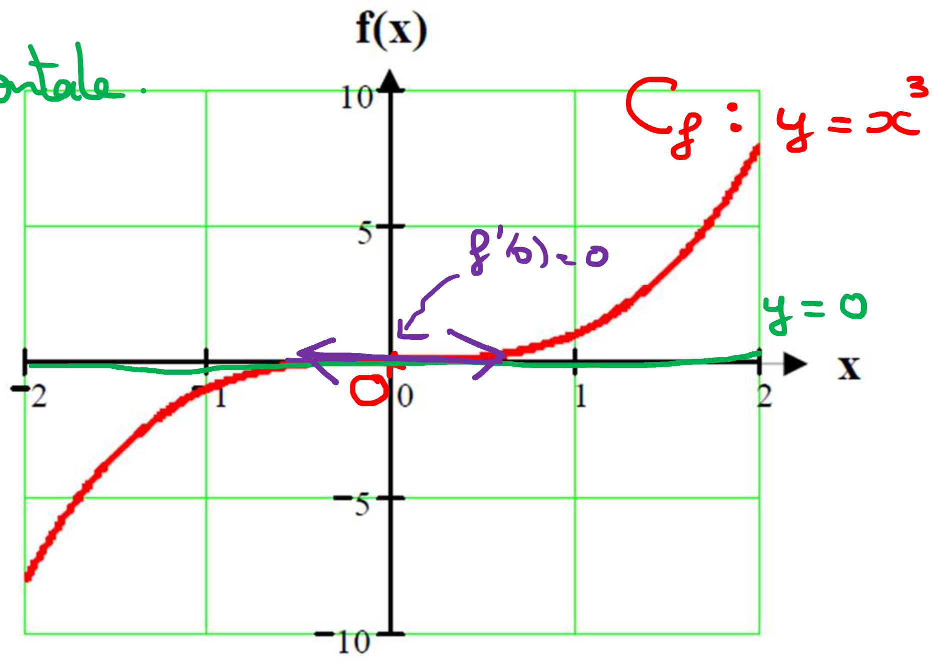
✓ Equation de la tangente en O à la courbe représentant la fonction f définie par :
$f(x) = x^3$

$T_O : y = f'(0)(x-0) + f(0) \iff \boxed{T_O : y = 0}$

ici $f(x) = x^3 \Rightarrow f(0) = 0$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow \boxed{f'(0) = 0}$

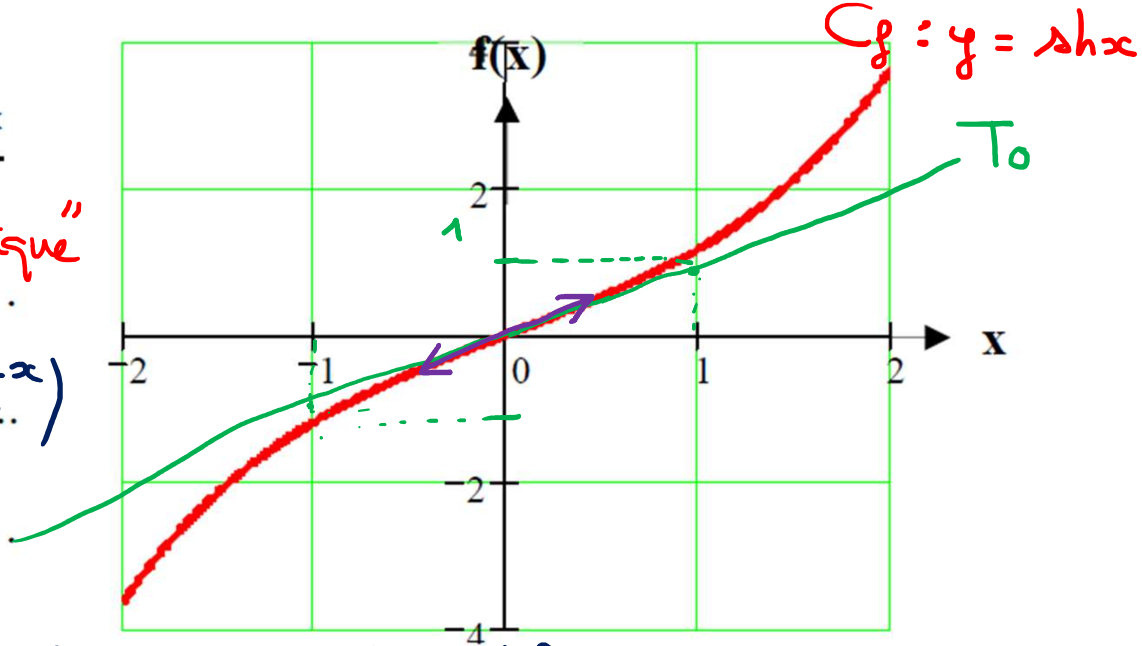
tangente horizontale.



- ✓ Equation de la tangente en O à la courbe représentant la fonction f définie par : $f(x) = sh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

"sinus hyperbolique"

$T_0 : y = \underbrace{f(0)}_{0} + (x-0)\cdot\underbrace{f'(0)}_{1}$



ici $f(x) = shx = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$

$f(0) = sh0 = \frac{1-1}{2} = 0$

$f'(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = chx$ "Cosinus hyperbolique".

$(e^{u})' = u'.e^{u} \Rightarrow (e^{-x})' = -e^{-x}$

$f'(0) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$

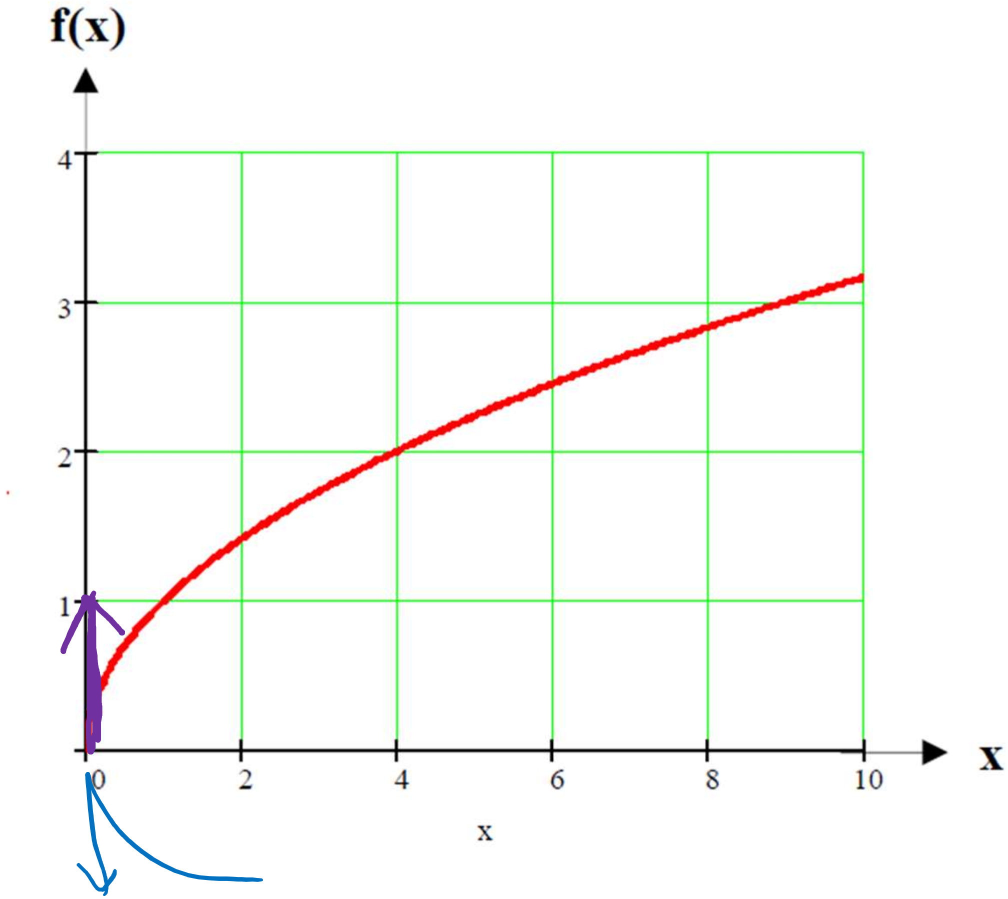
$T_0 : y = x$

$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

✓ La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

$\mathcal{D}_f = [0 ; +\infty[$

$\mathcal{D}_{f'} =]0 ; +\infty[$



tangente verticale

$\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \text{"}\frac{1}{0^+}\text{"} = +\infty$

pente de T_0

En O, la tangente à la courbe est donc verticale tournée vers les ordonnées positives.

✓ Redressement double alternance : V(t) = |sin(t)|. $\mathcal{D}_V = \mathbb{R}$

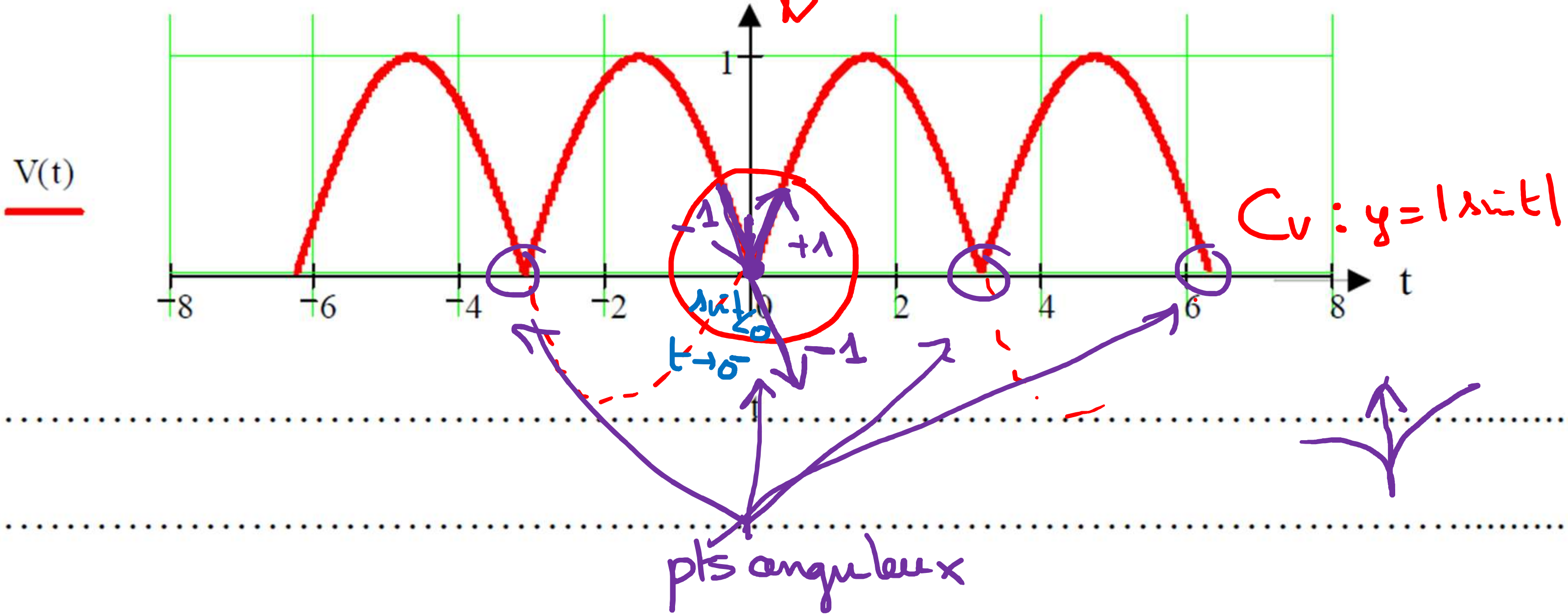
Page 20 chapitre 3

Dérivabilité de V en 0 : $L = \lim\limits_{t\to 0} \frac{V(t)-V(0)}{t-0} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{|\sin t| - |\sin 0|}{t}$ (avec $|\sin 0| \to 0$)

$L = \lim\limits_{t\to 0} \frac{|\sin t|}{t} \xrightarrow[\sin t<0]{t\to 0^-} \lim\limits_{t\to 0^-} \frac{-\sin t}{t} = -1$

$\xrightarrow[t\to 0^+]{\sin t>0} \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$

$-1 \neq 1$: pas de limite donc V n'est pas dérivable en 0

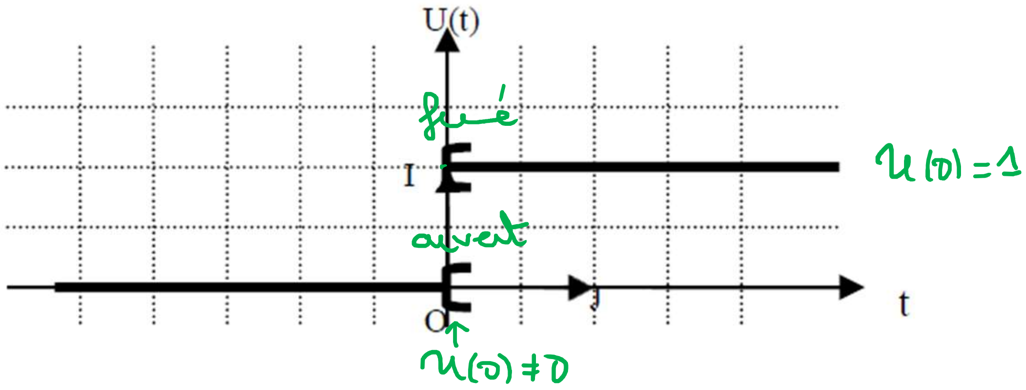


Page 20 chapitre 3

✓ U, la fonction échelon-unité définie et représentée ci-dessous est-elle dérivable sur son ensemble de définition ?

$\mathcal{H}(t) = \Phi(t) = U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$ $\qquad \mathcal{D}_u = \mathbb{R}$.

échelon de Heaviside



On dit que u est causale (Déf : f est dite causale lorsque $f(t) = 0 \ \forall t < 0$)

Exples de signaux causaux : $u(t)$; $t^2 \cdot U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^2 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$; $t \cdot u(t)$ (rampe) ; $\cos t \cdot u(t)$

$\underbrace{u \in C^0(\mathbb{R}^*)}_{\text{ensble des fonctions continues sur } \mathbb{R}^*}$: U n'est pas dérivable en 0, car on ne peut pas tracer de tangente à C_u (courbe de u) en 0. U est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Page 21 chapitre 3

3) Sens de variation

Soit f, une fonction dérivable sur un intervalle I :
Si $f' \geq 0$, f est croissante sur I
Si $f' \leq 0$, f est décroissante sur I

4) Extremum d'une fonction

Définitions :

- Une fonction f admet un maximum en x_0 sur un intervalle I où elle est définie, si pour tout x de I, on a : $f(x) \leq f(x_0)$

- Une fonction f admet un minimum en a sur un intervalle I où elle est définie, si pour tout x de I, on a : $f(x) \geq f(x_0)$

Théorème : Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I contenant x_0 et si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors la fonction f présente un extremum en x_0.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	M	↘	

Maximum

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	m	↗	

Minimum

Page 22 chapitre 3

6) Dérivées successives – Fonction de classe C^n

Définitions Si f est continue sur l'intervalle I, on note : $f \in C^0(I)$
Si f est dérivable sur l'intervalle I, et si $f' \in C^0(I)$, alors on note : $f \in C^1(I)$

"f seconde"

Si f' est dérivable sur I, alors on note $f'' = (f')'$ que l'on appelle dérivée seconde de f. Si de plus $f'' \in C^0(I)$, alors on note $f \in C^2(I)$

Plus généralement on définit la dérivée n^ième de f, notée $f^{(n)}$. Lorsque $f^{(n)} \in C^0(I)$, on note $f \in C^n(I)$.

Exemple

$(3t+5)' = 3$

$$i(t) = \cos(\underbrace{\omega t + \varphi}_{U}) \quad \mathcal{D}_i = \mathbb{R}$$

$U \Rightarrow U' = \omega$

$(\cos U)' = -U' \cdot \sin U$

$(\sin U)' = U' \cdot \cos U$

$i'(t) = -\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

$i''(t) = (\underbrace{-\omega}_{cte} \cdot \sin(\omega t+\varphi))' = -\omega \cdot (\sin(\omega t+\varphi))' = -\omega \cdot \omega \cdot \cos(\omega t+\varphi) = -\omega^2 \cos(\omega t+\varphi)$

$i''(t) + \omega^2 i(t) = -\omega^2 \cos(\omega t+\varphi) + \omega^2 \cdot \cos(\omega t+\varphi) = 0$

$(3x^2)' = 6x$

$3.2x$

On dit que i est une solution de l'équation différentielle : $y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$.

Exercices

Page 39 chapitre 3

Exercice 1 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition, calculer sa fonction dérivée et son ensemble de définition : étude complète.

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$; 2) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ avec $x \neq 0$; 3) $g(t) = \dfrac{t+1}{t-1}$ avec $t \neq 1$;

$U = t+1 \Rightarrow U' = 1$

$V = t-1 \Rightarrow V' = 1$

$h(t) = \sqrt{t^2+1}$; $I(\omega) = \dfrac{\omega}{\sqrt{\omega^2+1}}$; $X(\omega) = \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2$; $Z(\omega) = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$;

$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$; $f_0(C) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$; $W(C) = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$; $W(Q) = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$;

$V(x) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2} - x\right)$

$g(0) = \dfrac{0+1}{0-1} = -1.$

1) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$ $\quad \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}.$

2) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ $\quad f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ $\quad \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}^*.$

$\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$

3) $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} - \{1\}$ $\quad g'(t) = \dfrac{t-1-(t+1)}{(t-1)^2} = \dfrac{t-1-t-1}{(t-1)^2} = \dfrac{-2}{(t-1)^2} < 0$ $\quad \mathcal{D}_{g'} = \mathbb{R} - \{1\}.$

Page 39 chapitre 3

Notes $g(t) = \dfrac{t+1}{t-1}$ $\qquad g'(t) = \dfrac{-2}{(t-1)^2}$

$$\frac{2}{-0{,}0001} = -2\times 1000$$

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	‖	$-$	
g	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

$$\lim_{t\to 1^-} g(t) = \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \frac{t+1}{t-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$t-1<0$

$$\lim_{t\to 1^+} g(t) = \lim_{t\to 1^+} \frac{t+1}{t-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{t\to -\infty\\ +\infty}} g(t) = \lim_{\substack{t\to -\infty\\ +\infty}} \frac{t+1}{t-1} = \text{“}\frac{-\infty}{-\infty}\text{”} \;\; \text{FI} \qquad \text{“}\frac{+\infty}{+\infty}\text{”}$$

$$= \lim_{t\to -\infty} \frac{t\left(1+\frac{1}{t}\right)}{t\left(1-\frac{1}{t}\right)}$$

Lycée

$$= \lim_{t\to -\infty} \frac{1+\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t}} = \frac{1}{1} = 1$$

IUT

$$\lim_{\substack{t\to -\infty\\ +}} \frac{t}{t} = 1$$

1

Page 26 chapitre 3

$0 \times \infty$

$0 \times \frac{1}{0}$

$\frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}} = \frac{0}{0}$

$$\frac{0}{0} \;,\; \frac{\infty}{\infty} \;,\; 0 \cdot \infty \;,\; \infty - \infty$$

F.I

$$0^0 \;,\; \infty^0 \;,\; 1^\infty$$

l

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Page 26 chapitre 3

Partie B : Calcul de limites

Formes indéterminées FI Soit x_0, un nombre réel ou $\pm\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =$	L	L	$\pm\infty$	∞	∞	$\pm\infty$	0	0	L
et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) =$	L' $\neq 0$	$\pm\infty$	L' $\neq 0$	∞	$-\infty$	0	$\pm\infty$	0	0
alors $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x) =$	L+L'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	∞	FI	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	L
et $\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x) =$	LL'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	∞	$-\infty$	FI	FI	0	0
et $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{L}{L'}$	0	$\pm\infty$	FI	FI	$\pm\infty$	0	FI	$\pm\infty$

Remarque $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \exp\big(g(x).\ln(f(x))\big)$ cette écriture permet de « lever » les formes indéterminées suivantes : $"L^{\infty}", "0^0"$ et $"\infty^0"$

Voici quelques techniques permettant de « lever » une forme indéterminée :

Technique 1 : Croissance comparée

Page 26 chapitre 3

Définition Soit x_0 un réel ou $\pm\infty$. On dit que la fonction f est négligeable devant la fonction g en x_0 lorsque : $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note alors : $\boxed{f(x) \underset{x_0}{<<} g(x)}$

f(x) est négligeable devant g(x) en x_0.

Théorèmes Soient : $0 < \alpha < \beta$

$$\boxed{\ln(x) \underset{\infty}{<<} x^{\alpha} \underset{\infty}{<<} x^{\beta} \underset{\infty}{<<} e^{x}}$$

graphiquement P.5

P.28

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0$ car $\ln x \underset{\infty}{<<} x^3$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$ car $\sqrt{x} \underset{\infty}{<<} e^x$

Exemples : Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ où $f(x) = \underbrace{x.e^{x}}_{+\infty} - \underbrace{x^{2}}_{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = $ "$+\infty - \infty$" FI

Tle : $f(x) = xe^x\left(\underbrace{1 - \frac{x}{e^x}}_{\to 1}\right) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$

$x \underset{\infty}{<<} e^x$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

IUT : Comme $x \underset{\infty}{<<} e^x$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$.

$x^2 \underset{\infty}{<<} xe^x$

$4\ln x = \ln x^4$

Page 26 chapitre 3

$\ln 4 + \ln x = \ln 4x$

Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\ln(4x)}{x} = \dfrac{\ln 4 + \ln x}{x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = "\dfrac{\infty}{\infty}"$ FI

$\ln x \underset{\infty}{<<} x$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$f(x) = \dfrac{\ln 4}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Technique 2 : Expression conjuguée $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

Page 27 chapitre 3

Exemples : Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ FI.

$$f(x) = \frac{\overbrace{\sqrt{1+x^2}}^{A} - \overbrace{1}^{B}}{x} \times \frac{\overbrace{\sqrt{1+x^2}}^{A} + \overbrace{1}^{B}}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{\overbrace{1+x^2-1}^{A^2-B^2}}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{x^2}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{2} = 0$$

$$\frac{0}{\sqrt{1+0^2}+1}$$

Calculer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3x-3}-x}{x-1}$

....

....

....

....

Technique 3 : Théorèmes de comparaison

Page 27 chapitre 3

Soient f, g et h trois fonctions définies sur [a,b[où b est un réel ou $\pm\infty$

pbme

1) Si $\forall x \in [a,b[\; f(x) \le g(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x) = -\infty$

$f(x) \le g(x) \xrightarrow[x\to b]{} -\infty$

2) Si $\forall x \in [a,b[\; f(x) \ge g(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \infty$, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$

$f(x) \geq g(x) \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$

3) Si $\forall x \in [a,b[\; |f(x)| \le g(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x) = 0$

4) Si $\forall x \in [a,b[\; h(x) \le f(x) \le g(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} h(x) = \lim\limits_{x\to b} g(x) = L$, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x) = L$ (théorème des gendarmes)

L

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Exemples : Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

$\sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

$-1 \le \sin x \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$

$\times \frac{1}{x} > 0$

$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors

d'après le th. des Gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

Technique 4 : Equivalence

Page 29 chapitre 2

Définition Soit x_0 un réel ou $\pm\infty$. On dit que la fonction f est équivalente à la fonction g en x_0 lorsque : $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1}$. On note alors : $f(x)\underset{x_0}{\sim}g(x)$

ou $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=1$

Exemples : Montrer que les fonctions f et g suivantes sont équivalentes en ∞ :

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \text{ et } g(x)=\frac{e^x}{2} :$$

$$\frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{\frac{e^x}{2}}=\frac{e^x+e^{-x}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{e^x}$$

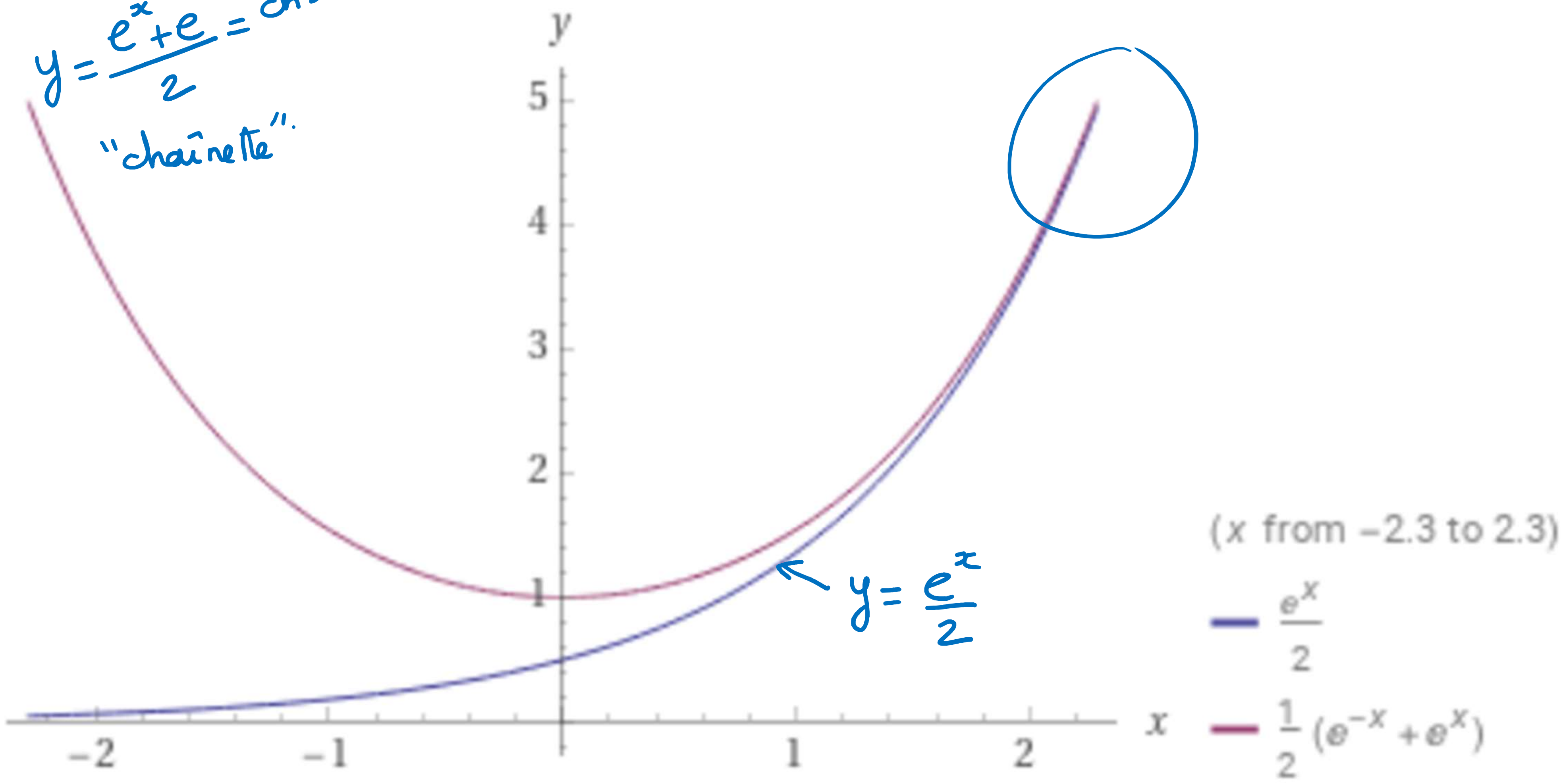
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x}=\text{''}\frac{+\infty}{+\infty}\text{''} \quad \text{FI}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}+\frac{e^{-x}}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+e^{-2x}\right)=1 \text{ donc } f(x)\underset{+\infty}{\sim}g(x)$$

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

"chaînette".



$$y = \frac{e^x}{2}$$

Page 29 chapitre 2

Chercher un équivalent de f en ∞ où $f(x) = 7x^3 - 3x^2 + 2$

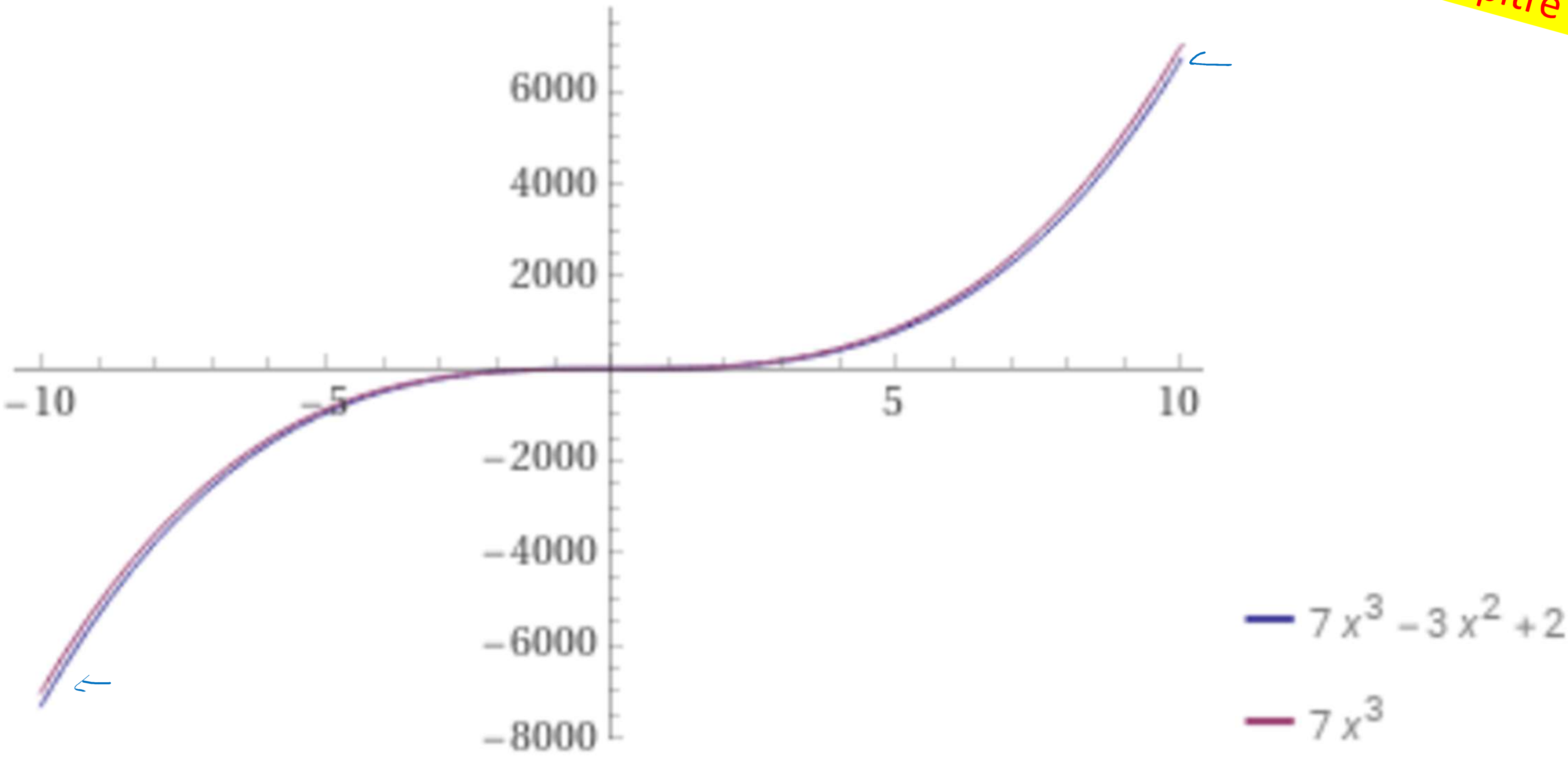
$f(x) \underset{\substack{+\infty \\ -\infty}}{\sim} 7x^3$ car :

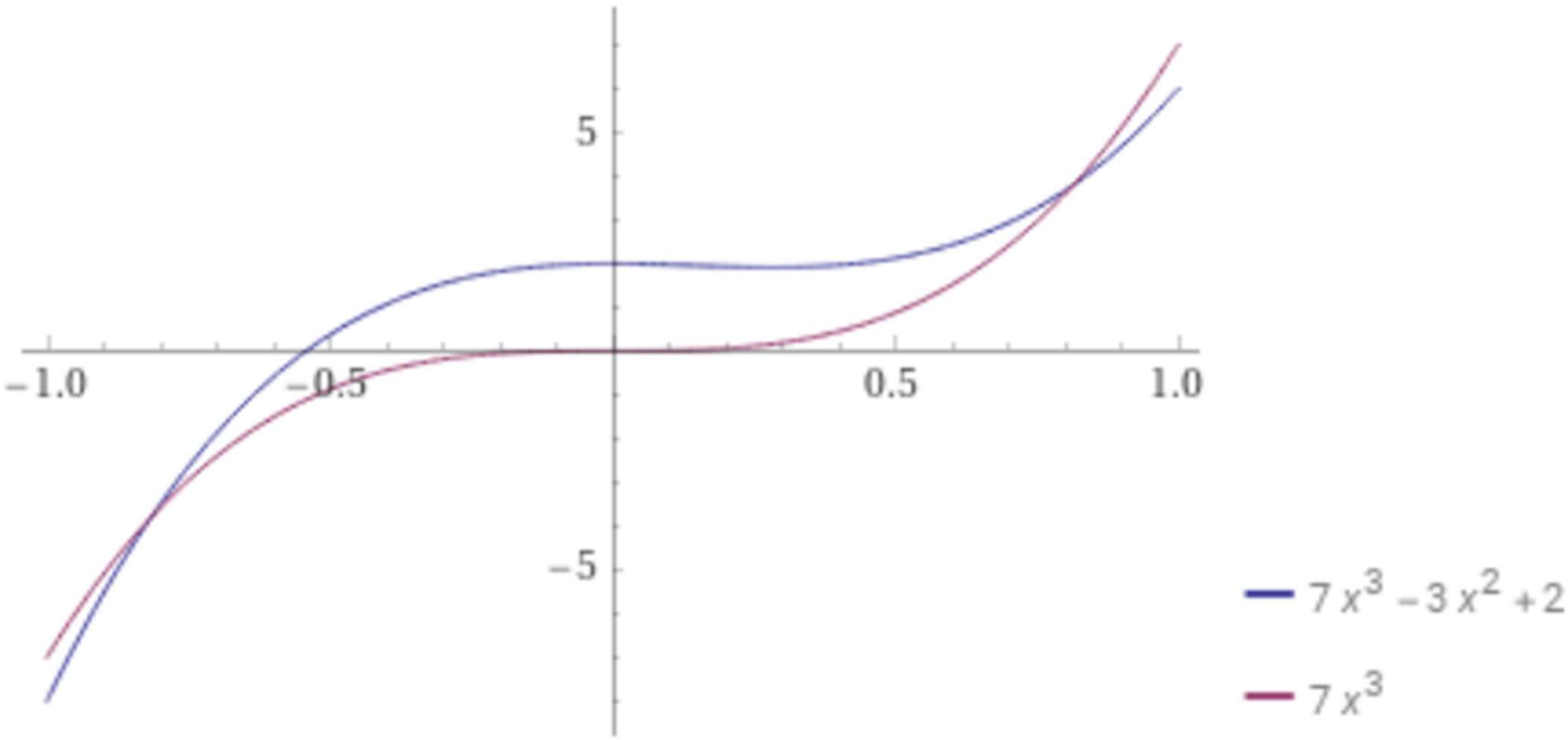
$\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} \frac{f(x)}{7x^3} = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} \frac{7x^3 - 3x^2 + 2}{7x^3} = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} \frac{7\cancel{x^3}}{7\cancel{x^3}} - \frac{3x^2}{7x^3} + \frac{2}{7x^3}$.

$= \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} 1 - \frac{3}{7x} + \frac{2}{7x^3}$

$\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} \frac{f(x)}{7x^3} = \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}$

Page 29 chapitre 2




5
−5
−1.0
−0.5
0.5
1.0
$7x^3 - 3x^2 + 2$
$7x^3$

Page 29 chapitre 2

avec son coefficient !

Tout polynôme est équivalent en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré.
Tout polynôme est équivalent en 0 à son terme de plus bas degré.

$7x - 3x^2 \underset{0}{\sim} 7x$

$7x - 3x^2 \underset{+\infty}{\sim} -3x^2$

$$\boxed{f(0)+x\,.f'(0)}$$

$$f(x) \underset{0}{\sim} f(0)+(x-0).f'(0)$$

Page 29 chapitre 2

Si f est dérivable en x0, alors : $\boxed{f(x)\underset{x_0}{\sim} f(x_0)+(x-x_0).f'(x_0)}$

Complèter :

$\sin(x)\underset{0}{\sim} \overset{0}{f(0)} + x.\overset{1}{f'(0)}$ donc $\sin x \underset{0}{\sim} x$

$f(x) \Rightarrow f(0)=\sin 0=0$; $f'(x)=\cos x \Rightarrow f'(0)=\cos 0=1.$

$e^x \underset{0}{\sim} f(0)+x f'(0)$ donc $e^x \underset{0}{\sim} 1+x$

$f(x) \Rightarrow f(0)=e^0=1$; $f'(x)=e^x \Rightarrow f'(0)=e^0=1$

$\ln(1+x)\underset{0}{\sim} f(0)+x f'(0)$ donc $\boxed{\ln(1+x)\underset{0}{\sim} x}$

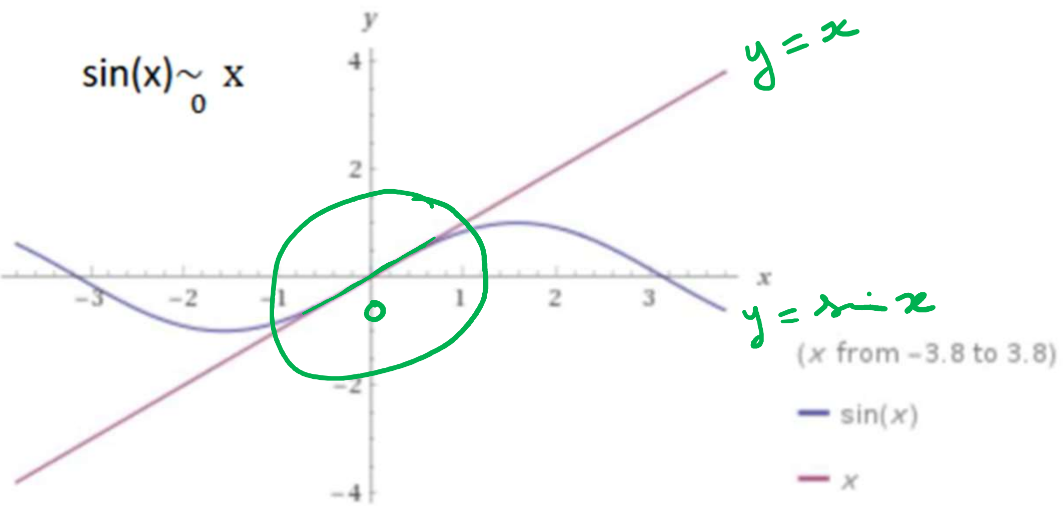
$f(x) \Rightarrow f(0)=\ln 1=0$; $f'(x)=\dfrac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0)=1$

$(\ln U)'=\dfrac{U'}{U}$ ici $U=1+x$, $U'=1$

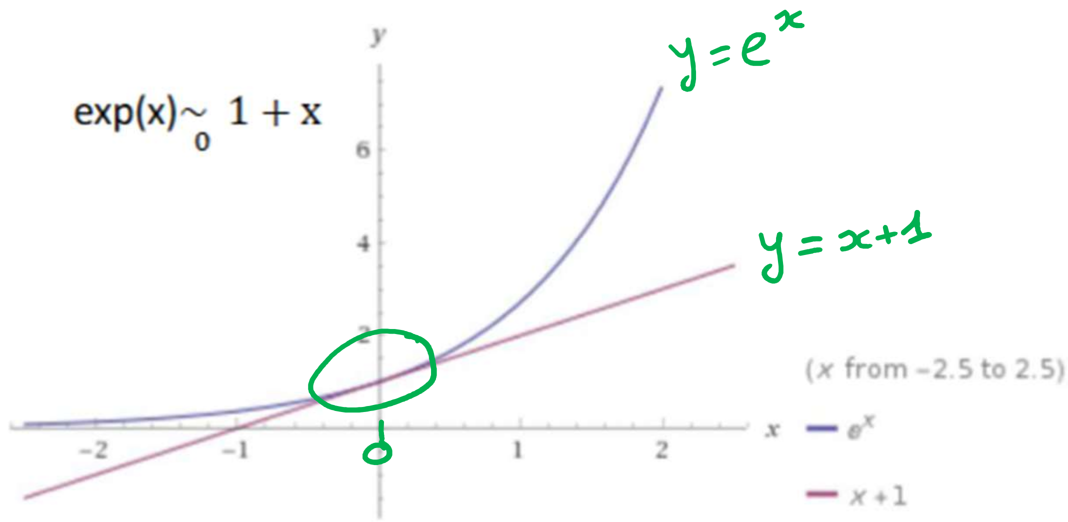
$\sqrt{1+x}\underset{0}{\sim} f(0)+x f'(0)$ donc $\sqrt{1+x}\underset{0}{\sim} 1+\dfrac{x}{2}$

$f(x) \Rightarrow f(0)=\sqrt{1+0}=\sqrt{1}=1$; $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(0)=\dfrac{1}{2}$

$(\sqrt{U})'=\dfrac{U'}{2\sqrt{U}}$

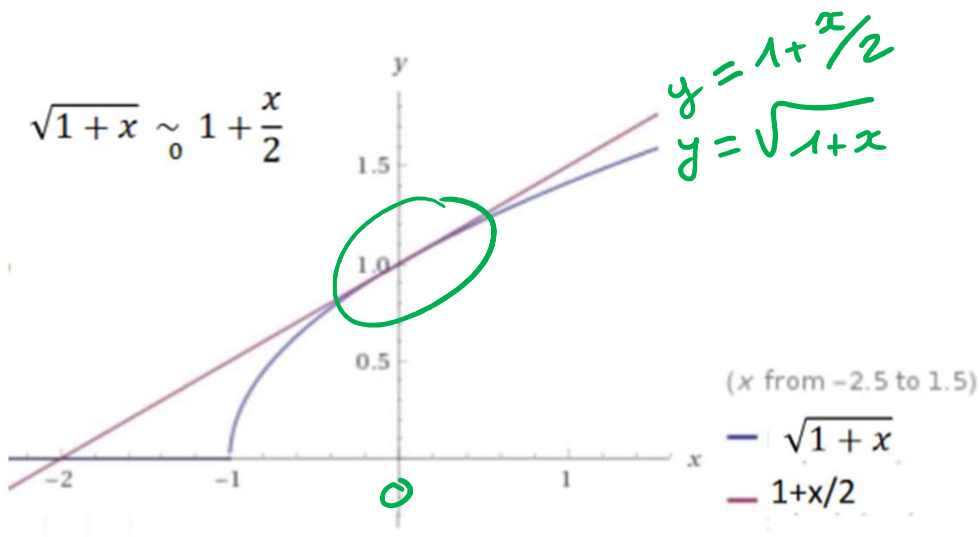


$\sin(x) \underset{0}{\sim} x$
$y = x$
$y = \sin x$
0
(x from −3.8 to 3.8)
$\sin(x)$
x



$\exp(x) \underset{0}{\sim} 1 + x$
$y = e^x$
$y = x+1$
0
(x from −2.5 to 2.5)
e^x
$x+1$

$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
$y = x$
$y = \ln(1+x)$
(x from −1 to 1)
$\ln(1+x)$
x



$\sqrt{1+x} \underset{0}{\sim} 1 + \frac{x}{2}$
$y = 1 + x/2$
$y = \sqrt{1+x}$
0
(x from −2.5 to 1.5)
$\sqrt{1+x}$
$1+x/2$

Applications en physique :

EDLCC

Le pendule pesant

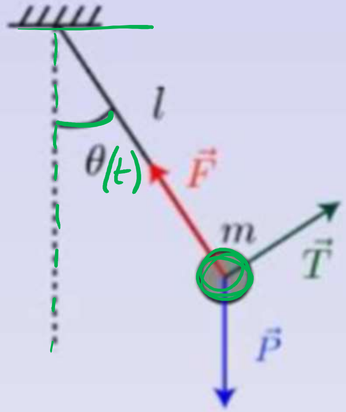
- Equation en θ

$\theta'' + k\theta' + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0.$

- Mise en équation :

$$\boxed{\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

$\theta \sim 0.$



- Equation différentielle :
  - Non linéaire !
  - Résolution analytique compliquée
- Solutions possibles :
  - Si θ petit alors $\sin\theta \simeq \theta$: oscillateur harmonique

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

EDLCC

  - Résolution numérique

$(1+x)^\alpha \underset{0}{\sim} f(0)+x f'(0)$ donc $(1+x)^\alpha \underset{0}{\sim} 1+\alpha x$

Page 30 chapitre 2

$\overset{\shortparallel}{f(x)} \Rightarrow f(0)=(1+0)^\alpha = 1^\alpha = 1$; $f'(x)=\alpha\cdot(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow f'(0)=\alpha(1+0)^{\alpha-1} = \alpha\cdot 1^{\alpha-1} = \alpha$

$\sqrt{1+x} \underset{0}{\sim} 1+\frac{1}{2}x$ est un cas particulier car: $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$

$\tan(x) \underset{0}{\sim} f(0)+x f'(0)$ donc $\boxed{\tan x \underset{0}{\sim} x}$

$\overset{\shortparallel}{f(x)} \Rightarrow f(0)=\tan 0 = 0$; $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow f'(0)=\frac{1}{\cos^2 0} = 1$

$\sqrt[3]{1+x} \underset{0}{\sim} 1+\frac{1}{3}x$

$= (1+x)^{1/3}$

$\cos(x) \underset{0}{\sim} f(0)+x f'(0)$ donc $\cos x \underset{0}{\sim} 1$.

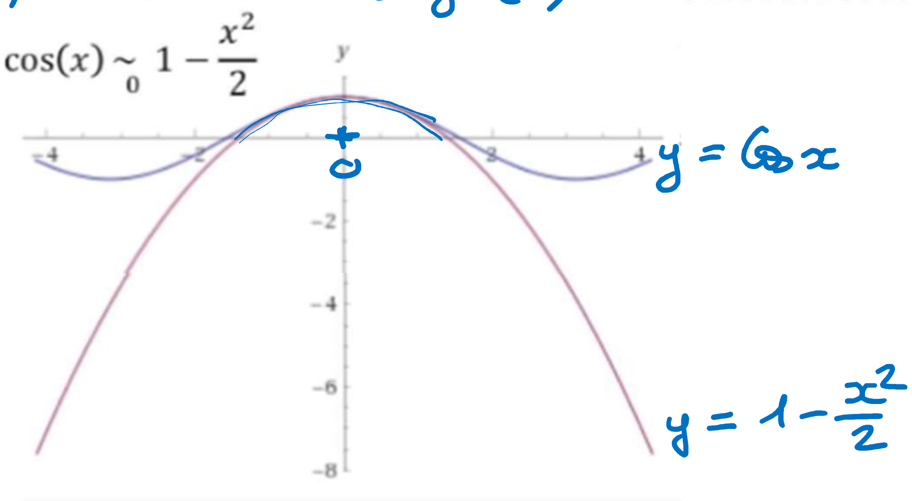
$\overset{\shortparallel}{f(x)} \Rightarrow f(0)=1$; $f'(x)=-\sin x \Rightarrow f'(0)=0$

Page 30 chapitre 2

Si f est 2 fois dérivable en x_0, alors : $\boxed{f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x_0) + (x - x_0).f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}.f''(x_0)}$

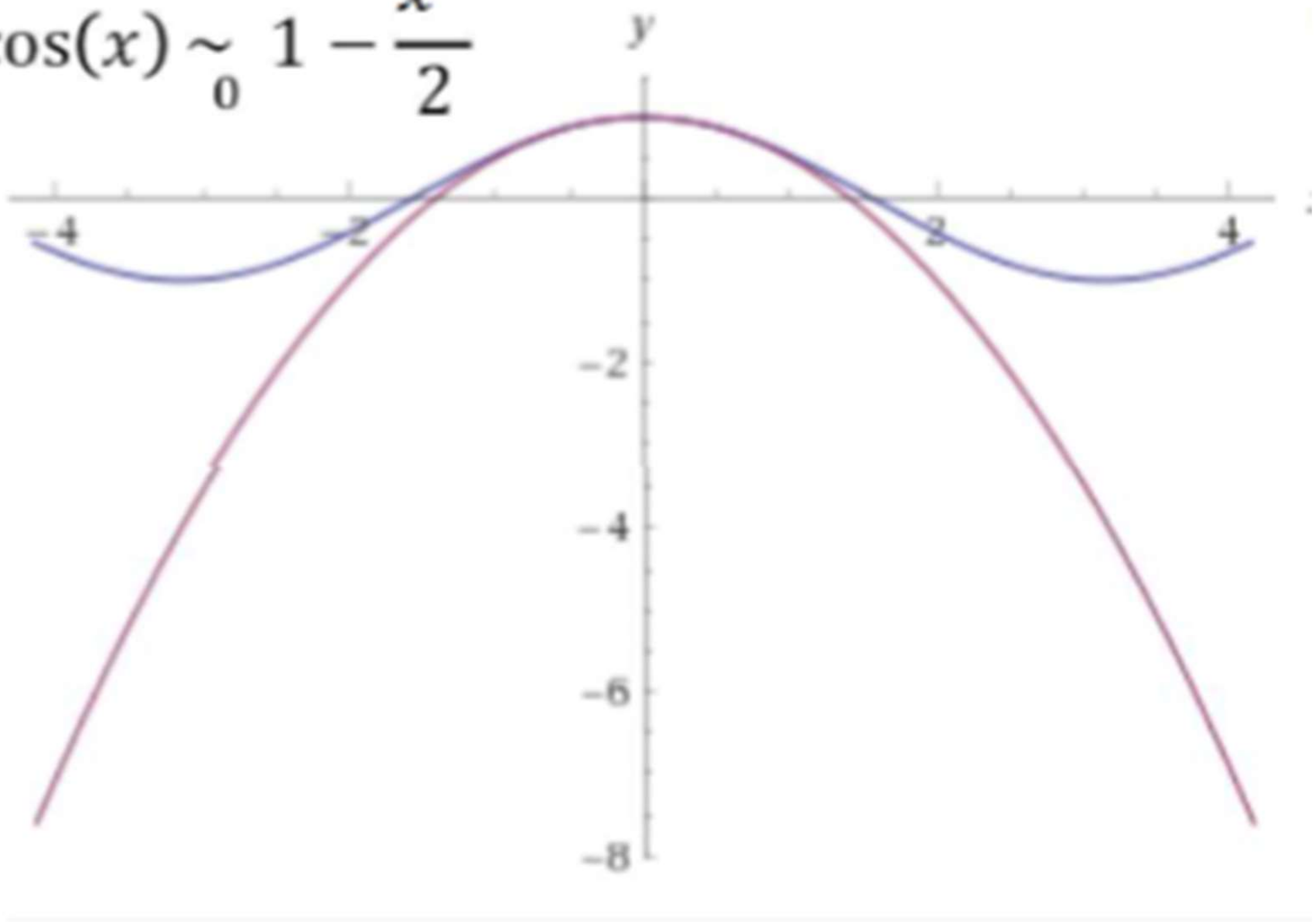
$\cos(x) \underset{0}{\sim} \underbrace{f(0)}_{=1} + x \underbrace{f'(0)}_{=0} + \frac{x^2}{2} \underbrace{f''(0)}_{=-1}$ donc $\cos x \underset{0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2}$

$f'(x) = -\sin x \Rightarrow f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -\cos 0 = -1$.



Page 30 chapitre 2

$$\cos(x) \underset{0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2}$$



Page 30 chapitre 2

Opérations

- Soient f_1, g_1, f_2, g_2 quatre fonctions et x_0 un réel ou $\pm\infty$.

$$\text{Si } \begin{cases} f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1 \\ \text{et} \\ f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} f_1 . f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 . g_2 \\ \text{et} \\ \dfrac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2} \end{cases}$$

(pour le quotient, f_2 et g_2 ne s'annule pas pour x voisin de x_0 sauf peut-être en x_0)

- f, g, h sont trois fonctions,

$$\text{Si } f(X) \underset{X_0}{\sim} g(X) \text{ et } \lim_{x \to x_0} h(x) = X_0 \text{, alors } f(h(x)) \underset{x_0}{\sim} g(h(x))$$

Page 30 chapitre 2

Exemples :

Compléter : $f(x) = \dfrac{-x^7 + 3x^2}{x(x-1)^3} \underset{\infty}{\sim}$ $\dfrac{-x^7}{x.x^3} = -\dfrac{x^7}{x^4} = -x^3$ ....

....

....

....

....

....

Page 31 chapitre 2

Théorème Soient f, g deux fonctions et x_0 un réel ou $\pm\infty$.

$$\text{Si } f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \text{ alors } \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$\boxed{\text{« } \frac{\infty}{\infty} \text{ » FI}}$

Exemples : Calculer $\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x)}$ où $f(x) = \dfrac{(1-x)^7.(x+1)}{(x^3+2x^2-1).(3x^2-1)^2}$

$f(x) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{(-x)^7 . x}{x^3 . 9x^4} = \dfrac{-x^8}{9 . x^7} = -\dfrac{x}{9}$

donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -\dfrac{x}{9} = -\infty$

Page 31 chapitre 2

Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\tan(x)}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ FI $\qquad f(x) \underset{0}{\sim} ?$

$f(x) \underset{0}{\sim} f(0) + x f'(0)$ $\qquad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ voir page 29

$\tan x \underset{0}{\sim} x$ voir page 30

donc $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

$\lim_{x\to +\infty} f(x)$ $\qquad f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \text{"}1^{\infty}\text{"}$

(*) On pose $X = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$ et $\lim_{x\to +\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{X\to 0} e^{\frac{1}{X}\ln(1+X)} = e$

$\ln(1+X) \underset{0}{\sim} X \Rightarrow \frac{\ln(1+X)}{X} \underset{0}{\sim} \frac{X}{X} = 1$

$f(x) = \exp\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right) = \exp\left(x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$ "$0 \times \infty$" FI.

$\alpha \ln X = \ln X^{\alpha}$ et $e^{\ln X^{\alpha}} = X^{\alpha}$ (*)

Page 32 chapitre 2

Technique 5 : Théorème de l'Hospital

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur $]a,x_0[$, dont la limite en x_0 est nulle ou infinie, si $g'(x)$ ne s'annule pas sur $]a,x_0[$, et si la limite : $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x_0]{} \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

$\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ $\leftarrow f(0)$, $\leftarrow g(0)$

$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{0}{\sim} \frac{f(0)+x f'(0)}{g(0)+x g'(0)}$

$\underset{0}{\sim} \frac{x f'(0)}{x g'(0)}$

$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{0}{\sim} \frac{f'(0)}{g'(0)}$

Exemples :

$L=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x^2+3x}=$ "$\frac{0}{0}$" ....

th de l'Hospital : $L=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2x+3}=\frac{1}{3}$ ....

(autre méthode : $\frac{\sin x}{x^2+3x}\underset{0}{\sim}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$ ....

Page 32 chapitre 2

$L = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = $ "$\frac{\infty}{\infty}$" ……………………………………………………………………

Th de l'Hospital : $L = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} \times x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = +\infty$ ……………

(autre méthode : … $\ln x \underset{\infty}{<<} \sqrt{x}$ … donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = +\infty$ ……………………………

……………………………………………………………………………………………………)

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{x^3+5x^2} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \quad FI$$

Page 33 chapitre 2

Avec la règle de l'Hospital : $L = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos(2x)-1)'}{(x^3+5x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(2x)}{3x^2+10x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \quad FI$

" " " " : $L = \lim_{x\to 0} \frac{(-2\sin(2x))'}{(3x^2+10x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos(2x)}{6x+10} = \frac{-4}{10} = -\frac{2}{5}$

(autre méthode : $\frac{\cos(2x)-1}{x^3+5x^2} \underset{0}{\sim} \frac{-2x^2}{5x^2} = \frac{-2}{5}$

donc $L = -\frac{2}{5}$.

)

On sait que $\cos X \underset{0}{\sim} 1 - \frac{X^2}{2} \iff \cos X - 1 \underset{\cancel{X}\to 0}{\sim} -\frac{X^2}{2}$ page 30

On pose $X = 2x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ $\quad \underline{\cos(2x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim}} -\frac{(2x)^2}{2} = -\frac{4x^2}{2} = -2x^2$

Exercice 5 Calculer la limite des fonctions suivantes au « point » a donné.

Page 40 chapitre 3

1) $f(x)=\dfrac{(x^4-1)(x^2+3)}{2x(x^3-2)(x^2+2)}$ a=∞ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$

2) $g(x)=\dfrac{(x^7-2x)(x-4)}{(x^6-2x)(x^3-x)}$ a=∞ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=$

3) $h(x)=\dfrac{x^6-3x^4+1}{(x+1)(x^4+3)}$ a=∞ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=$

4) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^3-1}$ a=1 $\lim\limits_{x\to1} f(x)=$

5) $f(x)=\dfrac{x^3+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-2}$ a=∞ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$

6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ a=3 $\lim\limits_{x\to3} f(x)=$

7) $f(x)=\dfrac{3x^5\cdot\sin(5x^4)}{(3x^2+2x)^4\cdot\ln(1+2x)}$ $a=0$

7 $f(x)=\dfrac{3x^5\cdot\sin(5x^4)}{(3x^2+2x)^4\cdot\ln(1+2x)}$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=$

1) $f(x) = \dfrac{(x^4 - 1)(x^2 + 3)}{2x(x^3 - 2)(x^2 + 2)}$ $a = \infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \text{"}\dfrac{\infty}{\infty}\text{"}$ FI

Rédaction 1

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^4 \cdot x^2}{2x \cdot x^3 \cdot x^2} = \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$

Rédaction 2 :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 \cdot x^2}{2x \cdot x^3 \cdot x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}$$

FAUX $f(x) \cancel{=} \dfrac{x^4 \cdot x^2}{2x \cdot x^3 \cdot x^2} \cancel{=} \dfrac{x^6}{2x^6} \cancel{=} \dfrac{1}{2}$

2) $g(x) = \dfrac{\overbrace{(x^7 - 2x)}^{1}\overbrace{(x-4)}^{2}}{\underbrace{(x^6 - 2x)}_{3}\underbrace{(x^3 - x)}_{4}}$ $a=\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \text{"}\dfrac{\infty}{\infty}\text{"}$

$$g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\overbrace{x^7}^{1} \times \overbrace{x}^{2}}{\underbrace{x^6}_{3} \times \underbrace{x^3}_{4}} = \frac{x^8}{x^9} = \frac{1}{x}$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

2 Bis) $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ FI

$$g(x) \underset{0}{\sim} \frac{\overbrace{-2x}^{1} \cdot \overbrace{(-4)}^{2}}{\underbrace{(-2x)}_{3} \cdot \underbrace{(-x)}_{4}} = \frac{4}{x}$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -\infty$

3) $h(x) = \dfrac{x^6 - 3x^4 + 1}{(x+1)(x^4+3)}$ a=∞

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \text{“}\dfrac{+\infty}{\infty}\text{”}$ $h(x) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{x^6}{x \times x^4} = \dfrac{x^6}{x^5} = x$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

3 Bis) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \text{“}\dfrac{\infty}{-\infty}\text{”}$ $h(x) \underset{-\infty}{\sim} x$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$.

4) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^3-1}$ a=1

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \text{“}\dfrac{0}{0}\text{”}$ FI

Avec la règle de l'Hospital : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x+2}{3x^2} = \dfrac{4}{3}$

5) $f(x) = \dfrac{x^3 + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x} - 2}$ a=∞

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \text{“}\dfrac{\infty}{\infty}\text{”}$ F.I

$f(x) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{x^3}{\sqrt{x}} = \dfrac{x^3}{x^{1/2}} = x^{3-\frac{1}{2}} = x^{5/2}$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$ a=3

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ (FI)

Avec la règle de l'Hospital : $(\sqrt{U})' = \dfrac{U'}{2\sqrt{U}}$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1}$

$L = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$

Avec l'expression conjuguée : $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} \times \dfrac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} + 2}$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}^2 - 2^2}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \dfrac{\overbrace{x+1-4}^{x-3}}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)}$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + 2}$ donc $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4} + 2} = \dfrac{1}{4}$

7) $f(x) = \dfrac{3x^5 \cdot \sin(5x^4)}{(3x^2+2x)^4 \cdot \ln(1+2x)}$ $\quad a = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ FI

$f(x) \underset{0}{\sim} f(0) + X \cdot f'(0)$

DS : $\sin X \underset{0}{\sim} X$ car $\sin X \underset{0}{\sim} \underbrace{\sin 0}_{0} + X \cdot \underbrace{\cos 0}_{1}$

$\ln(1+X) \underset{0}{\sim} X$ car $\ln(1+X) \underset{0}{\sim} \underbrace{\ln(1+0)}_{0} + X \cdot \dfrac{1}{1+0}$

$\sin(5x^4) \underset{x\to 0}{\sim} ?$ on pose $X = 5x^4 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $\sin(5x^4) \underset{x\to 0}{\sim} 5x^4$

$\ln(1+2x) \underset{x\to 0}{\sim} ?$ On pose $X = 2x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $\ln(1+2x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$

$f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{3x^5 \cdot 5x^4}{\underbrace{(2x)^4}_{2^4 \cdot x^4} \cdot 2x} = \dfrac{15 x^9}{32 x^5}$

$\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{15 x^4}{32}}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 .$ $\Leftarrow$

Partie C : Fonctions réciproques de exp et tan

Page 34 chapitre 3

Introduction

Une fonction f est définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, si à tout x de D on peut associer un unique nombre noté f(x), et appelé image de x par f.

On écrit $f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & f(D) \\ \rotatebox{90}{$\in$}\; x & \longmapsto & y \;\rotatebox{90}{$\in$}= f(x) \end{array}$ $\Longrightarrow$ $g : f(D) \longrightarrow D$, $y \longmapsto x$ unique.

D est appelé l'ensemble de définition de f, et f(D) l'ensemble image de D par f.

de départ — arrivée.

Peut-on déduire de f une fonction g, définie de la façon suivante ?

$$g : \begin{array}{ccc} f(D) & \longrightarrow & D \\ y & \longmapsto & x \,/\, y = f(x) \end{array}$$

tel que

La réponse est oui, à condition que la fonction f soit bijective sur D.

Notes

I. Fonction bijective

1) Définition

On appelle fonction **bijective sur D**, toute fonction $f : D \longrightarrow f(D)$

$x \longmapsto y = f(x)$

vérifiant : $\forall y \in f(D)\ \exists!\ x \in D\ /\ y = f(x)$, c'est-à-dire :

« Pour tout y, élément de f(D), il existe un unique x, élément de D tel que y=f(x) »

Exemples

✓ La fonction carré est-elle bijective sur ℝ ? sur [0 ; +∞ [?

$f : \mathbb{R} \longrightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ n'est pas bijective car $y = 9$

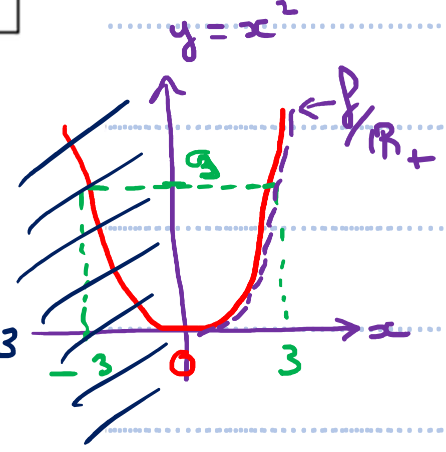
$x \longmapsto y = f(x) = x^2$ admet deux antécédents $x_1 = -3$ et $x_2 = 3$

contre exple.

"f restreinte à $\mathbb{R}_+$"

$f_{/\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est bijective car : $\forall y \in \mathbb{R}_+\ \exists!\ \underset{\sqrt{y}}{\underset{\shortparallel}{x}} \in \mathbb{R}_+ / \ y = x^2$

$x \longmapsto y = x^2$



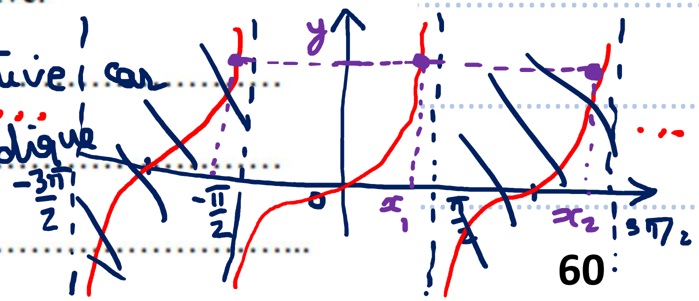
✓ Déterminer un intervalle sur lequel la fonction tangente est bijective.

$f : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas bijective car

$x \longmapsto y = \tan x$ elle est périodique

$f_{/]-\pi/2 ; \pi/2[} :]-\pi/2 ; \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective

$x \longmapsto y = \tan x$



Notes

2) Théorème de bijection

Conclusion

Toute fonction continue et strictement monotone sur D est bijective sur D.

Hyp1 Hyp2

Exemple La fonction exponentielle est-elle bijective sur son ensemble de définition ? Pourquoi ?

ens ble de déf. ens ble image

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$ est bijective sur $\mathbb{R}$ d'après le

$x \longmapsto y = f(x) = e^x$ th de bijection, car f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

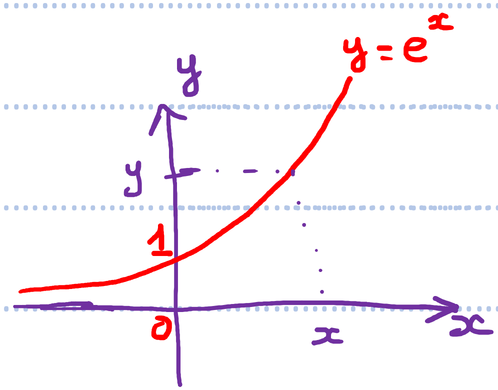
f admet donc une fonction réciproque :

$f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$y \longmapsto x \,/\, y = f(x) = e^x$

$f^{-1}(y) = \ln y$ car : $y = e^x$

$\ln y = \ln e^x \Leftrightarrow x = \ln y = f^{-1}(y)$



$x^{1/6} = \sqrt[6]{x}$

Notes

$\frac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}$

$\frac{1}{x^2} = (x^2)^{-1} = x^{-2}$

II. Fonction réciproque

1) Définition

$\boxed{x \geq 0}$ fct réciproque de $x^2 = \sqrt{x}$

Définition/Théorème Soit une fonction bijective $f : D \longrightarrow f(D)$
$x \longmapsto y = f(x)$

il existe alors une fonction notée f^{-1} et appelée « fonction réciproque de f »,
telle que : $f^{-1} : f(D) \longrightarrow D$
$y \longmapsto x = f^{-1}(y)$

Remarques : $\forall \ x \in D, \ \underbrace{(f^{-1} \circ f)(x)}_{f^{-1}(f(x))} = x$ et $\forall \ y \in f(D), \ \underbrace{(f \circ f^{-1})(y)}_{f(f^{-1}(y))} = y$

Les courbes représentant f et f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite $y = x$.

Page 35 chapitre 3

Notes

Exemple 5 Déterminer et représenter graphiquement les fonctions réciproque des fonctions exponentielle et tangente restreinte à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, ainsi que leur dérivée respective.

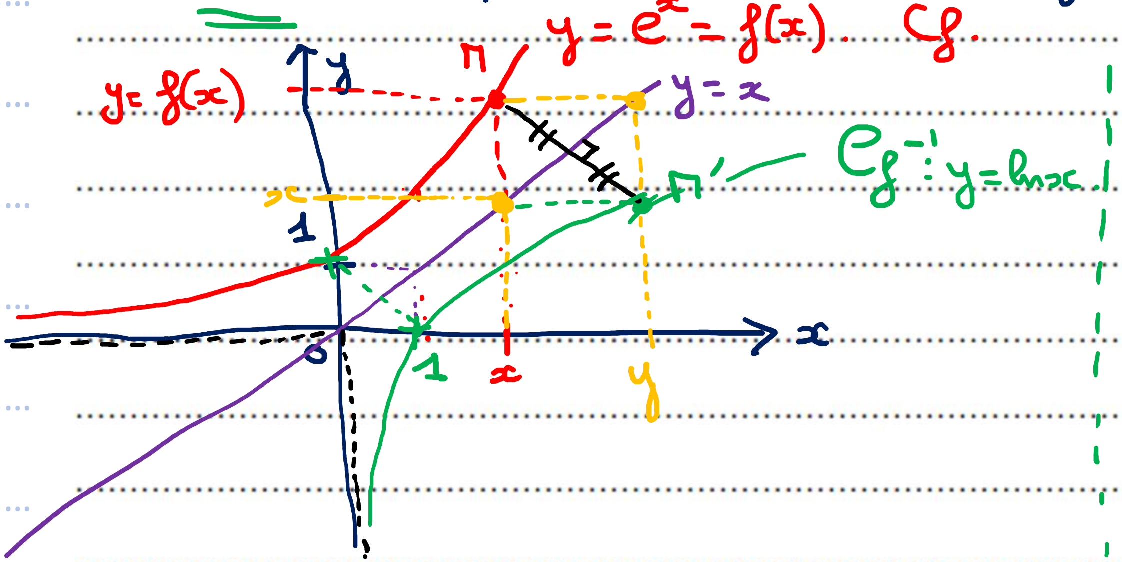
On a vu que : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \longmapsto y = f(x) = e^x$ est bijective et :

$f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$y \longmapsto x = f^{-1}(y) = \ln y$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f^{-1}(f(x)) = \ln(e^x) = x$

$\forall y \in \mathbb{R}_+^*$. $f(f^{-1}(y)) = f(\ln y) = e^{\ln y} = y$



Dérivée de f^{-1} :

$(e^{\ln y})' = (y)'$ $\forall y > 0$

$(e^u)' = u' . e^u$

$(\ln y)' . \underbrace{e^{\ln y}}_{y} = 1$

$(\ln y)' = \frac{1}{y}$ $\forall y > 0$

Notes dérivée de Arctan :

$$\left(\tan(\underbrace{\mathrm{Arctan}\,y}_{u})\right)' = (y)' \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$(\tan u)' = u'(1+\tan^2 u) = \cancel{\frac{u'}{\cos^2 u}}$$

$$(\mathrm{Arctan}\,y)' \cdot \left(1 + \underbrace{\tan^2(\mathrm{Arctan}\,y)}_{y^2}\right) = 1$$

$$(\mathrm{Arctan}\,y)' = \frac{1}{1+y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Vert une fonction :

$$(\mathrm{Arctan}\,u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

On appelle fonction tangente restreinte à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, la fonction définie par :

$$\tan_{/\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[} : \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = \tan(x)$$

P.38

Cette fonction est strictement croissante et continue, elle est donc bijective et admet alors une fonction réciproque notée Arctan et appelée Arctangente, définie par :

$$\text{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$$
$$y \longmapsto x = \text{Arctan}(y) \text{ tel que } y = \tan(x)$$

Arctan est une fonction continue et strictement croissante.

$$\tan(\text{Arctan}(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\text{Arctan}(\tan(x)) = x \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\frac{d}{dx}(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Note