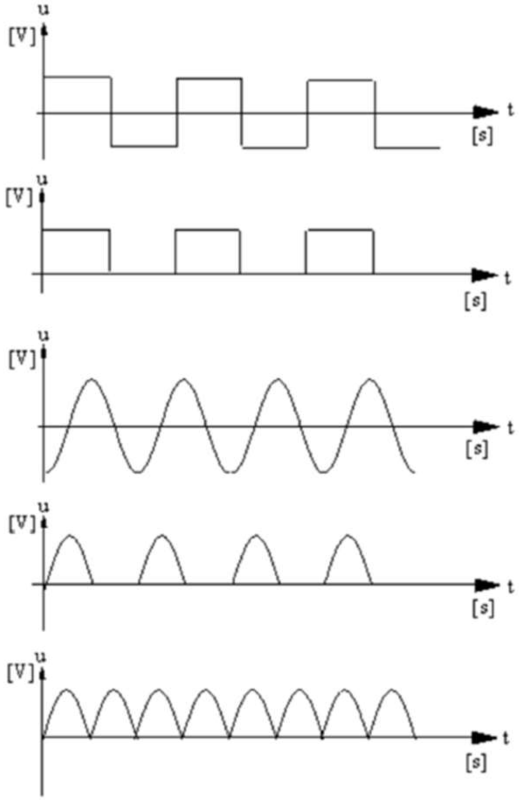
BACHELOR UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE

Ressource R1-04 : OUTILS MATHEMATIQUES ET LOGICIELS

Chapitre 3 page 4

Chapitre 4 : Les bases du calcul intégral pour le GEII



signal	U_m	U_{eff}
carré symétrique	0	U_{max}
carré positif	$\frac{U_{max}}{2}$	$\frac{U_{max}}{2}$
alternatif sinusoïdal	0	$\frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$
pulsé redressement simple alternance	$\frac{U_{max}}{p}$	$\frac{U_{max}}{2}$
pulsé redressement double alternance	$\frac{2 \times U_{max}}{p}$	$\frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$

Partie A : Introduction

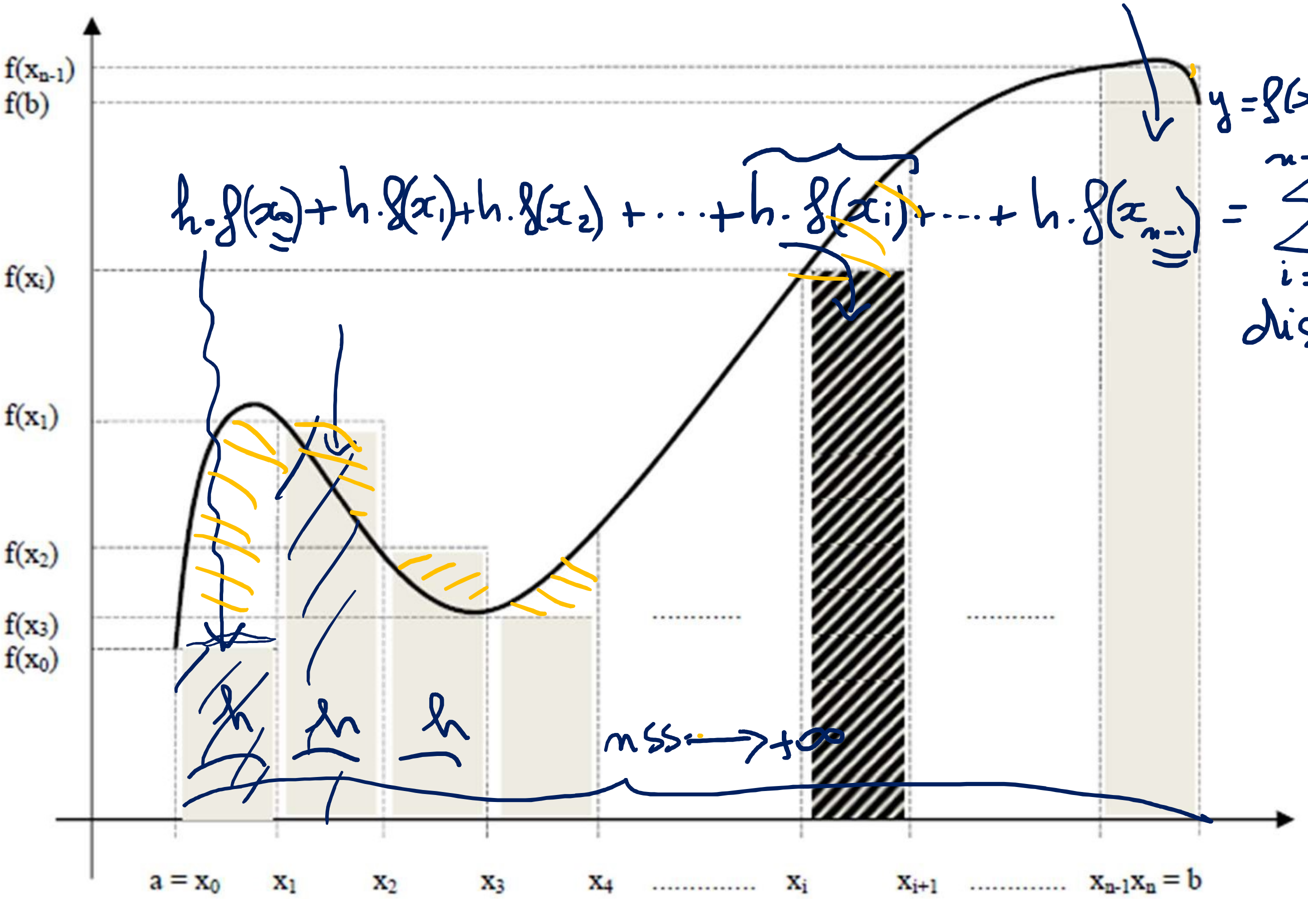
Chapitre 4 page 5

I. Généralités

1) Sommes de Riemann

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Somme continue

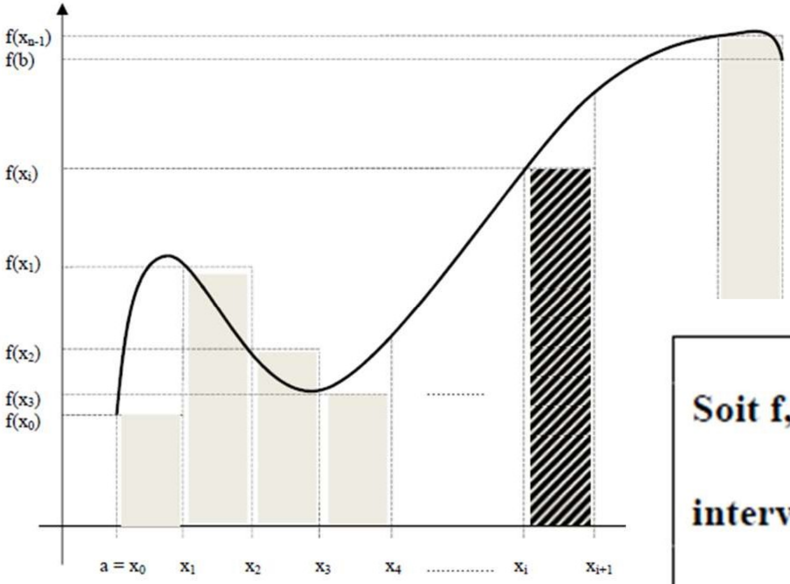


$$h\cdot f(x_0)+h\cdot f(x_1)+h\cdot f(x_2)+\dots+h\cdot f(x_i)+\dots+h\cdot f(x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} h\cdot f(x_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx$$

discrète

$$h = \frac{b-a}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Chapitre 4 page 5



Soit f, une fonction définie sur un intervalle [a,b]. On divise l'intervalle [a,b] en n sous intervalles de même longueur h, on a alors : $h = \dfrac{b-a}{n}$

On note $[x_0,x_1]$; $[x_1,x_2]$; $[x_2,x_3]$; $[x_3,x_4]$; … ;$[x_i,x_{i+1}]$;… ;$[x_{n-1},x_n]$, ces n intervalles, on a alors :

$x_0 = a$; $x_1 = a+h$; $x_2 = a+2h$; ... ; $x_i = a+ih$;…$x_{n-1} = a+(n-1)h$; $x_n = a+nh$

$h.f(x_i)$ est l'aire algébrique du rectangle hachuré.

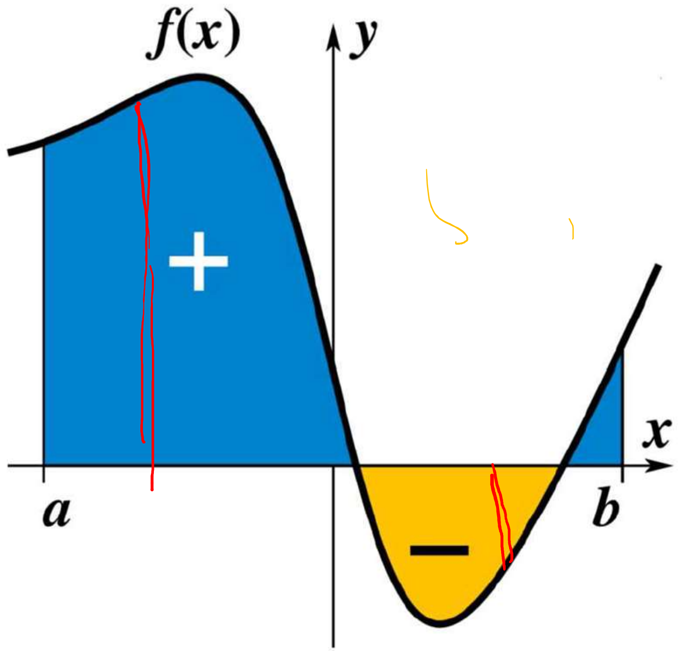
Donc $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} h.f(x_i)$ est l'aire algébrique de tous les rectangles.

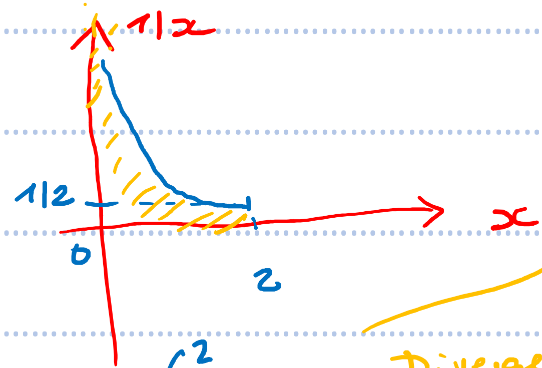
Si n, le nombre de sous-intervalle tend vers l'infini, alors h tend vers 0.

On dit que la fonction f est intégrable sur [a,b] lorsque $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe et est finie, on note alors : $\boxed{\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} S_n}$.

Chapitre 4 page 6

- Conséquence : La valeur de $\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} S_n$ est donc l'aire algébrique du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
- Théorème : Toute fonction continue sur [a,b] est intégrable sur [a,b]





$\int_0^2 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$ Diverge $\qquad \frac{1}{x} \in C^0(]0;2])$

intégrale généralisée impropre.

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge.

Notes

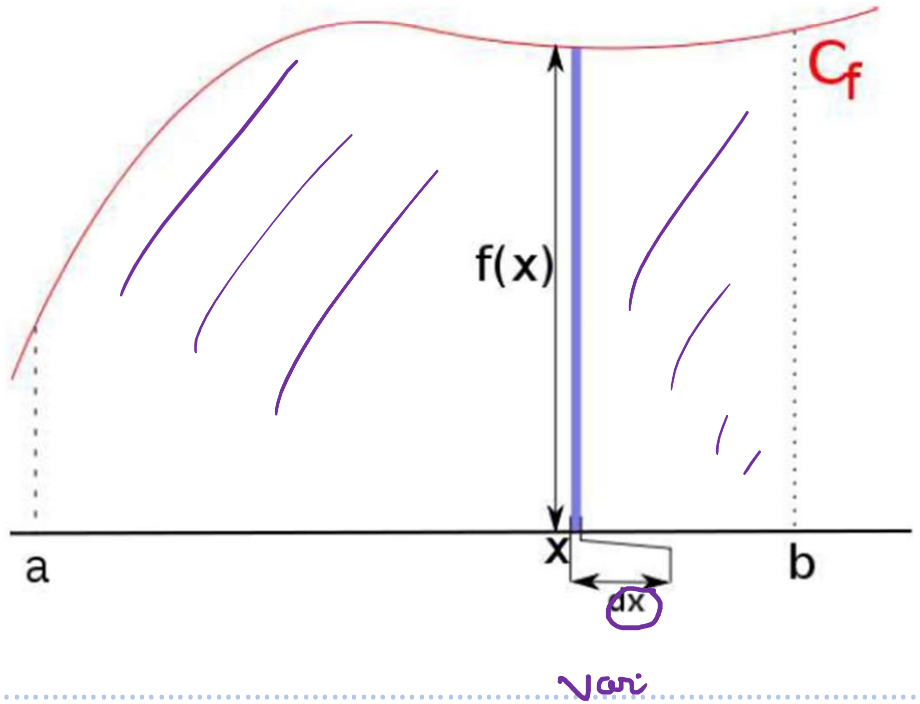
Chapitre 4 page 7

3) Remarques :

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,h \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx$$

Discrète — Continue

✓ Notation de l'intégrale : Il ne faut pas oublier dx !!!



dx est une variation infinitésimale de x.
f(x)dx est donc l'aire algébrique infinitésimale du rectangle de côtés f(x) et dx.
$\int_a^b f(x)dx$ est la somme continue des aires algébriques de ces rectangles lorsque x parcourt l'intervalle [a,b]
$\int_a^b f(x)dx$ est donc l'aire algébrique du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équation x=a et x=b.

2) Exemple

a) Pré-requis 1 : Somme des n+1 premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$.

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

b) Pré-requis 2 : Limite à connaître : $\lim\limits_{X \to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$

c) A l'aide de la définition de l'intégrale ci-dessus, calculer $I = \int_0^1 e^x dx$

$a = 0$; $b = 1$; $h = 1/n$; $f(x) = e^x$; $x_0 = 0$; $x_1 = 1/n$; $x_2 = 2/n$; … ; $x_i = i/n$; …. ; $x_n = 1$.

Aire algébrique de tous les rectangles : $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} h.f(x_i) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}.e^{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n}.\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^i$

Il s'agit de la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison $q = e^{\frac{1}{n}}$, on applique donc la formule du a)

$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$, et on obtient : $S_n = \frac{1}{n}.\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^i = \frac{1}{n}.\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}.\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$

Calculons alors $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}.\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right)$, ce qui donne la forme indéterminée « $0 \times \infty$ ».

Pour lever cette indéterminée, on pose le changement de variable $X = \frac{1}{n}$, et on utilise le b).

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}.\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right) = \lim\limits_{X\to 0}\left(X.\frac{1-e}{1-e^X}\right) = (1-e).\lim\limits_{X\to 0}\left(\frac{X}{1-e^X}\right)$

Comme $\lim\limits_{X\to 0}\frac{e^X-1}{X} = 1$, alors $\lim\limits_{X\to 0}\left(\frac{X}{1-e^X}\right) = -\frac{1}{\lim\limits_{X\to 0}\left(\frac{1-e^X}{X}\right)} = -1$,

Ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n == (1-e).\lim\limits_{X\to 0}\left(\frac{X}{1-e^X}\right) = e-1$, il s'agit donc d'une limite finie.

La fonction exponentielle est donc intégrable sur [0 ;1], et : $\int_0^1 e^t dt = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = e-1$.

$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0$

$= e - 1$

Chapitre 3 page 6

Notes

4) Fonctions primitives

Théorème **Soit f, une fonction intégrable sur [a,b]. On appelle fonction primitive de f sur [a,b] toute fonction notée F, définie par : $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a, b]$.**

Notes

ENONCE

$$\boxed{A = \int_a^b f(t)\,dt}$$

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

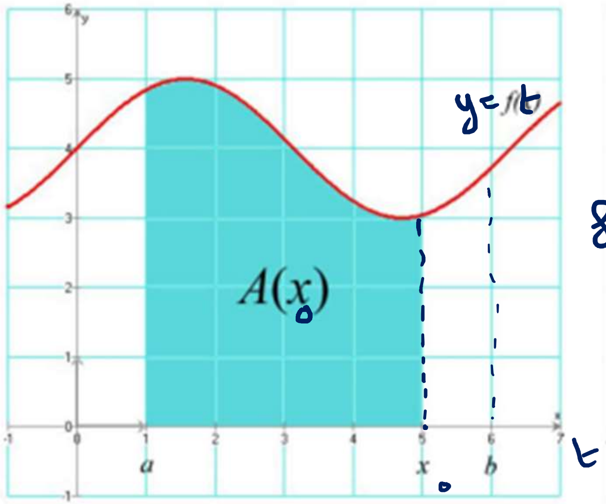
$$A(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \qquad \boxed{A(b) = \int_a^b f(t)\,dt = A}$$

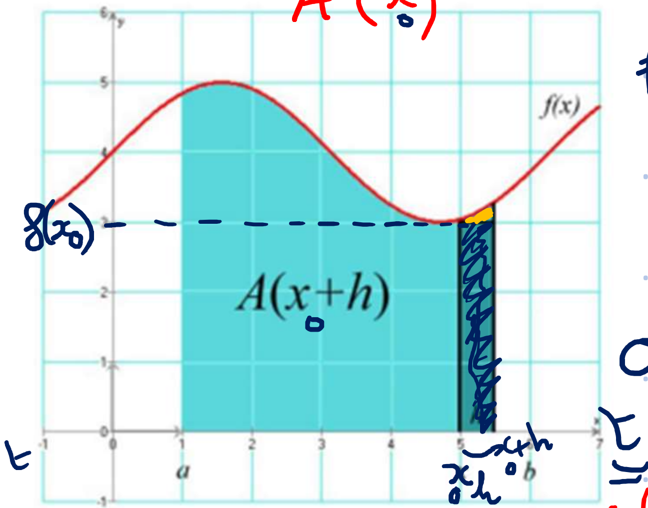
$$A(x_0+h) - A(x_0) \approx h \cdot f(x_0) \Rightarrow \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx f(\cancel{x})$$

h très petit $h \to 0$

$$\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h}}_{A'(x_0)} = f(x_0)$$

$= f(x_0)$ donc A est une primitive de f.





$$A(x) = F(x) + C$$

$$\boxed{A(b) = F(b) + C}$$

$$0 = A(a) = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

$$A(b) = F(b) - F(a)$$

Partie B : Définitions et propriétés

Chapitre 4 page 8

I. Fonctions primitives

Théorème/définition **Soit f, une fonction continue sur [a,b]. On appelle fonction primitive de f sur [a,b] toute fonction notée F, définie par : $F'(x) = f(x) \ \forall x \in [a,b]$.**

Remarque Si $G(x) = F(x) + Cte$, alors $G'(x) = F'(x) = f(x) \ \forall x \in [a,b]$. G est donc aussi une primitive de f sur [a,b].

Notation **On notera : $\int f(x)dx$ toutes les fonctions primitives de f, on a donc :**

$$\int f(x)dx = F(x) + cte$$

Exemples

* $g(x) = 3x + 2 \Rightarrow g'(x) = 3$

$f(x) = 3 \Rightarrow F(x) = 3x + cte$

Notation: $\int 3\,dx = 3x + cte$

* Notes $g(t) = t^3 \Rightarrow g'(t) = 3t^2$

$f(t) = 3t^2 \Rightarrow F(t) = t^3 + cte$

$$\left(\frac{t^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}\left(t^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3t^2 = t^2$$

$$\int 3t^2 dt = t^3 + cte$$

* $\int 5t^4 \, dt = t^5 + cte$ car $(t^5)' = 5t^4$

* $\frac{1}{14}\int 14 t^{13} \, dt = \frac{t^{14}}{14} + cte$ car $\left(\frac{t^{14}}{14}\right)' = \frac{1}{14}\left(t^{14}\right)' = \frac{1}{14} \times 14 t^{13} = t^{13}$

* ♡ $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte$ ♡

* $(U+V)' = U' + V'$ et $(\alpha U)' = \alpha . U'$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

$\int (U+V) dx = \int U dx + \int V dx$ et $\int \alpha U dx = \alpha \int U dx$ "Linéarité"

* $\int (5x^3 + 2x + 7) \, dx = \int 5x^3 dx + \int 2x \, dx + \int 7 \, dx = 5\int x^3 dx + 2\int x \, dx + 7\int 1 . dx$

$= 5\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^2}{2} + 7x + cte = \frac{5x^4}{4} + x^2 + 7x + cte$

* $\int e^x dx = e^x + cte$ $\quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + cte$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\quad \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + cte$ $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$

Notes $\int \cos t \, dt = \sin t + cte$ $\int \sin t \, dt = -\cos t + Cte$

Chapitre 4 page 9

$\int \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta = \tan\theta + cte$ $\int (1+\tan^2\theta)\, d\theta = \tan\theta + cte$

$\forall \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}$

Remarque Il ne faut pas oublier dx !!

I(x) = $\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + C$ où $C \in \mathbb{R}$

primitive de $f(x) = x^2$: $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ vérif. $\left(F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)'_x = \frac{3x^2}{3} + 0 = x^2 = f(x)\right)$

I(t) = $\int x^2 \, dt = x^2 t + C$

primitive de $f(t) = x^2$: $F(t) = x^2 . t + C$ vérif. $\left(F'(t) = (x^2 . t + C)'_t = x^2 . 1 = f(t)\right)$

$(\sin x)'_t = 0$

Tableau des Primitives

$U = x \Rightarrow U' = 1.$

U est une fonction.

Chapitre 4 page 9

$\int x^{\alpha}.dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte\ ;\ \alpha \neq -1$	$\int U'.U^{\alpha}dx = \frac{U^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte\ ;\ \alpha \neq -1$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x} + cte$	$\int \frac{U'}{2\sqrt{U}}dx = \sqrt{U} + cte$
$\int e^{x}.dx = e^{x} + cte$	$\int U'.e^{U}.dx = e^{U} + cte$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln(\lvert x\rvert) + cte$	$\int \frac{U'}{U}dx = \ln(\lvert U\rvert) + cte$
$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + cte$	$\int \frac{U'}{U^2}dx = -\frac{1}{U} + cte$
$\int \cos(x).dx = \sin(x) + cte$	$\int U'.\cos(U).dx = \sin(U) + cte$
$\int \sin(x).dx = -\cos(x) + cte$	$\int U'.\sin(U).dx = -\cos(U) + cte$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)}.dx = \tan(x) + cte$	$\int \frac{U'}{\cos^2(U)}.dx = \tan(U) + cte$
$\int (1+\tan^2(x)).dx = \tan(x) + cte$	$\int U'.(1+\tan^2(U)).dx = \tan(U) + cte$
$\int \frac{1}{1+x^2}.dx = \arctan(x) + cte$	$\int \frac{U'}{1+U^2}.dx = \arctan(U) + cte$

<u>Exemples</u> : Compléter en s'aidant du tableau des primitives :

Chapitre 4 page 10

$I(x) = \int x^3 \underbrace{\sqrt{x}}_{x^{1/2}} \, dx = \int x^{7/2} \, dx = \dfrac{x^{9/2}}{9/2} + cte = \dfrac{2}{9} x^{\frac{9}{2}} + cte$

$\int x^{\alpha} \, dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \quad \forall \alpha = -1.$

$J(x) = \int 3.\cos(3x - 1) \, dx$ ……………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

$K(x) = \int 2.(2x + 5)^{10} dx$ ……………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

$Q(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx$ ....

Chapitre 4 page 10

$L(x) = \int \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x + 10} dx$ ....

....

$M(x) = \int 5.\, e^{5x} dx$ ....

....

$N(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ ....

....

$P(x) = \int \frac{1}{(x+3)^2} dx$ ....

....

$P(x) = \int (1 + tan^2(3x))dx$ ....

Chapitre 4 page 10

II. Calcul intégral

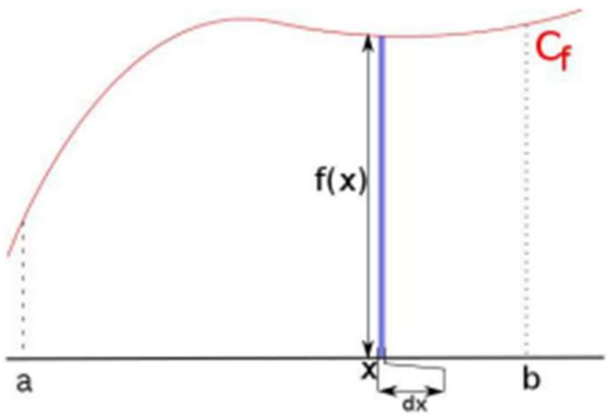
Chapitre 4 page 11

Théorème / définition : Soit f, une fonction continue sur [a,b], soit F, une fonction primitive de f. On appelle intégrale de la fonction f sur l'intervalle [a,b], le nombre noté $\int_a^b f(x)dx$ et tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Interprétation graphique : $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique du domaine compris entre la courbe représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = a et x = b.

Remarque Il ne faut pas oublier dx !!



dx est une variation infinitésimale de x.
f(x)dx est donc l'aire algébrique infinitésimale du rectangle de côtés f(x) et dx.
$\int_a^b f(x)dx$ est la somme continue des aires algébriques de ces rectangles lorsque x parcourt l'intervalle [a,b]
$\int_a^b f(x)dx$ est donc l'aire algébrique du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équation x=a et x=b.

Chapitre 4 page 11

Exemples et applications

✓ Compléter :

$$I = \int_0^1 e^t dt = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$$J = \int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Tableau des Primitives

Chapitre 4 page 9

$\int x^{\alpha}.dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \ ; \ \alpha \neq -1$	$\int U'.U^{\alpha}dx = \frac{U^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \ ; \ \alpha \neq -1$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x} + cte$	$\int \frac{U'}{2\sqrt{U}}dx = \sqrt{U} + cte$
$\int e^{x}.dx = e^{x} + cte$	$\int U'.e^{U}.dx = e^{U} + cte$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln(\|x\|) + cte$	$\int \frac{U'}{U}dx = \ln(\|U\|) + cte$
$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + cte$	$\int \frac{U'}{U^2}dx = -\frac{1}{U} + cte$
$\int \cos(x).dx = \sin(x) + cte$	$\int U'.\cos(U).dx = \sin(U) + cte$
$\int \sin(x).dx = -\cos(x) + cte$	$\int U'.\sin(U).dx = -\cos(U) + cte$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)}.dx = \tan(x) + cte$	$\int \frac{U'}{\cos^2(U)}.dx = \tan(U) + cte$
$\int (1+\tan^2(x)).dx = \tan(x) + cte$	$\int U'.(1+\tan^2(U)).dx = \tan(U) + cte$
$\int \frac{1}{1+x^2}.dx = \arctan(x) + cte$	$\int \frac{U'}{1+U^2}.dx = \arctan(U) + cte$

III. Propriétés

Chapitre 4 page 12

1) Linéarité

Soit f, g deux fonctions continues sur [a,b]. Soit α et β deux nombres réels. On a alors :

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

Exemples et applications

✓ $I = \int_{-1}^{1} (3x^7 + 2x^6 - 1)dx =$ ……………………………………………………………………………

………

………

$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx =$ ………………………………………………………………………………………

………

………

$L(x) = \int (5.\cos(2x) - e^{5x} + 9)dx = $ ....

Chapitre 4 page 12

....

....

....

....

....

....

....

....

2) Relation de Chasles

Chapitre 4 page 13

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé I. Soit a, b, c trois réels de I. On a alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

2) Relation de Chasles

Chapitre 4 page 13

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé I. Soit a, b, c trois réels de I. On a alors : $$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

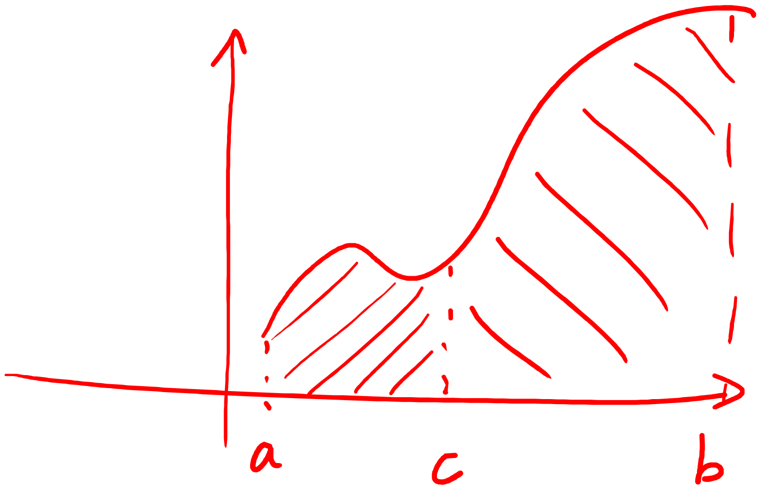
$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$$

$$\int_a^c f(t)\,dt = F(c) - F(a)$$

$$+$$

$$\int_c^b f(t)\,dt = F(b) - F(c)$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$$



<u>Exemple</u> Signal défini par morceaux : $f(x)=\begin{cases} x \text{ si } 0\le x<1 \\ -x+4 \text{ si } 1\le x\le 2\end{cases}$

chasles

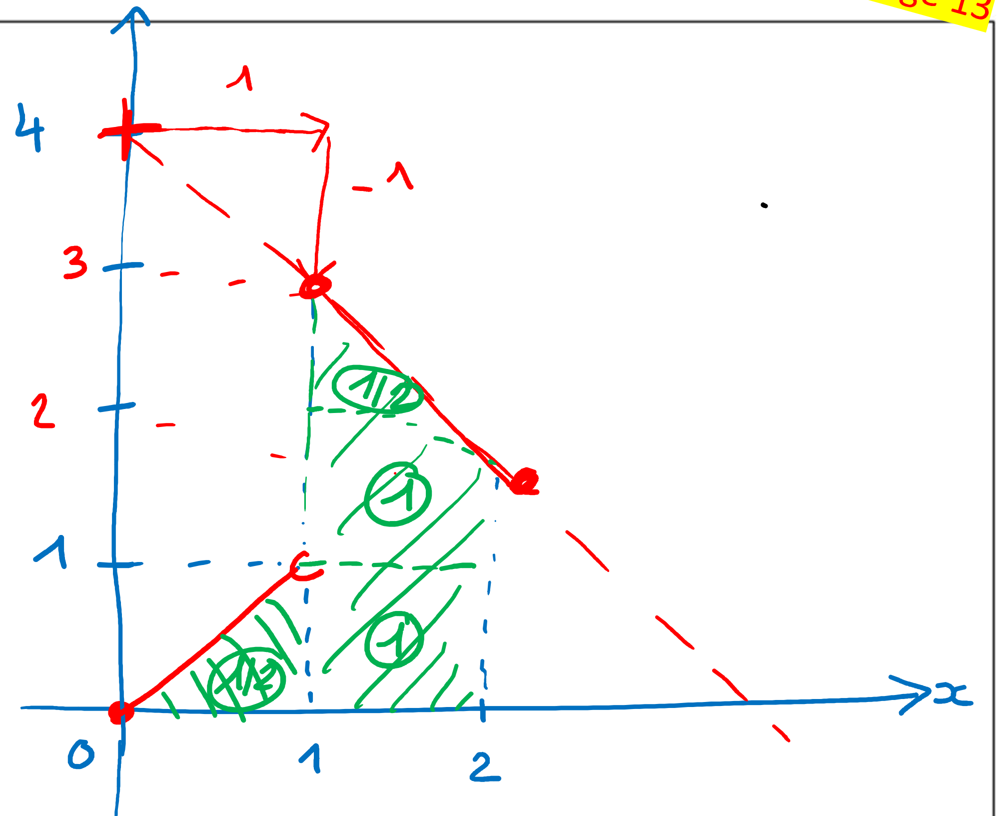
$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (-x+4)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2}+4x\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2} - 0 + \frac{-2^2}{2} + 4\times 2 - \left(\frac{-1}{2}+4\right)$$

$$= \frac{1}{2} - 2 + 8 + \frac{1}{2} - 4$$

$$= 1 + 8 - 6 = 3.$$



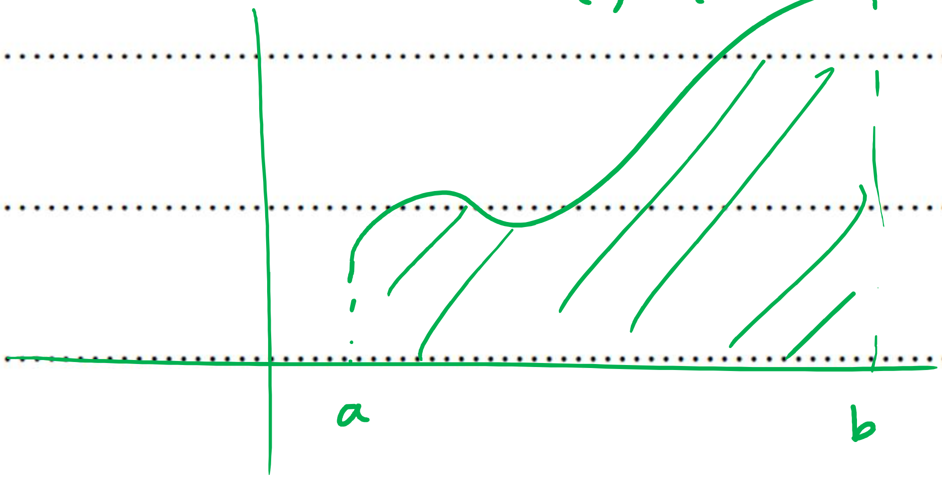
$f(1) = 3$

$$\int_0^2 f(x)dx = 3 \text{ Ua.}$$

Chapitre 4 page 13

Cas particulier $\int_a^b f(t)dt + \int_b^a f(t)dt = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ donc $\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^a f(t)\,dt = 0$

Donc : $\boxed{\underbrace{\int_b^a \mathbf{f(t)dt}}_{F(a)-F(b)} = \underbrace{-\int_a^b \mathbf{f(t)dt}}_{-(F(b)-F(a))}}$



Partie D : Intégrale de fonctions paires/impaires et/ou périodiques.

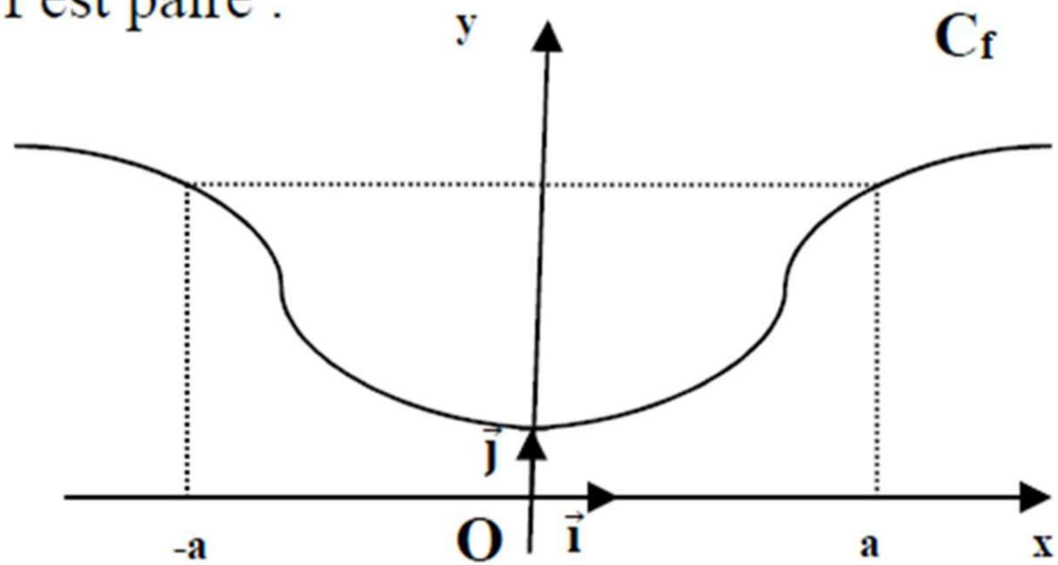
Chapitre 4 page 16

I. Intégrale de fonctions paires / impaires

1) Intégrale d'une fonction paire sur un intervalle centré en 0

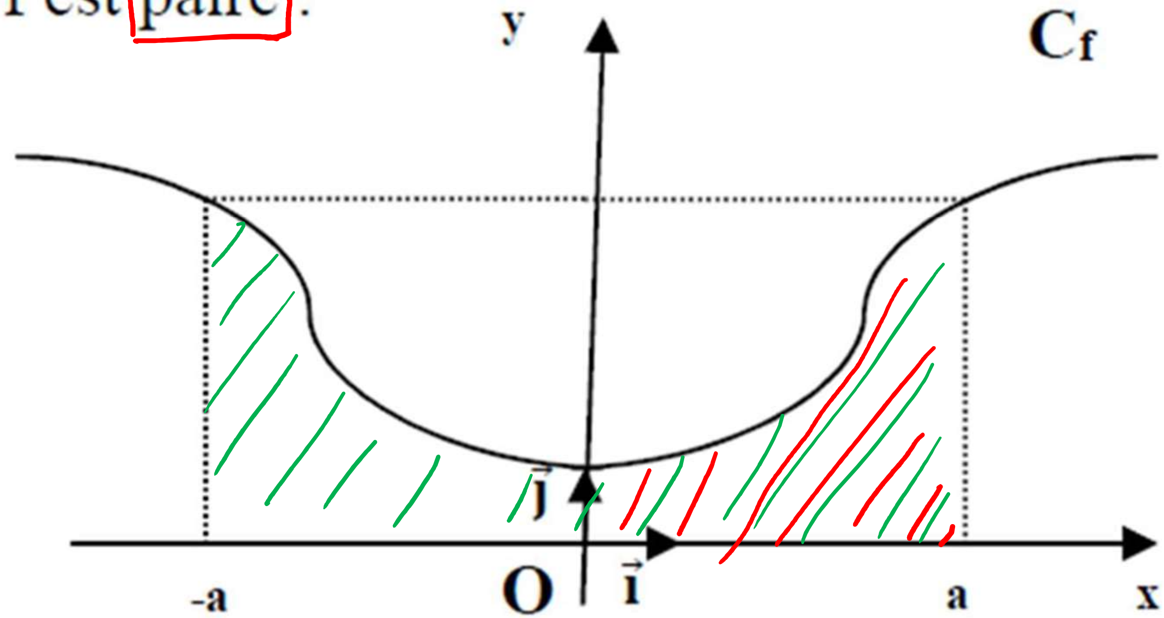
Rappel : Une fonction f, définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ centré en 0, est dite paire lorsque : $\forall x \in D \ \ f(-x) = f(x)$.
Sa représentation graphique est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

f est paire :



f est $\boxed{\text{paire}}$:

Chapitre 4 page 16



$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\times\int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

Soit f, une fonction paire et continue sur [-a,a]. On a alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2.\int_{0}^{a} f(x)dx$

paire × paire = paire ($\oplus \times \oplus = \oplus$)

paire × impaire = impaire ($\oplus \times \ominus = \ominus$)

impaire × impaire = paire ($\ominus \times \ominus = \oplus$).

Exemple $I = \int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} \underbrace{cos(3\,t).\,sin^4(3\,t)}_{f(t)}dt = \frac{2}{3} \times \int_0^{\pi/9} \underbrace{3\cos(3t)}_{U'} . \sin^4(3t)\,dt$ $\qquad \int U' U^\alpha dt = \frac{U^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

"la fonction qui à t associe cos(3t)"

$\left[-\frac{\pi}{9} ; \frac{\pi}{9}\right]$ est centré en 0. f est paire car $t \longmapsto \cos(3t)$ est paire, et

$t \longmapsto \sin(3t)$ est impaire, donc $t \longmapsto \sin^4(3t)$ est paire. $\left(\sqrt{3}^2\right)^2 = 3^2$

ici $U = \sin(3t) \Rightarrow U' = 3\cos(3t)$

$\sqrt{3}^4 \times \sqrt{3}$

$$I = \frac{2}{3} . \left[\frac{\sin^5(3t)}{5}\right]_0^{\pi/9} = \frac{2}{3}\left(\frac{\sin^5(3\pi/9)}{5} - \frac{\sin^5(0)}{5}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{\sin^5(\pi/3)}{5} = \frac{2}{15}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 = \frac{9\sqrt{3}}{15 \times 2^4} = \frac{3\sqrt{3}}{5 \times 2^4}$$

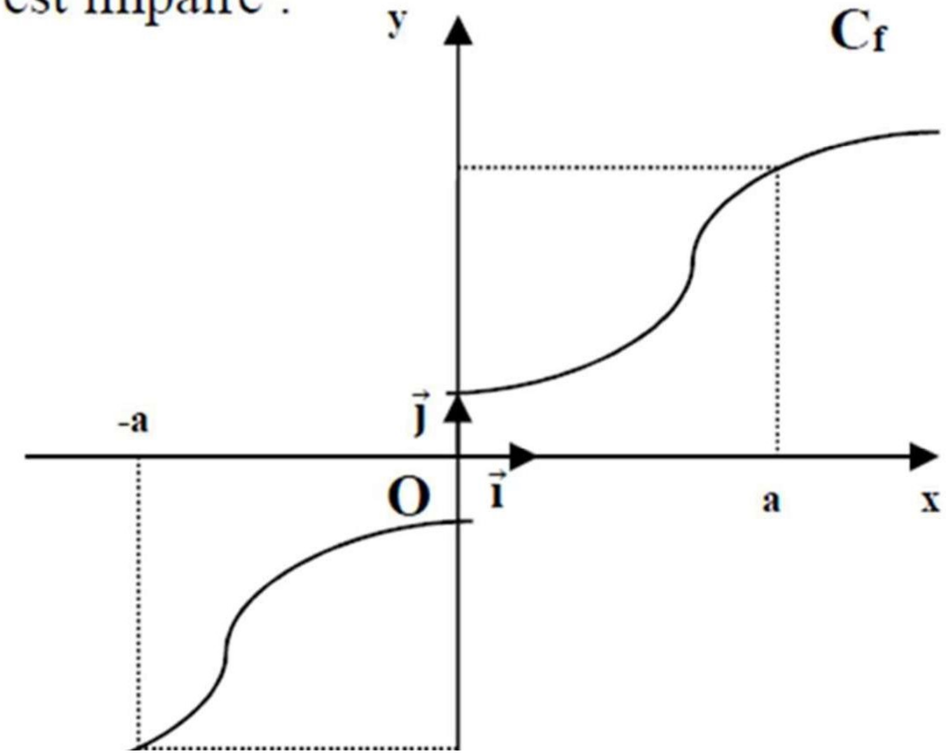
$2^4 \times 2$

Chapitre 4 page 16&17

2) Intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0

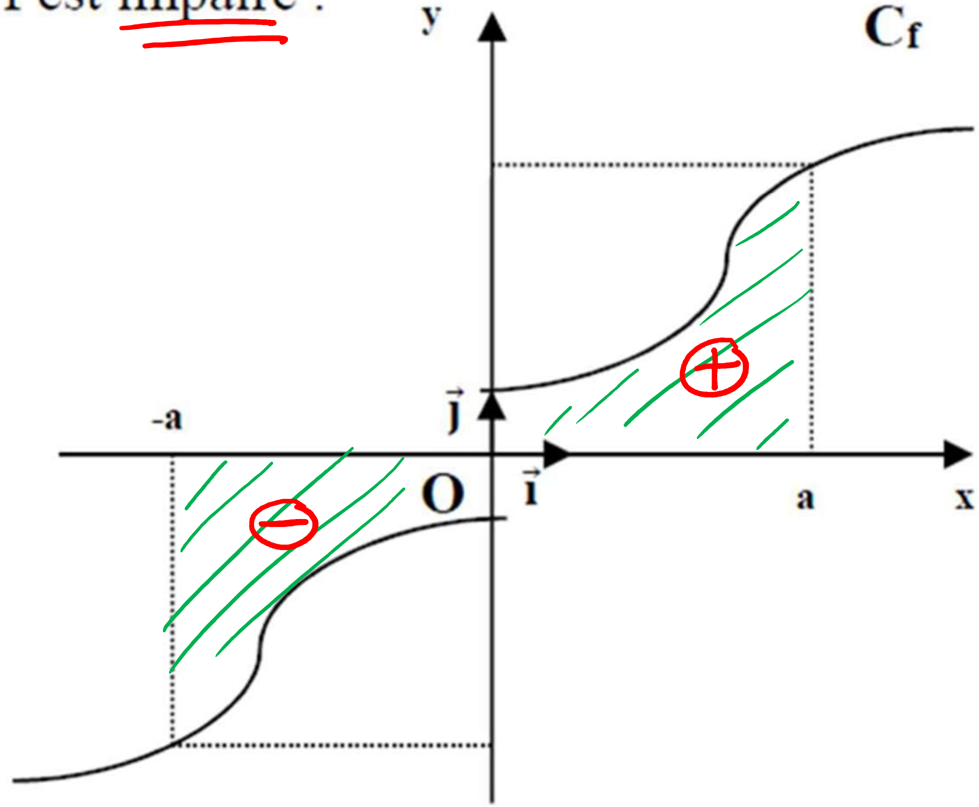
Rappel : Une fonction f, définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ centré en 0, est dite impaire lorsque : $\forall x \in D \ f(-x) = -f(x)$.
Sa représentation graphique est alors symétrique par rapport à l'origine du repère.

f est impaire :



Chapitre 4 page 17

f est impaire :



$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$

Chapitre 4 page 17

Soit f, une fonction impaire et continue sur [-a,a]. On a alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

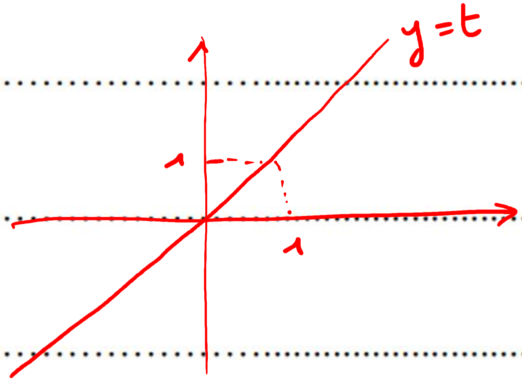
$-1 \times (-1) \times (-1) \times -1$

Exemple $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{t.\cos(t).\sin^4(t)}_{f(t)}dt = 0$ car :

Méth 1 :

$[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ est centré en 0. f est impaire car $t \mapsto t$ est impaire ;

$t \mapsto \cos t$ est paire et $t \mapsto \sin^4(t)$ est paire.



Méth 2 $f(-t) = -t.\underbrace{\cos(-t)}_{\text{paire}}.\underbrace{\sin^4(-t)}_{\text{impaire}}$

$= -t.\cos(t).\boxed{(-\sin t)^4}$ $\quad (ab)^4 = a^4b^4$

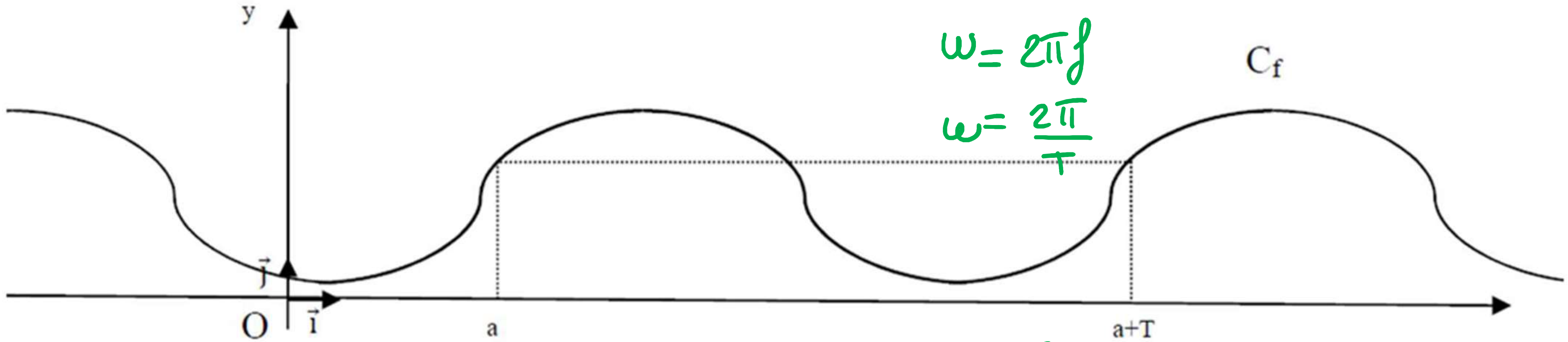
$f(-t) = -t.\cos t.\underbrace{(-1)^4}_{+1}.\sin^4 t = -f(t)$ donc f est impaire.

Chapitre 4 page 17&18

II Intégrale d'une fonction périodique sur un période

Rappel : Une fonction f, définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est dite périodique lorsqu'il existe un réel T>0, le plus petit possible tel que : $\forall x \in D \;\; f(x+T) = f(x)$. Sa représentation graphique est obtenue par translation on étudie f sur un intervalle de longueur T.

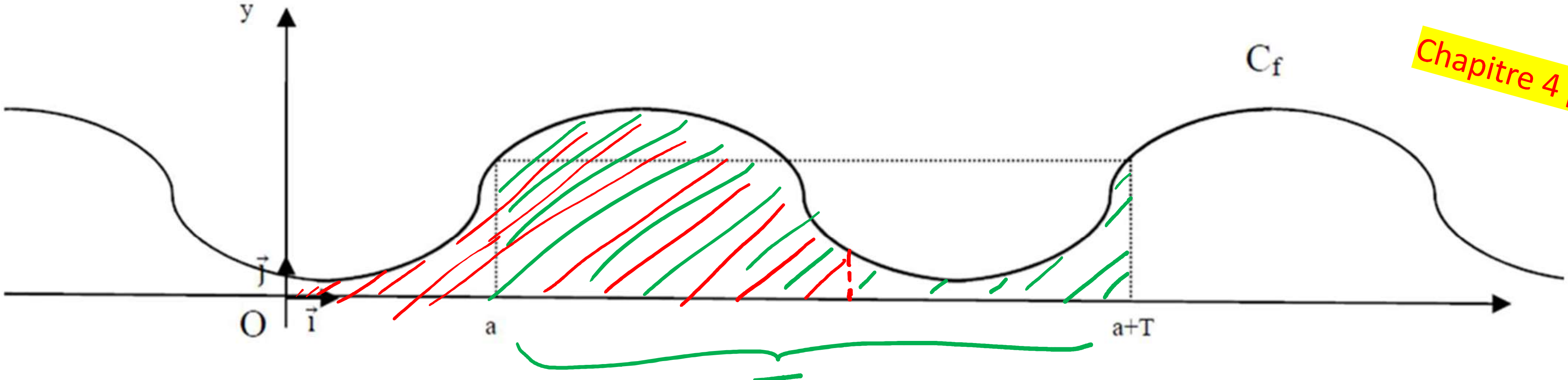
$\cos(5x)$



$\omega = 2\pi f$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$T = \frac{2\pi}{\omega}.$



$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$$

Soit f, une fonction T-périodique, continue sur tout intervalle [a ; a+T]. On a alors :

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$$

Chapitre 4 page 18

Exemple $I = \int_0^{2\pi} \cos^2(t).\sin^3(t)dt = 0$ car :

$[0; 2\pi]$ est de longueur 2π, qui est la période de f.

donc $I = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$, et comme f est impaire ⊛, alors $I = 0$

⊛ $f(-t) = \cos^2(-t) . \sin^3(-t) = (\cos t)^2 \times (-\sin t)^3 = -\cos^2 t . \sin^3 t = -f(t)$

cos paire sin impaire.