

Notes

Page 23 chapitre 1

Partie A : Rappels sur les propriétés et calculs de base

Théorèmes/Définitions/Notations :

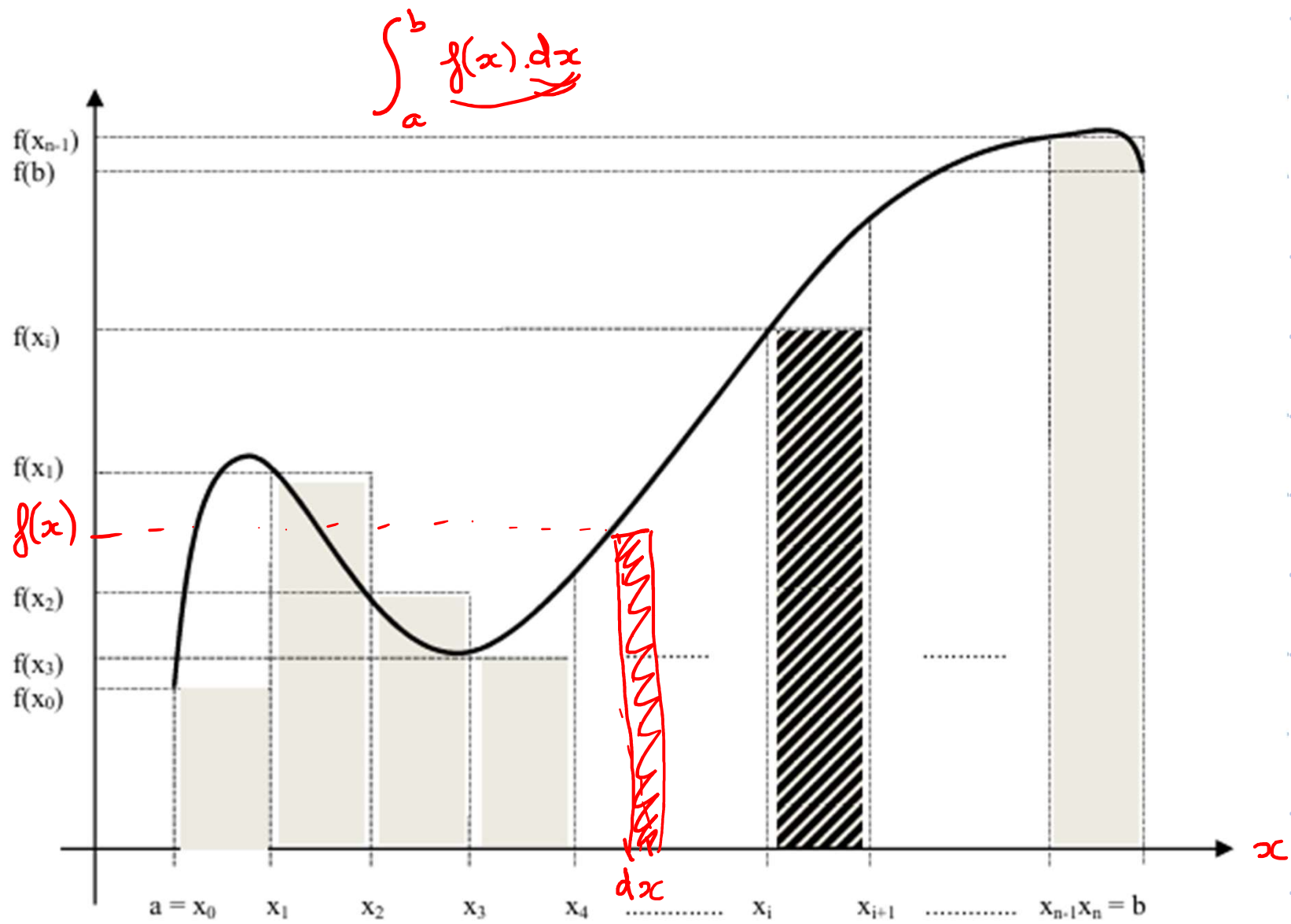
- 1) Toute fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$
- 2) Soit f , une fonction intégrable sur $[a,b]$. On appelle fonction primitive de f sur $[a,b]$ toute fonction notée F , définie par : $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.
- 3) On note $\int f(x)dx$ toutes les fonctions primitives de f , on a donc :

$$\int f(x)dx = F(x) + cte$$

- 4) Soit f , une fonction continue sur $[a,b]$, soit F , une fonction primitive de f . On a alors :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Notes.



Propriétés

1) Soit f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Soit α et β deux nombres réels. On a

alors :

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$$

2) Relation de Chasles : Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé I . Soit a, b, c

trois réels de I . On a alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

3)
$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$$

4) Soit f et g , deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$, on a

alors :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Partie C : Calcul d'intégrales doubles

Page 24 chapitre 1

I. Généralités :

1) Domaine fermé de $\mathbb{R}^2$

Définition On appelle domaine fermé de $\mathbb{R}^2$ tout domaine du plan délimité par une courbe fermée

Exemples

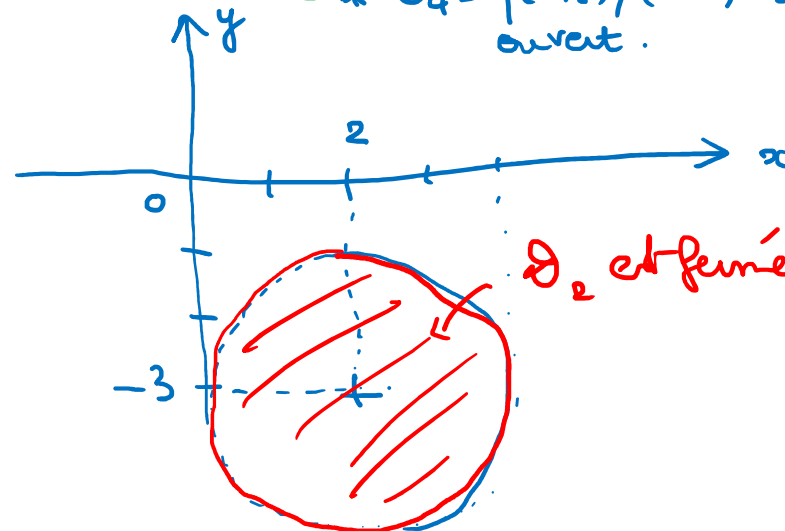
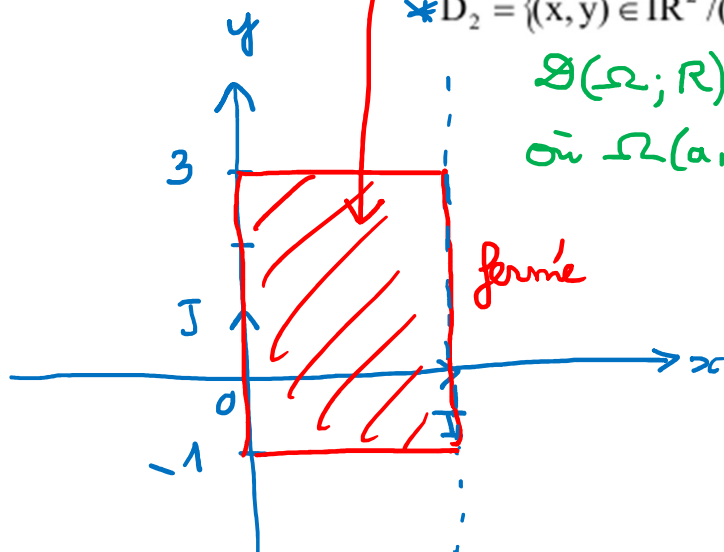
* $D_1 = [0;1] \times [-1;3] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [0;1] \text{ et } y \in [-1;3]\}$

* $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-2)^2 + (y+3)^2 \leq 4\} = \mathcal{D}(\Omega; 2) \text{ ou } \Omega(2; -3)$

$\mathcal{D}(\Omega; R) = \{(x,y) / (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2\}$
ou $\Omega(a,b)$

* $\mathcal{D}_3 = [0;1[\times [-1;3]$ est ouvert

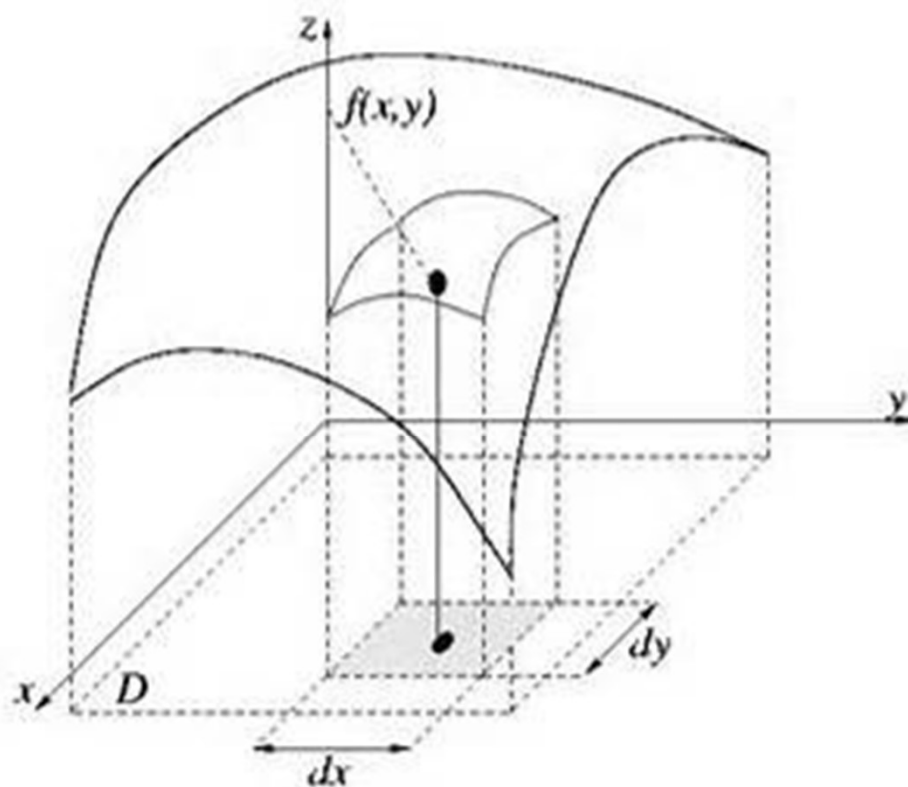
* $\mathcal{D}_4 = \{(x,y) / (x-2)^2 + (y+3)^2 < 4\}$ est ouvert.



2) Intégrale double

Page 24 chapitre 1

Définition/théorème Soit f , une fonction continue dans D , un domaine fermé de $\mathbb{R}^2$.
Alors l'intégrale double $I = \iint_D f(x,y) dx dy$ existe.



3) Applications

- Si $f(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in D$, alors $I = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ représente l'aire du domaine D .
- Si $f(x, y)$ est la masse surfacique au point $M(x, y)$ du domaine D , alors $I = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ est la masse du domaine D .
- Soit A , l'aire du domaine D . Les coordonnées du centre de gravité G de D sont données par les intégrales : $x_G = \frac{1}{A} \iint_D x \, dx \, dy$ et $y_G = \frac{1}{A} \iint_D y \, dx \, dy$

4) Propriétés

Soient D un domaine fermé de $\mathbb{R}^2$; f et g , deux fonctions continues sur D ; α et β deux nombres réels.

- Si $f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in D$, alors $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy \geq 0$
- $\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) \, dx \, dy = \alpha \iint_D f(x, y) \, dx \, dy + \beta \iint_D g(x, y) \, dx \, dy$
- Si $D = D_1 \cup D_2$ où D_1 et D_2 sont deux domaines fermés de $\mathbb{R}^2$ et disjoints ($D_1 \cap D_2 = \emptyset$) alors : $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D_1} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{D_2} f(x, y) \, dx \, dy$

II. Calcul d'une intégrale double en coordonnées cartésiennes :

Page 25 chapitre 1

Théorème de Fubini Soit f , une fonction continue dans D , un domaine fermé de $\mathbb{R}^2$. On peut calculer l'intégrale double $I = \iint_D f(x,y) dx dy$ en intégrant soit d'abord par rapport à la variable x , soit d'abord par rapport à la variable y :

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_D f(x,y) dy dx$$

1) 1^{er} cas : D est un domaine fermé rectangulaire de $\mathbb{R}^2$

Exemple Calculer $I = \iint_D (x+y) dx dy$ où $D = [0;2] \times [0;1]$

$$I = \int_0^1 \int_0^2 (x+y) dx dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + yx \right]_{x=0}^{x=2} dy = \int_0^1 \left(\frac{4}{2} + 2y - 0 \right) dy = \left[2y + y^2 \right]_0^1 = 3$$

$$I = \int_0^2 \int_0^1 (x+y) dy dx = \int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 \left(x + \frac{1}{2} - 0 \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right]_0^2 = \frac{4}{2} + \frac{2}{2} = 3$$

Application du théorème de Fubini

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx$$

Cas particulier

Calculer $I = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) dx dy$ lorsque $f(x,y) = g(x)h(y)$

"f est à variables séparables"

Page 26 chapitre 1

$$I = \int_c^d \int_a^b \underbrace{g(x)h(y)}_{cte \cdot x} dx dy$$

$$I = \int_c^d h(y) \cdot \underbrace{\int_a^b g(x) dx}_{cte} dy = \int_a^b g(x) dx \times \int_c^d h(y) dy$$

① fct à var. séparables

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} g(x) \cdot h(y) dx dy = \int_a^b g(x) dx \times \int_c^d h(y) dy$$

② Rectangle

Exemple $I = \iint_{[0,\pi] \times [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]} \sin(3x) \cdot \tan(y) dx dy$

est à variables séparables. ①
domaine rectangle ②

$$I = \int_0^\pi \sin(3x) dx \times \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan(y) dy = \left[-\frac{\cos(3x)}{3} \right]_0^\pi \times \left[-\ln|\cos y| \right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{\cos 3\pi} + \frac{1}{\cos 0} \right) \times \left(-\ln \frac{\cos \pi/3}{\cos \pi/6} \right)$$

$$- \int -\tan y dy = \int \frac{\sin y}{\cos y} dy = \int \frac{u'}{u} dy = -\ln|u| + cte \rightarrow U = \cos y \Rightarrow U' = -\sin y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} = \frac{2}{3} \left(-\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ I = \frac{2}{3} \ln 3 = \boxed{\frac{1}{3} \ln 3} \end{array} \right.$$

$$\ln A - \ln B = \ln \left(\frac{A}{B} \right) \quad A, B > 0$$

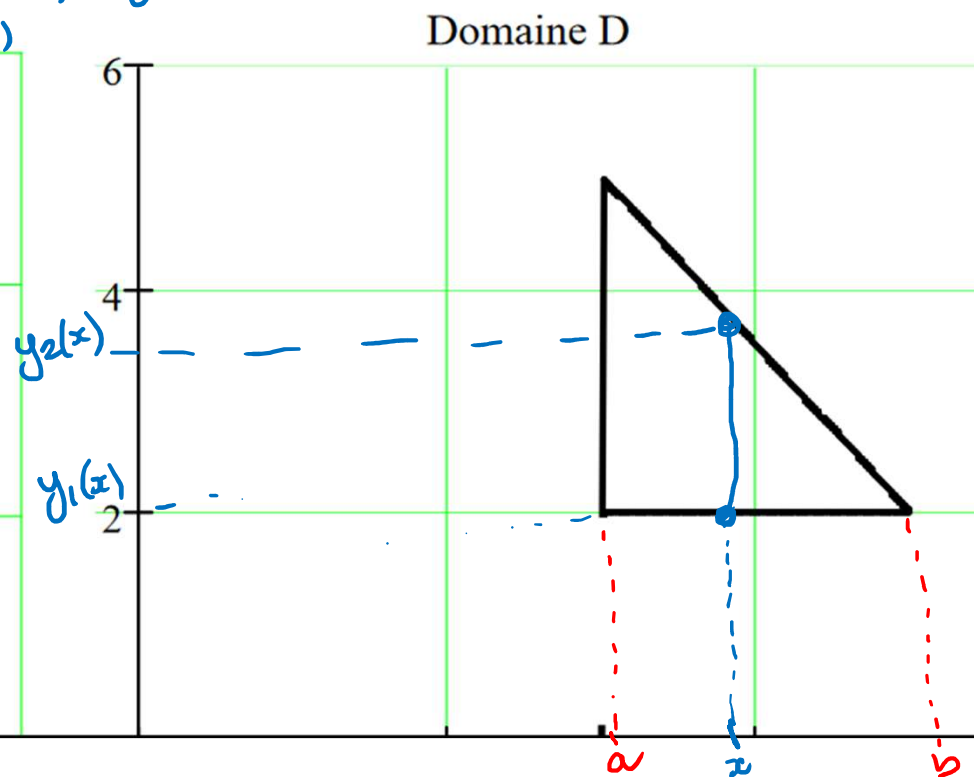
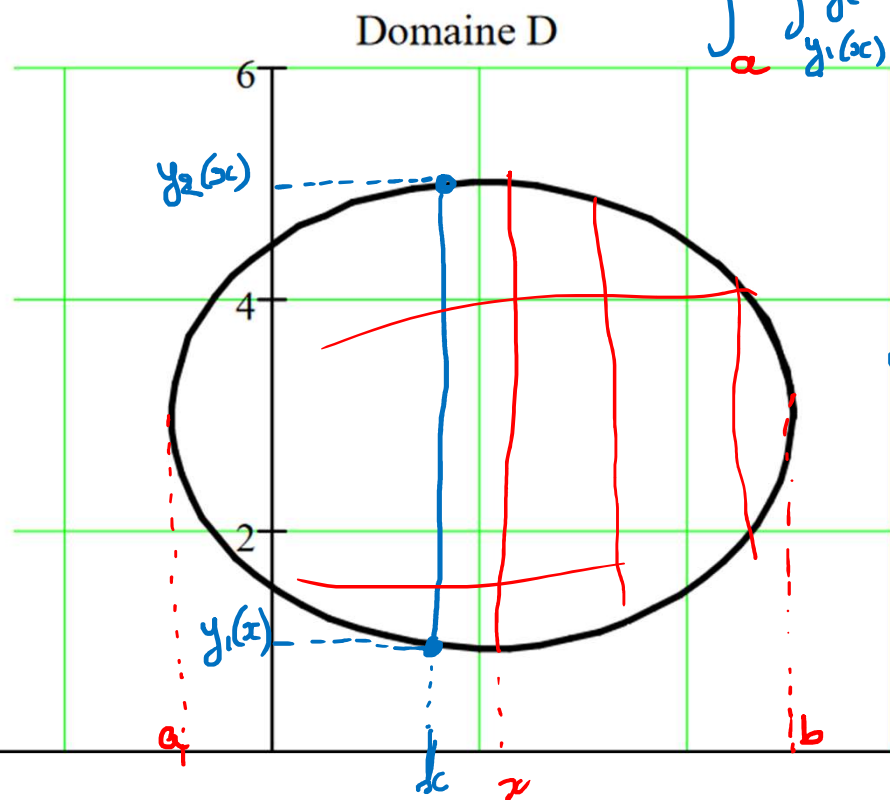
D'après le théorème de Fubini, on peut calculer $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ soit :

a) En intégrant d'abord par rapport à la variable y

Page 26 chapitre 1

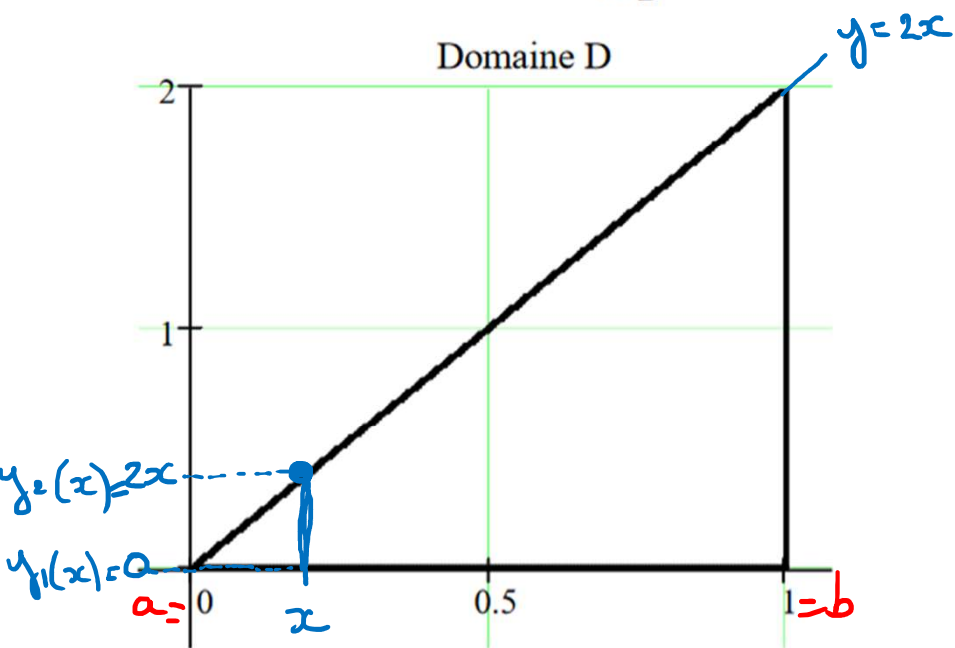
On suppose alors que toute parallèle à l'axe (Oy) coupe la courbe délimitant D en au plus deux points ou en une infinité de points :

$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx$$



Exemple Calculer $I = \iint_D xy^2 \, dx \, dy$ où D est le domaine représenté ci-dessous :

Page 27 chapitre 1



$$I = \int_0^1 \int_0^{2x} xy^2 \, dy \, dx = \int_0^1 x \cdot \int_0^{2x} y^2 \, dy \, dx$$

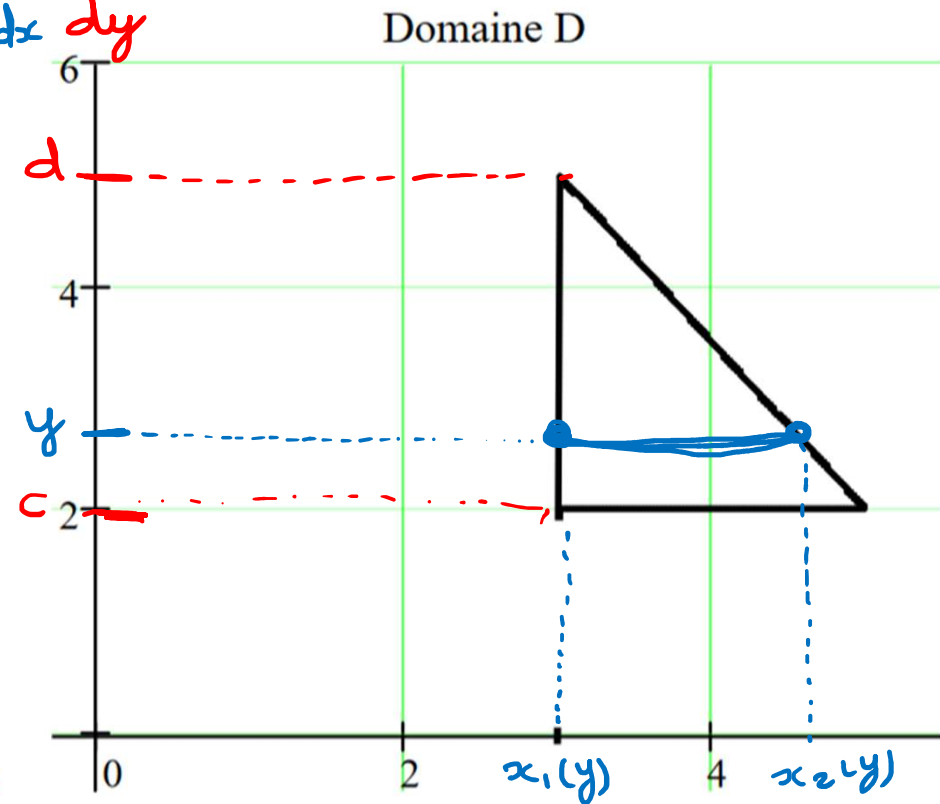
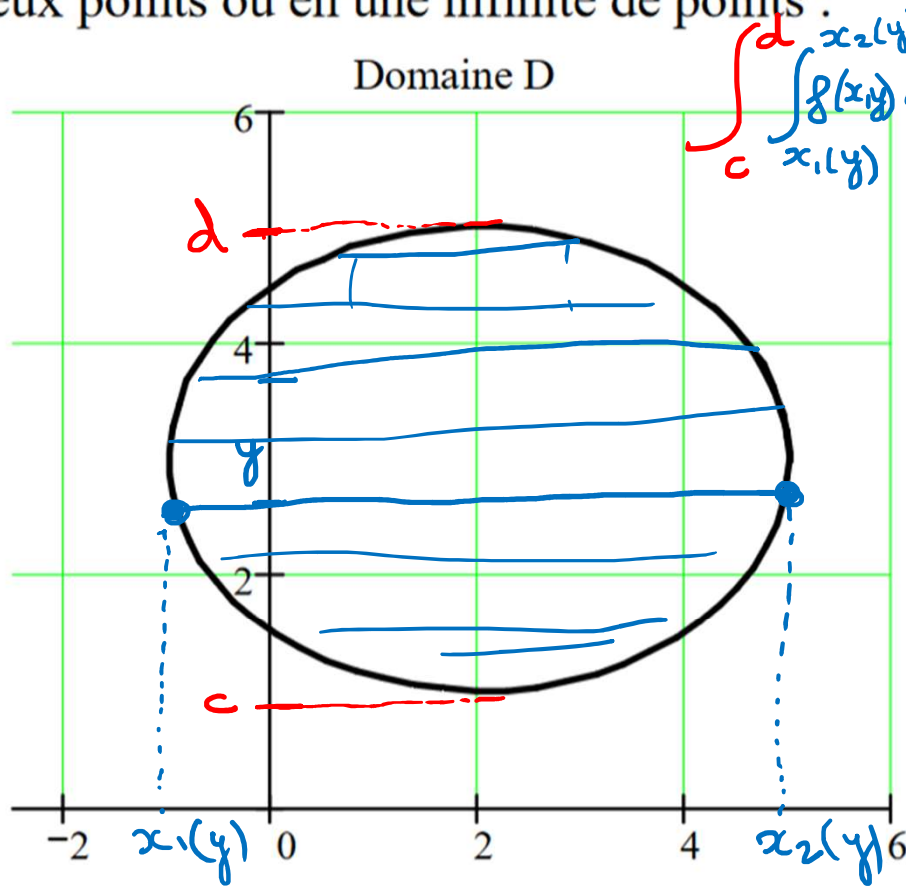
$$= \int_0^1 x \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{2x} dx = \int_0^1 x \left(\frac{8x^3}{3} - 0 \right) dx$$

$$I = \int_0^1 \frac{8x^4}{3} dx = \frac{8}{3} \int_0^1 x^4 dx = \frac{8}{3} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{8}{3} \left(\frac{1}{5} - 0 \right)$$

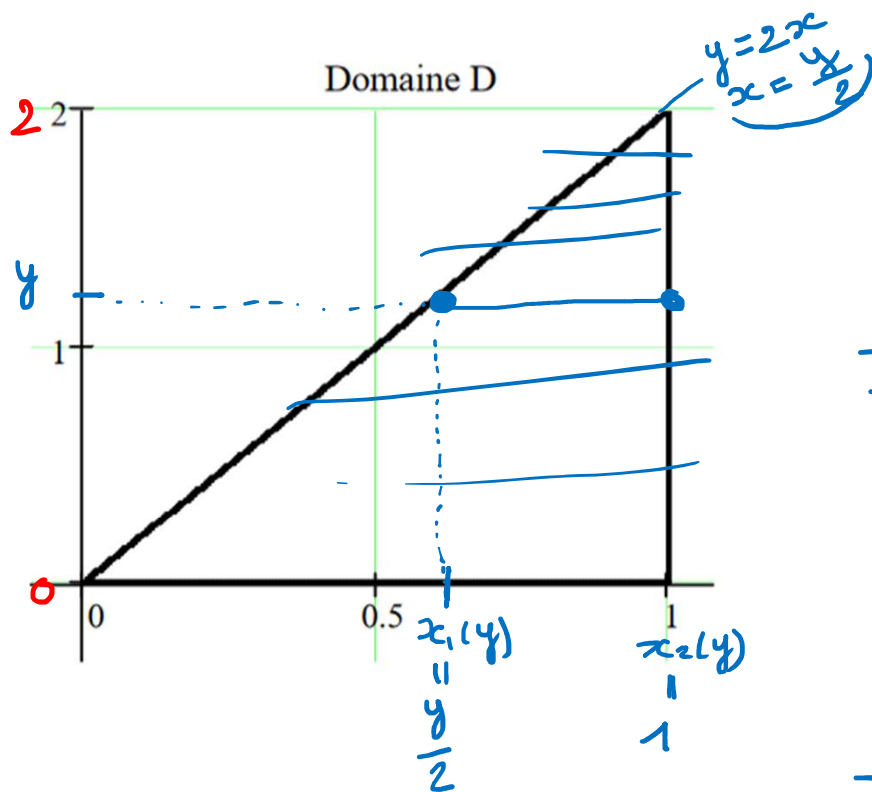
$$I = \frac{8}{15}$$

b) En intégrant d'abord par rapport à la variable x

On suppose alors que toute parallèle à l'axe (Ox) coupe la courbe délimitant D en au plus deux points ou en une infinité de points :



Exemple Calculer $I = \iint_D xy^2 \, dx dy$ où D est le domaine représenté ci-dessous :



$$I = \int_0^2 \int_{y/2}^1 xy^2 \, dx \, dy = \int_0^2 y^2 \int_{y/2}^1 x \, dx \, dy = \frac{y^2}{2} \Big|_{y/2}^1 = \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{4}{2} = 2$$

$$I = \int_0^2 y^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{y/2}^1 dy = \int_0^2 y^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{(y/2)^2}{2} \right) dy = \int_0^2 y^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{y^2}{8} \right) dy$$

$$I = \int_0^2 y^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{y^2}{8} \right) dy = \int_0^2 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{8} \right) dy$$

$$I = \left[\frac{y^3}{6} - \frac{y^5}{40} \right]_0^2 = \frac{2^3}{6} - \frac{2^5}{40} - 0 = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \frac{20-12}{15} = \frac{8}{15}$$

3) Exercices

Page 29 chapitre 1

Exercice 1 Calculer l'intégrale double : $\iint_D xy dx dy$ avec successivement :

$$D_1 = \{(x, y) / 2 \geq x \geq 0, 3 \geq y \geq -2\}$$

D_2 est le plan limité par les paraboles d'équations $y=x^2$ et $x=y^2$.

$$I_1 = \iint_{D_1} xy dx dy$$

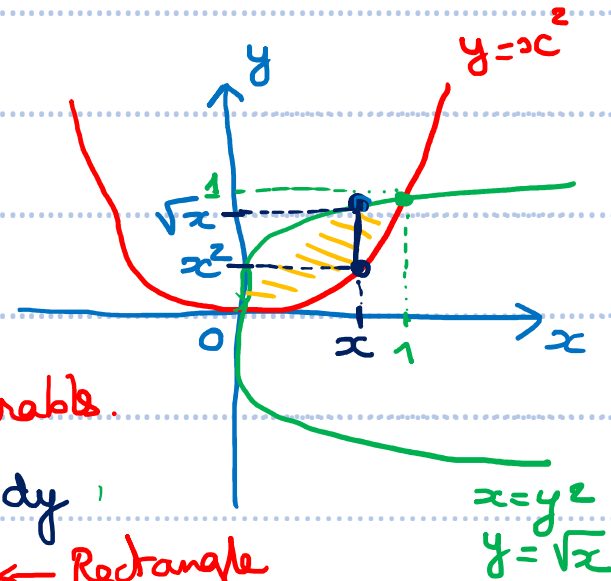
1^{ère} méthode : $I_1 = \int_{-2}^3 \left(\int_0^2 xy dx \right) dy = \int_{-2}^3 y \cdot \left(\int_0^2 x dx \right) dy$

$$I_1 = \int_{-2}^3 y \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 dy = \int_{-2}^3 y \cdot \left(\frac{4}{2} - 0 \right) dy$$

$$= 2 \times \int_{-2}^3 y dy = 2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-2}^3 = 2 \left(\frac{9}{2} - \frac{4}{2} \right) = 2 \times \frac{5}{2} = 5$$

$$I_2 = \iint_{D_2} xy dx dy$$

$$I_2 = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy dy \right) dx$$



2^{ème} méthode : $I_1 = \iint_{[0,2] \times [-2,3]} xy dx dy$ (à var. séparable).

Cas particulier p. 26 : $= \int_0^2 x dx \times \int_{-2}^3 y dy = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 \times \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-2}^3 = 5$

Exercice 2 Tracer le domaine D du plan limité par les courbes $y=x^2$, $x=2$, $y=1$; puis calculer

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

Page 29 chapitre 1

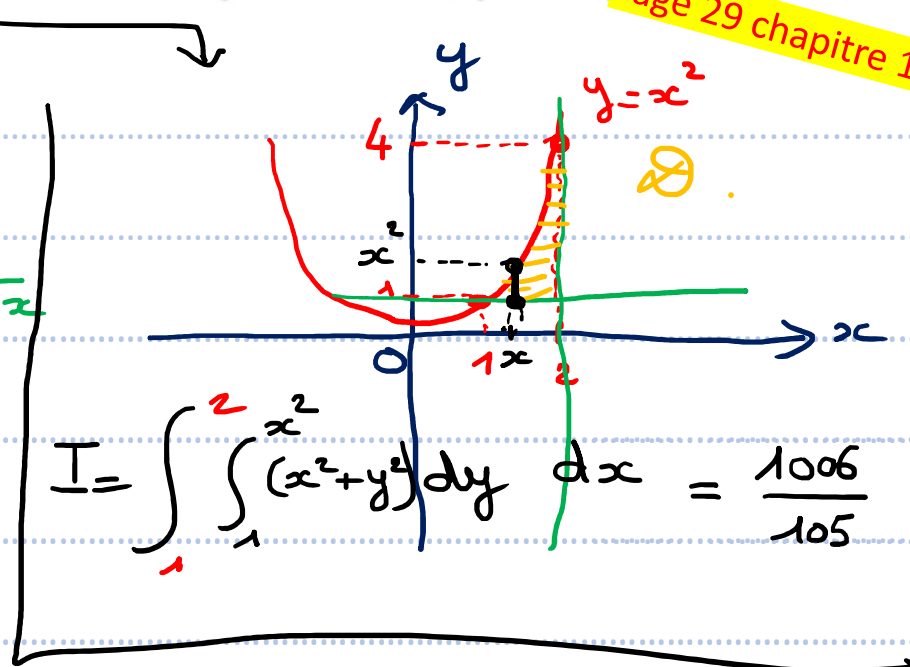
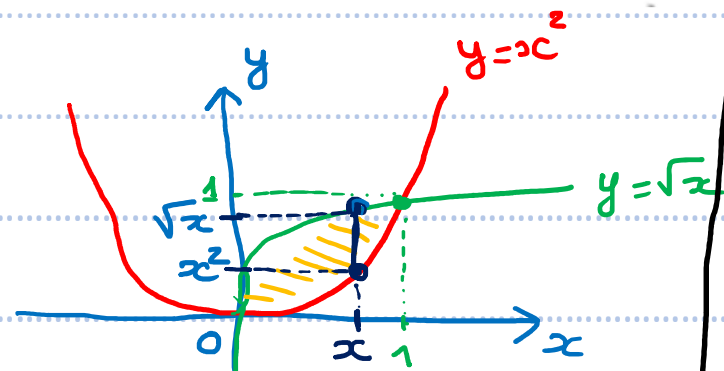
$$I_2 = \iint_D xy \, dx dy$$

$$I_2 = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy \, dy \, dx$$

$$I_2 = \int_0^1 x \cdot \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x \left(\frac{x}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{1}{12}$$



Notes

Changement de variable dans une intégrale simple:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

$$\textcircled{1} \quad x = \varphi(t) \Leftrightarrow t = \varphi^{-1}(x)$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \varphi^{-1}(a) = \alpha \\ t = \varphi^{-1}(b) = \beta \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \Leftrightarrow dx = \varphi'(t) dt$$

exple : $I = \int_1^e \frac{\ln^3 x + \ln x - 5}{x} dx$

$$\textcircled{1} \quad t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \ln 1 = 0 \\ t = \ln e = 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \quad x = e^t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = (e^t)' = e^t \Leftrightarrow dx = e^t dt$$

$$I = \int_0^1 \frac{t^3 + t - 5}{e^t} \cdot e^t dt = \int_0^1 (t^3 + t - 5) dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - 5t \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 5 - 0 = \frac{1+2-20}{4} = -\frac{17}{4}$$

Notes

$$I = \iint_{\Delta} f(x, y) \boxed{dx dy} = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \boxed{|\text{jac } \varphi| \cdot du dv}$$

$\varphi \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$

$\{ (x, y) / \dots \}$ $\{ (u, v) / \dots \}$

Annotations: "valeur absolue" points to $|\text{jac } \varphi|$; "jacobien" points to $|\text{jac } \varphi|$.

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = x'_u y'_v - x'_v y'_u$$

déterminant

matrice jacobienne.

Rappel :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

III. Changement de variables

1) Définitions

Page 29 chapitre 1

Changement de coordonnées : Soit Δ et D deux domaines fermés de $\mathbb{R}^2$. On appelle transformation de Δ dans D toute fonction vectorielle bijective $\varphi : \Delta \rightarrow D$
 $(u, v) \mapsto (x, y) = \varphi(u, v)$

Jacobien : $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Si les fonctions numériques $(u, v) \mapsto x(u, v)$ et $(u, v) \mapsto y(u, v)$ admettent des dérivées partielles continues sur Δ (i.e φ est de classe C^1), alors on appelle **Jacobien de φ** et on note $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ le déterminant défini par :

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} .$$

Handwritten notes: x'_u above $\frac{\partial x}{\partial u}$, x'_v above $\frac{\partial x}{\partial v}$, y'_u below $\frac{\partial y}{\partial u}$, y'_v below $\frac{\partial y}{\partial v}$. A blue arrow points from the determinant symbol to the matrix.

Remarque φ étant bijective, φ^{-1} existe. φ^{-1} est alors une transformation de D en Δ . Le jacobien de φ^{-1} noté $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$, et donc l'inverse du jacobien de φ .

2) Calcul d'une intégrale double par changement de variables

Soit f une fonction continue sur D un domaine fermé de $\mathbb{R}^2$. Soit φ une transformation de Δ en D de classe C^1 :

$$\varphi : \Delta \rightarrow D$$
$$(u, v) \mapsto (x, y) = \varphi(u, v)$$

On obtient alors : $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) \underbrace{\left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right|}_{\text{valeur absolue}} \, du \, dv$

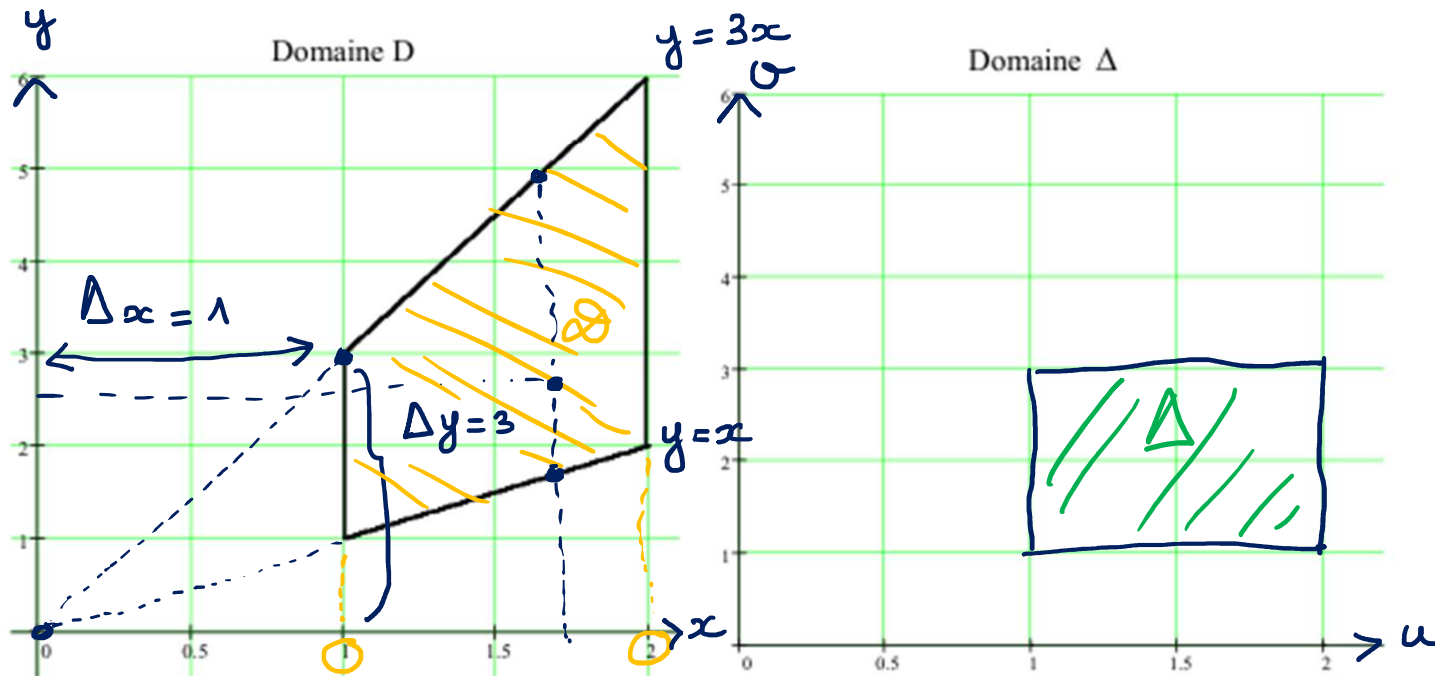


Exemple Calculer l'intégrale $I = \iint_D \sin\left(\frac{y}{x}\right) dx dy$ où D est le domaine ci-dessous, en utilisant

Notes

le changement de variable : $\begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = v \cdot x \end{cases}$

Page 31 chapitre 1



$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = 1 \cdot u - 0 \cdot v = u$$

$$D = \left\{ (x,y) / 1 \leq x \leq 2 ; x \leq y \leq 3x \right\}$$

Notes

Page 31 chapitre 1

donc

$$\mathcal{D} = \{(x, y) / 1 \leq x \leq 2 \text{ et } x \leq y \leq 3x\}$$

$$\Delta = \{(u, \vartheta) / 1 \leq u \leq 2 \text{ et } u \leq u\vartheta \leq 3u\} = [1, 2] \times [1, 3]$$

$\xrightarrow{u > 0} \quad \xrightarrow{\div u > 0} \quad \xrightarrow{1 \leq \vartheta \leq 3}$

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \sin\left(\frac{y}{x}\right) dx dy = \iint_{[1,2] \times [1,3]} \sin(\vartheta) \underbrace{\left| \frac{D(x,y)}{D(u,\vartheta)} \right|}_{= u \text{ car } 1 \leq u \leq 2} du d\vartheta = \iint_{[1,2] \times [1,3]} \underbrace{\sin \vartheta \cdot u}_{\text{à var. séparables}} du d\vartheta$$

rectangle

$$I = \int_1^2 \int_1^3 \sin \vartheta \cdot u d\vartheta du = \int_1^2 u \left[-\cos \vartheta \right]_1^3 du = \int_1^2 u \underbrace{(-\cos 3 + \cos 1)}_{cte} du$$

$$I = \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^2 (\cos 1 - \cos 3) = \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) (\cos 1 - \cos 3) = \frac{3(\cos 1 - \cos 3)}{2}$$

Cas particulier

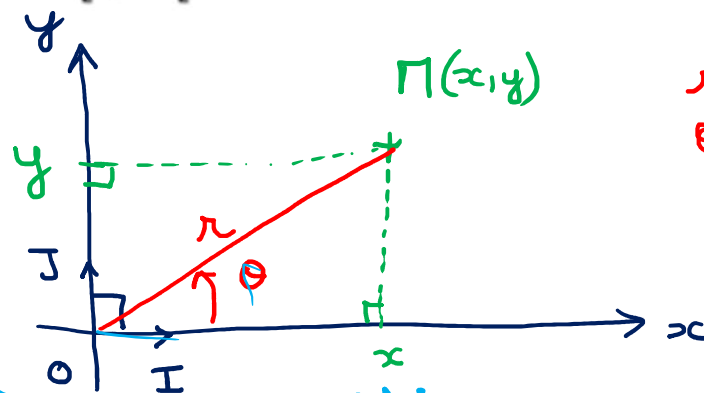
$$\int_1^2 u du \times \int_1^3 \sin \vartheta d\vartheta$$

3) Passage en coordonnées polaires

Lorsque le domaine d'intégration est un disque ou une portion de disque, le calcul d'une intégrale double est simplifié si l'on passe en coordonnées polaires (r, θ) :

Page 32 chapitre 1

$$\begin{cases} x(r, \theta) = r \cos \theta \\ y(r, \theta) = r \sin \theta \end{cases} \text{ avec } r \geq 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[.$$



$$r = OP \geq 0$$

$$\theta = \text{mes}(\vec{OI}, \vec{OP}) \in [0; 2\pi[$$

$$\cos \theta = \frac{\text{Adj.}}{\text{Hyp.}} = \frac{x}{r}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{Opp.}}{\text{Hyp.}} = \frac{y}{r}$$

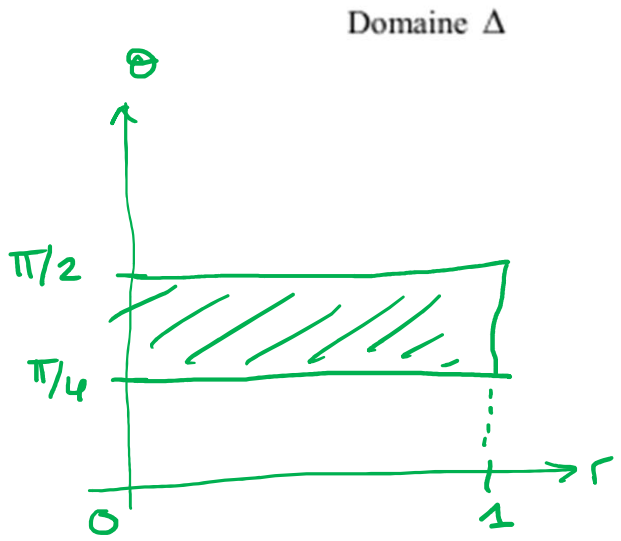
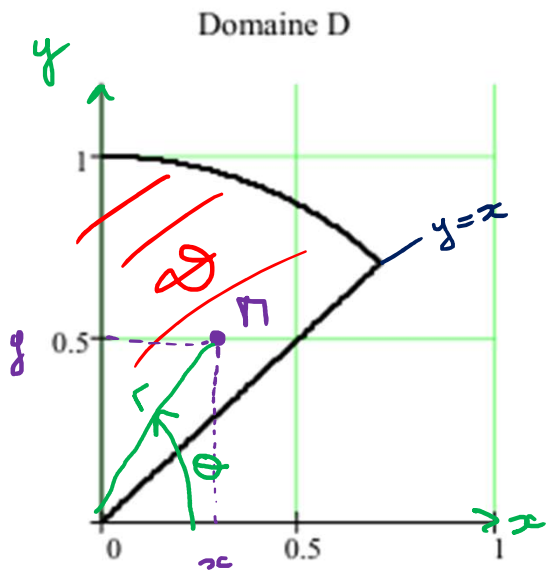
Le jacobien est alors :

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta \\ y'_r & y'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cdot \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r(\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1) = r$$

$$|r| = r \text{ car } r \geq 0$$

On obtient alors : $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_\Delta f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$

Exemple Calculer $I = \iint_D xy \, dx dy$ où D est le domaine délimité par le cercle de centre O et de rayon 1, la droite d'équation $y=x$ et l'axe des ordonnées.



$$\Delta = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1 ; \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$I = \iint_{\Delta} \underbrace{r \cos \theta}_{\text{à var. séparables}} \cdot \underbrace{r \sin \theta}_{\text{à var. séparables}} \cdot \underbrace{r dr d\theta}_{\text{particulier}} = \int_0^1 r^3 dr \times \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{16}$$

$\int_0^1 r^3 dr = \frac{1}{4}$ $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

4) Exercices

Exercice 1 : Calculer au moyen d'un passage en coordonnées polaires, les intégrales suivantes :

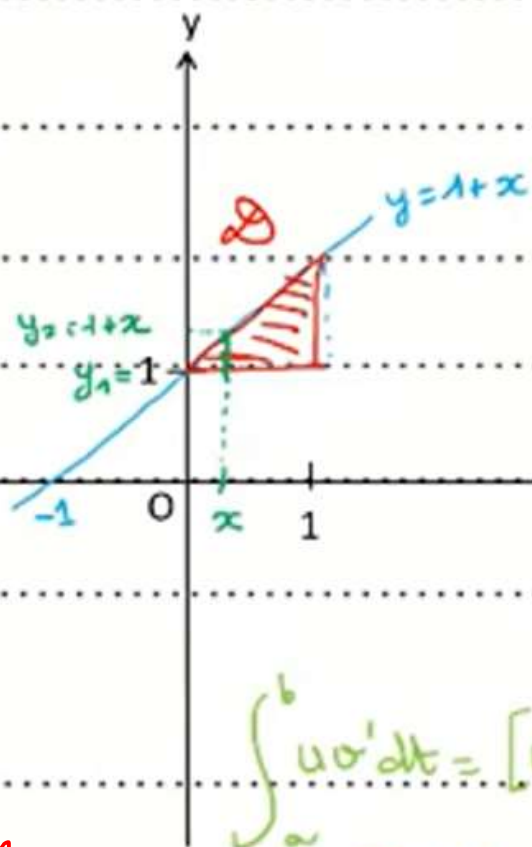
$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \quad \text{où } D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1 ; y \geq 0\}.$$

$$J = \iint_D \frac{dx \, dy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{avec } D = \{(x, y) / x \geq 1, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$$

Exercice 2 : Au moyen du changement de variable $\begin{cases} x + y = u \\ y = uv \end{cases}$ vérifier que :

$$\iint_D e^{\frac{y}{x+y}} \, dx \, dy = \frac{e-1}{2} \quad \text{lorsque } D = \{(x, y) / x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

$$I_5 = \iint_D \ln(x+y) dx dy \quad \text{où } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \underline{0 \leq x \leq 1}; \underline{1 \leq y \leq 1+x}\}$$



$$I_5 = \int_0^1 \int_1^{1+x} \ln(x+y) dy dx$$

$$I_5(x) = \int_1^{1+x} \underset{P}{1} \cdot \underset{L}{\ln(x+y)} dy$$

ALPES

$$\underline{IPP} : \begin{cases} U = \ln(x+y) \\ V'_y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U'_y = \frac{1}{x+y} \\ V = y + \frac{x}{dx=1 \cdot y} \end{cases}$$

$$\int_a^b u v' dt = [uv]_a^b - \int_a^b u' v dt$$

$$\int \frac{x^2+x}{1+2x} dx$$

$$I_5(x) = \left[\underset{V'}{(x+y)} \cdot \underset{U}{\ln(x+y)} \right]_1^{1+x} - \int_1^{1+x} 1 dy \rightarrow [y]_1^{1+x}$$

$$I_5(x) = (1+2x) \ln(1+2x) - (x+1) \ln(x+1) - x \Rightarrow I_5 = \int_0^1 I_5(x) dx$$

Partie D : Calcul d'intégrales Triples

Notes

Page 38 chapitre 1

I. Généralités :

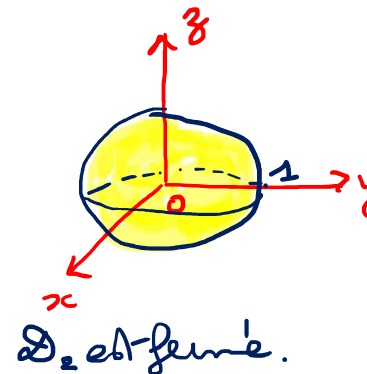
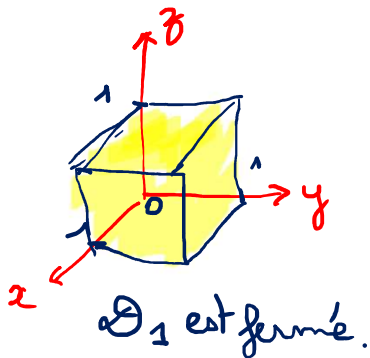
1) Domaine fermé de $\mathbb{R}^3$

Définition On appelle domaine fermé de $\mathbb{R}^3$ tout domaine de l'espace délimité par une surface fermée

Exemples

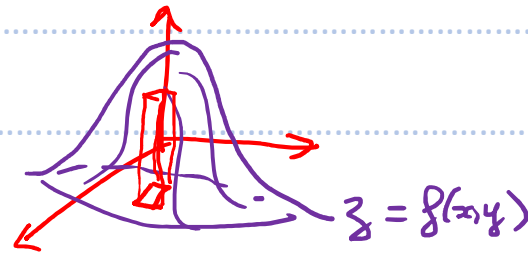
$$D_1 = [0;1] \times [0;1] \times [0;1] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \in [0;1], y \in [0;1] \text{ et } z \in [0;1]\}$$

$$D_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} = \text{boule de centre } o \text{ et de rayon } 1.$$



Notes

$$\iint_D f(x,y) dz dy$$



2) Intégrale triple

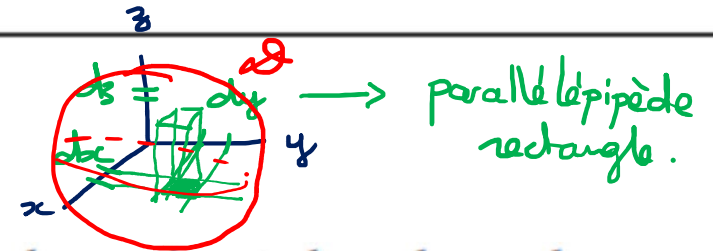
Définition/théorème Soit f , une fonction continue dans D , un domaine fermé de $\mathbb{R}^3$. Alors l'intégrale triple $I = \iiint_D f(x,y,z) dx dy dz$ existe.

3) Applications

- Si $f(x,y,z) = 1 \quad \forall (x,y,z) \in D$, alors $I = \iiint_D \underbrace{f(x,y,z)}_1 dx dy dz$ représente le volume du domaine D . kg/m^3

- Si $f(x,y,z)$ est la masse volumique au point $M(x,y,z)$ du domaine D , alors

$I = \iiint_D \underbrace{f(x,y,z)}_{\text{kg/m}^3 \times \text{m}^3} dx dy dz$ est la masse du domaine D . $\rightarrow \text{kg}$



4) Propriétés

Page 39 chapitre 1

Soient D un domaine fermé de $\mathbb{R}^3$; f et g , deux fonctions continues sur D ;
 α et β deux nombres réels.

- Si $f(x,y,z) \geq 0 \quad \forall (x,y,z) \in D$, alors $\iiint_D f(x,y,z) dx dy dz \geq 0$

- $\iiint_D (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)) dx dy dz = \alpha \iiint_D f(x,y,z) dx dy dz + \beta \iiint_D g(x,y,z) dx dy dz$ *linéarité*

- Si $D = D_1 \cup D_2$ où D_1 et D_2 sont deux domaines fermés de $\mathbb{R}^3$ et disjoints ($D_1 \cap D_2 = \emptyset$) alors : $\iiint_D f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{D_1} f(x,y,z) dx dy dz + \iiint_{D_2} f(x,y,z) dx dy dz$

II. Calcul d'une intégrale triple en coordonnées cartésiennes :

Théorème de Fubini Soit f , une fonction continue dans D , un domaine fermé de $\mathbb{R}^3$. On peut calculer l'intégrale triple $I = \iiint_D f(x,y,z) dx dy dz$ en intégrant soit d'abord par rapport à la variable x , soit d'abord par rapport à la variable y , soit d'abord par rapport à z .

1) 1^{er} cas : D est un parallélépipède rectangle de $\mathbb{R}^3$

Notes

Exemple Calculer $I = \iiint_D (x + y + z) \, dx \, dy \, dz$ où $D = [0;1] \times [-1;1] \times [1;2]$

$$I = \iiint_{[-1;1] \times [1;2]} \int_0^1 (x + y + z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{[-1;1] \times [1;2]} \left[\frac{x^2}{2} + yx + zx \right]_{x=0}^{x=1} dy \, dz$$

$$= \iint_{[-1;1] \times [1;2]} \left(\frac{1}{2} + y + z \right) dy \, dz = \int_1^2 \left[\frac{1}{2}y + \frac{y^2}{2} + zy \right]_{y=-1}^{y=1} dz$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + z - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - z \right) \right] dz = \int_1^2 (1 + 2z) dz$$

$$I = \left[z + z^2 \right]_1^2 = 6 - 2 = 4.$$

Application du théorème de Fubini

$$\iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [e,g]} f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \int_c^g \int_c^d f(x,y,z) \, dy \, dz \, dx = \int_c^g \int_c^d \int_a^b f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \dots$$

Cas particulier : Calculer $I = \iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [e,g]} f(x,y,z) dx dy dz$ lorsque $f(x,y,z) = g(x)h(y)k(z)$

① parallélépipède rectangle

② à variables séparables.

Page 41 chapitre 1

$$I = \iint_{[a,b] \times [c,d]} \int_e^g g(x)h(y)k(z) dz dx dy$$

cte par rapport à z

$$= \iint_{[a,b] \times [c,d]} g(x)h(y) \cdot \int_e^g k(z) dz dx dy$$

cte

à variables séparables

$$= \int_e^g k(z) dz \times \iint_{[a,b] \times [c,d]} g(x)h(y) dx dy$$

→ Rectangle

$$I = \int_e^g k(z) dz \times \int_a^b g(x) dx \times \int_c^d h(y) dy$$

à variables séparables.

Exemple $I = \iiint_{[0,1] \times [0,2] \times [0,3]} x(y-1)(z-2) dx dy dz$
= F.V. droit

$$I = \int_0^1 x dx \times \int_0^2 (y-1) dy \times \int_0^3 (z-2) dz$$

$\int_0^2 (y-1) dy = \frac{y^2}{2} - y \Big|_0^2 = \frac{4}{2} - 2 = 0$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \times \left[\frac{y^2}{2} - y \right]_0^2 \times \left[\frac{z^2}{2} - 2z \right]_0^3 = \frac{1}{2} \times 0 \times \dots = 0$$

$$\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \times \left[\frac{(y-1)^2}{2} \right]_0^2 \times \left[\frac{(z-2)^2}{2} \right]_0^3 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \times \dots = 0$$

$$\int \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{\sin^2 \theta}{2} + C$$

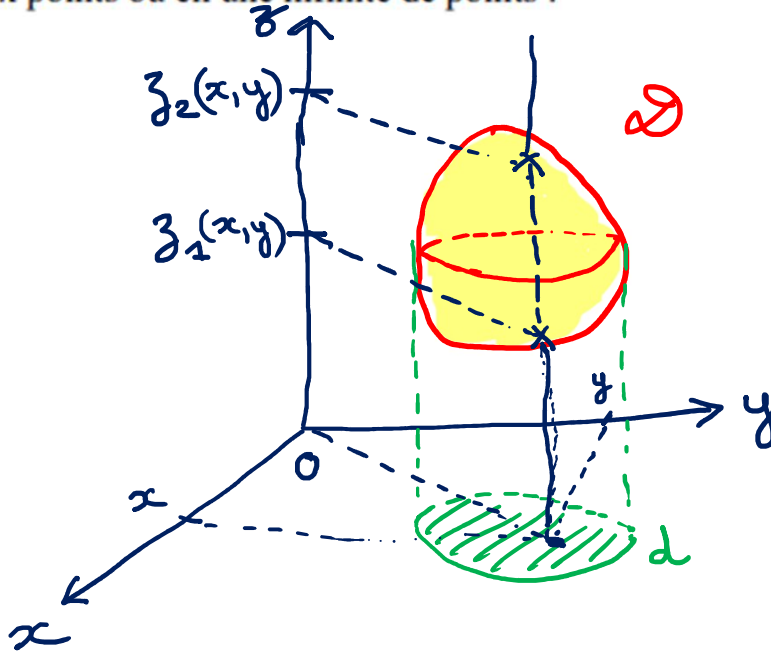
$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

2) 2^{ème} cas : D est un domaine fermé quelconque de $\mathbb{R}^3$

Note D'après le théorème de Fubini, on peut calculer $I = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ soit :

a) En intégrant d'abord par rapport à la variable z

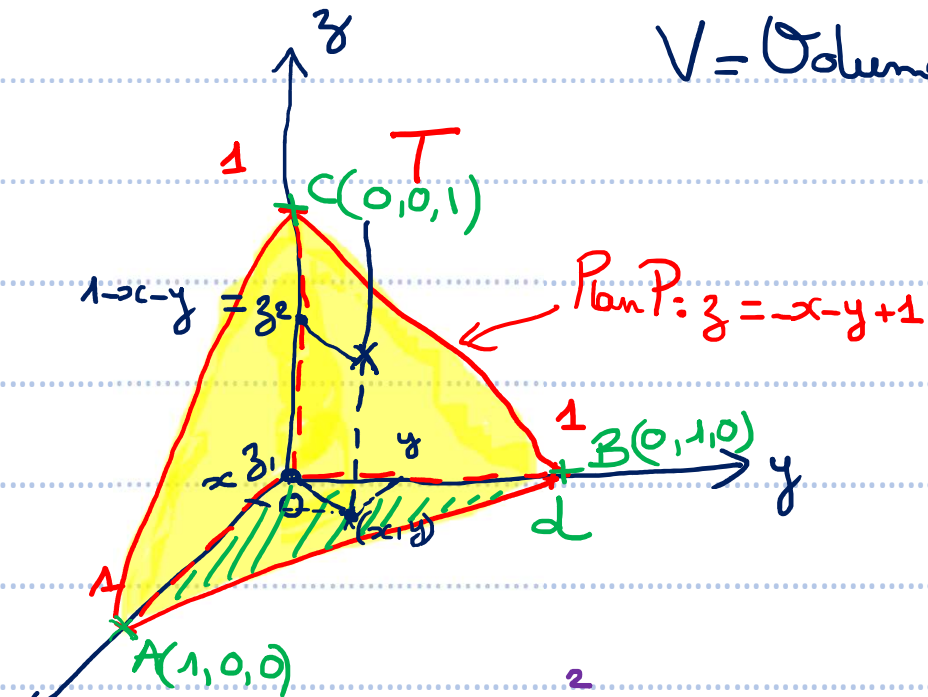
On suppose alors que toute parallèle à l'axe (Oz) coupe la surface délimitant D en au plus deux points ou en une infinité de points :



$$I = \iint_d \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy$$

Exemple Calculer le volume d'un tétraèdre de côtés 1m :

Page 42 chapitre 1



$$V = \text{Volume de } T = \iiint_T 1 \cdot dx dy dz$$

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1 \cdot dz \, dx dy$$

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y-0) \, dx dy$$

$\mathbb{R}^2$
D Droite du plan : $y = \downarrow ax + \downarrow b$

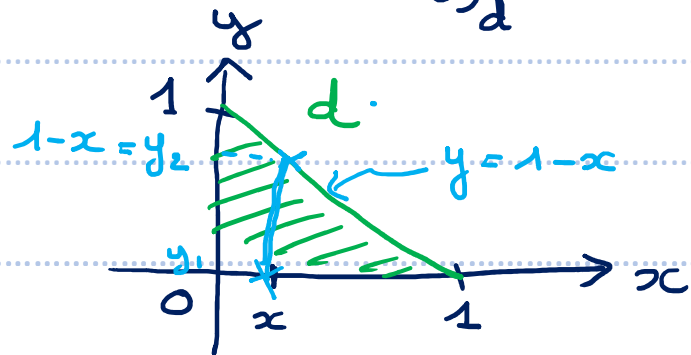
$A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B) \in D$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$$

$\mathbb{R}^3$
P Plan de l'espace : $z = \downarrow ax + \downarrow by + \downarrow c$

$$A, B, C \in P \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a + b \cdot 0 + c \\ 0 = b + c \\ 1 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Notes



$$V = \iint_d (1-x-y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dy dx$$

$$= \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\underbrace{1}_{(1-x)} \cdot \underbrace{(1-x)}_{(1-x)} - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(1 \cdot (1-x)^2 - \frac{1}{2} (1-x)^2 \right) dx$$

$$\int u' u^\alpha dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$= \int_0^1 \underbrace{-\frac{1}{2} (1-x)^2}_{u' u^2} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{(1-x)^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{1}{6} (0^3 - 1^3)$$

$$V = \frac{1}{6} m^3$$

3) Exercices

Calculer les intégrales triples suivantes :

$$I = \iiint_D \sin(x+y+z) dx dy dz \quad \text{où } D = \left\{ (x,y,z) / 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$J = \iiint_D dx dy dz \quad \text{où } D = \left\{ (x,y,z) / x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq h \right\}, \text{ avec } h \text{ fixé strictement positif.}$$

Que représente J ?

Page 43 chapitre 1

polycopié

Exercice 5 ($\simeq 5$ points). Considérons

Ω défini par :

$$\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1; 1 \leq z \leq 2 \}.$$

$$\text{Calculer } M = \iiint_{\Omega} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} dx dy dz.$$

DS = sans passage en coordonnées cylindriques

On se propose de calculer

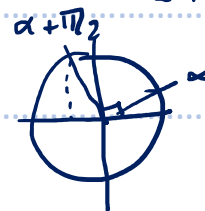
$$I = \iiint_D x dx dy dz,$$

pas le tps.

où $D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1 \right\}$. On note T_z l'intersection de D et d'un plan P_z de cote z .

Notes:
$$I = \iiint_{[0, \pi/2]^3} \sin(x+y+z) \, dz \, dy \, dx = \iint_{[0, \pi/2]^2} \int_0^{\pi/2} \sin(x+y+z) \, dz \, dy \, dx = \iint_{[0, \pi/2]^2} \left[-\cos(x+y+z) \right]_0^{\pi/2} dy \, dx$$

$$I = \iint_{[0, \pi/2]^2} \left(\cos(x+y) - \underbrace{\cos\left(x+y+\frac{\pi}{2}\right)}_{+\sin(x+y)} \right) dy \, dx$$



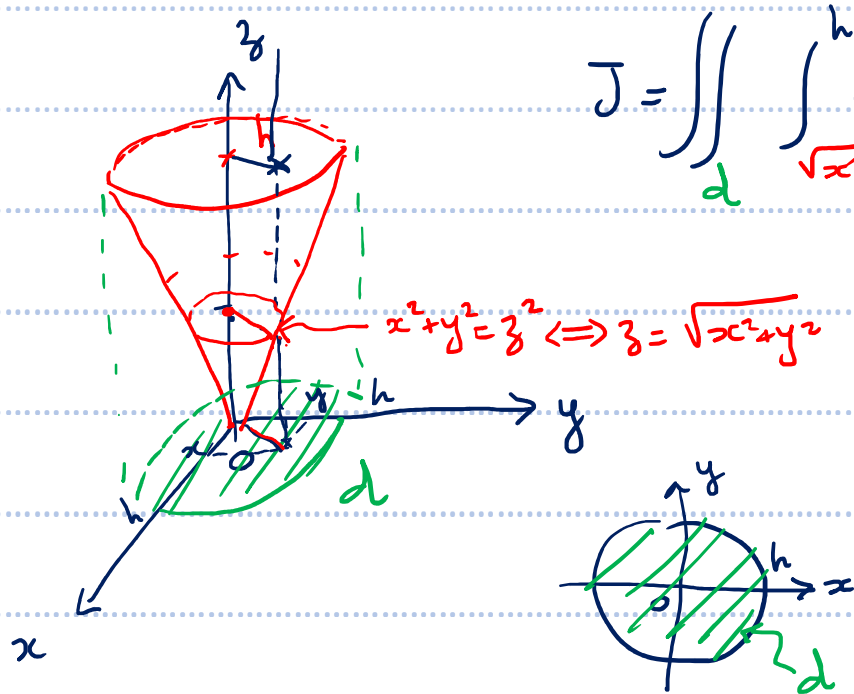
$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \pi/2) &= -\sin \alpha \\ \sin(\alpha + \pi/2) &= \cos \alpha \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (\cos(x+y) + \sin(x+y)) \, dy \, dx = \int_0^{\pi/2} [\sin(x+y) - \cos(x+y)]_0^{\pi/2} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\underbrace{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}_{\cos x} - \underbrace{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}_{+\sin x} - \sin x + \cos x \right) dx = 2 \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 2 [\sin x]_0^{\pi/2} = 2$$

Notes

$$I = \iiint_{\mathcal{D}} dx dy dz \quad \text{où } \mathcal{D} = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 \leq z^2 ; 0 \leq z \leq h\}$$



$$I = \iint_d \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^h dz \, dx dy = \iint_d (h - \sqrt{x^2+y^2}) \, dx dy.$$

Passage en polaires :

$$I = \iint_d (h - \sqrt{x^2+y^2}) \, dx dy = \iint_{[0,h] \times [0,2\pi]} (h - r) r \, dr \, d\theta.$$

$$= \int_0^h (hr - r^2) \, dr \times \int_0^{2\pi} d\theta$$

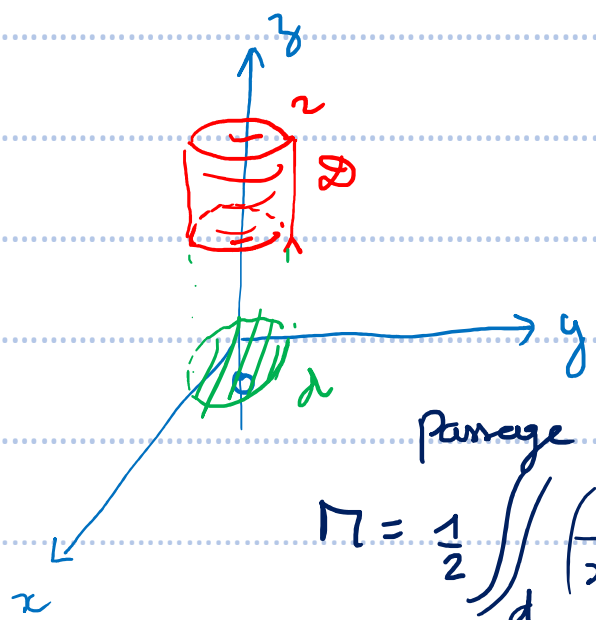
$$I = 2\pi \times \left[\frac{hr^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^h = 2\pi \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right) = \frac{h^3}{3} \text{ est le volume du cône droit de hauteur } h.$$

Exercice 5 ($\simeq 5$ points). Considérons

Ω défini par :

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1; 1 \leq z \leq 2\}.$$

Calculer $M = \iiint_{\Omega} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} dx dy dz$.



$$M = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} r dr d\theta dz = \int_1^2 \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} r dr d\theta dz$$

$$M = \frac{1}{2} \int_1^2 \left[\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}}{-1} \right]_0^1 dz = \frac{1}{2} \int_1^2 \left((x^2 + y^2 + 1)^{-1} - (x^2 + y^2 + 4)^{-1} \right) dz$$

Passage en polaires :

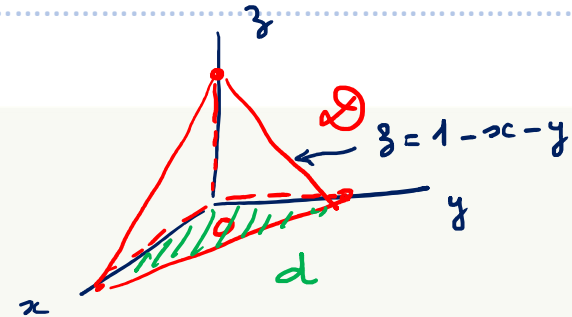
$$M = \frac{1}{2} \int_1^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{x^2 + y^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + y^2 + 4} \right) r dr d\theta = \int_1^2 \left(\frac{r}{r^2 + 1} - \frac{r}{r^2 + 4} \right) dr d\theta = \frac{2\pi}{2} \left[\ln(r^2 + 1) - \ln(r^2 + 4) \right]_0^1$$

$$M = \pi \left(\ln 2 - \ln(5) - \ln 1 + \ln 4 \right) = \pi \cdot \ln \left(\frac{8}{5} \right).$$

Notes

On se propose de calculer

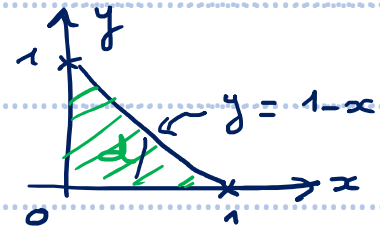
$$I = \iiint_D x dx dy dz,$$



où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1\}$. On note T_z l'intersection de D et d'un plan P_z de cote z .

$x+y+z=1$ passe par : $A(1;0;0)$ $B(0;1;0)$ et $C(0;0;1)$

$$I = \int_d \int_0^{1-x-y} x dz dx dy = \int_d x (1-x-y) dx dy$$



$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} x (1-x-y) dy dx = \int_0^1 x \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 x \left(\underbrace{(1-x) - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2}}_{\frac{(1-x)^2}{2}} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1$$

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{6-8+3}{12} \right) = \frac{1}{24}$$

Notes

1) Définitions

Notes

Page 45 chapitre 1

Changement de coordonnées : Soit Δ et D deux domaines fermés de $\mathbb{R}^3$. On appelle transformation de Δ dans D toute fonction vectorielle bijective

$$\varphi: \Delta \rightarrow D$$

$$(u, v, w) \mapsto (x, y, z) = \varphi(u, v, w)$$

Jacobien : $\varphi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$. Si les fonctions numériques $(u, v, w) \mapsto x(u, v, w)$, $(u, v, w) \mapsto y(u, v, w)$ et $(u, v, w) \mapsto z(u, v, w)$ admettent des

dérivées partielles continues sur Δ , alors on appelle Jacobien de φ et on note $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$

le déterminant défini par :

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \quad \leftarrow$$

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w}$$

Remarque φ étant bijective, φ^{-1} existe. φ^{-1} est alors une transformation de D en Δ . Le

jacobien de φ^{-1} noté $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$, et donc l'inverse du jacobien de φ .

2) Calcul d'une intégrale triple par changement de variables

Soit f une fonction continue sur D un domaine fermé de $\mathbb{R}^3$. Soit φ une transformation de Δ en D :

$$\varphi: \Delta \rightarrow D$$

$$(u, v, w) \mapsto (x, y, z) = \varphi(u, v, w)$$

On obtient alors :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw$$

← valeur absolue

Exemple En utilisant le changement de variable :

$$\begin{cases} u = \frac{x}{a} \Leftrightarrow x = au \\ v = \frac{y}{b} \text{ où } a, b, c > 0 \text{ calculer l'intégrale } \Leftrightarrow y = bv \\ w = \frac{z}{c} \Leftrightarrow z = cw \end{cases}$$

$$I = \iiint_D dx dy dz \text{ où } D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1 \right\}.$$

$$\Delta = \left\{ (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 / u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0, u + v + w \leq 1 \right\}$$

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = a \times b \times c > 0$$

← matrice diagonale

Notes

$$I = \iiint_{\Delta} 1 \cdot dx dy dz = \iiint_{\Delta} 1 \cdot abc \, du dv dw$$

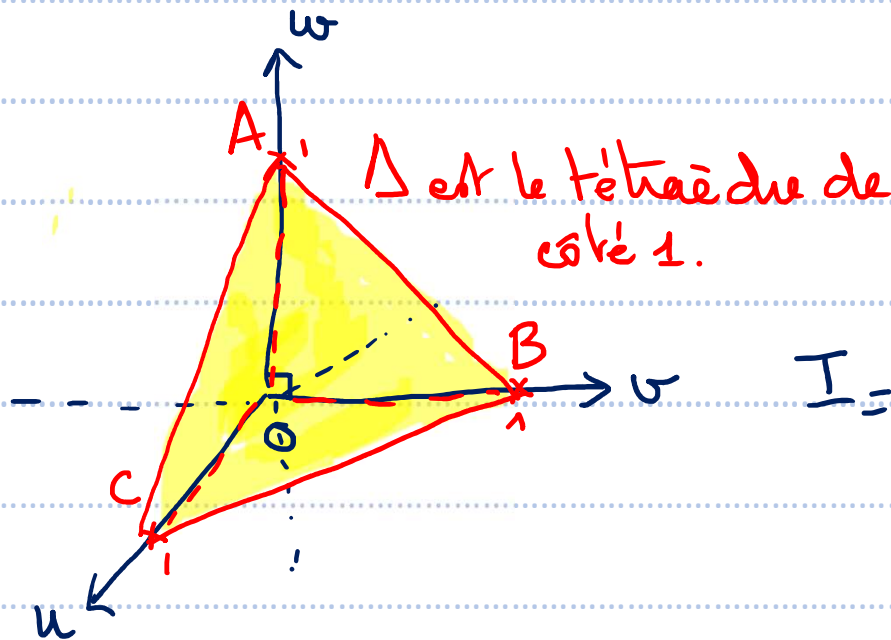
Page 46 chapitre 1

$$I = abc \cdot \iiint_{\Delta} du dv dw$$

$$\Delta = \{(u,v,w) / u,v,w \geq 0 ; u+v+w \leq 1\}$$

$u+v+w=1$ est

l'équation du plan passant par les points $A(0;0;1)$, $B(0;1;0)$, $C(1;0;0)$

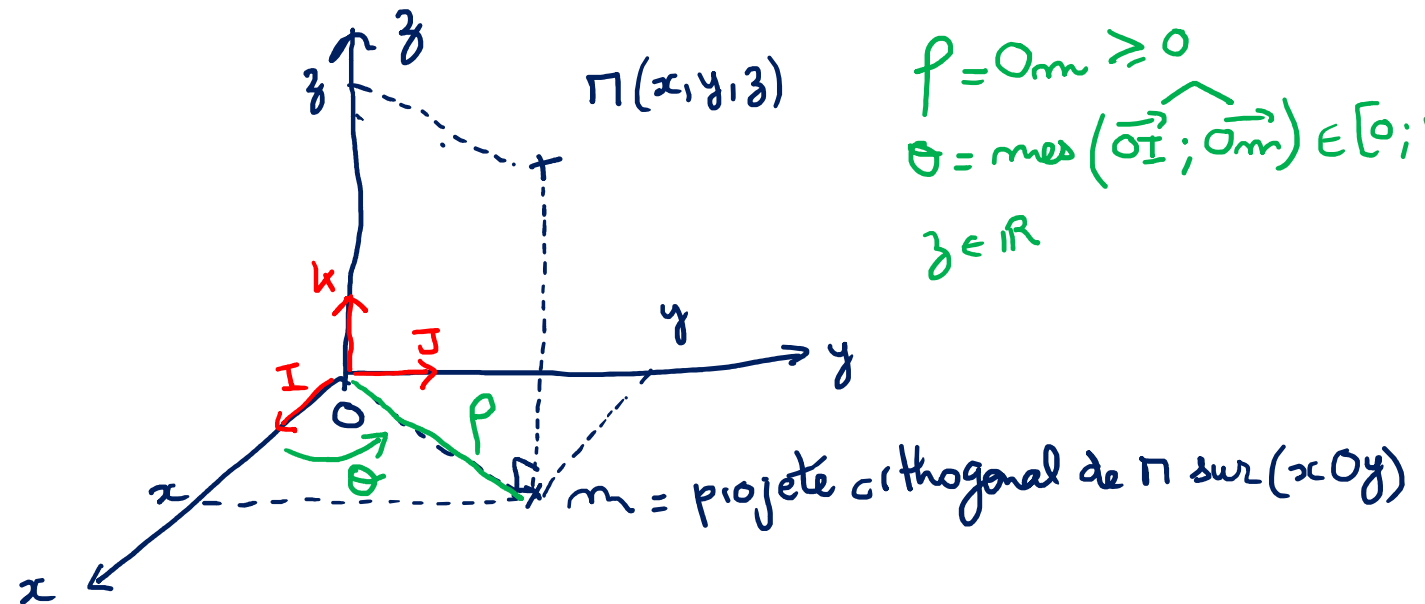


$$I = abc \cdot \iiint_{\text{Tétraèdre de côté 1}} 1 \cdot du dv dw \stackrel{\text{page 42}}{=} \frac{abc}{6}$$

3) Passage en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z)

Notes

Lorsque le domaine d'intégration est un cylindre ou une portion de cylindre, le calcul d'une intégrale triple est simplifié si l'on passe en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) :



$$\begin{cases} x(\rho, \theta, z) = \rho \cos \theta \\ y(\rho, \theta, z) = \rho \sin \theta \\ z(\rho, \theta, z) = z \end{cases} \text{ avec } \underline{\rho \geq 0}, \theta \in [0, 2\pi[\text{ et } z \in \mathbb{R}. \text{ Le jacobien est alors :}$$

Notes

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta & x'_z \\ y'_\rho & y'_\theta & y'_z \\ z'_\rho & z'_\theta & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$x = \rho \cos\theta$$

$$y = \rho \sin\theta$$

$$z = z$$

$$= +0 \times \begin{vmatrix} -\rho\sin\theta & 0 \\ \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \rho \cos^2\theta + \rho \sin^2\theta$$

$$= \rho (\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

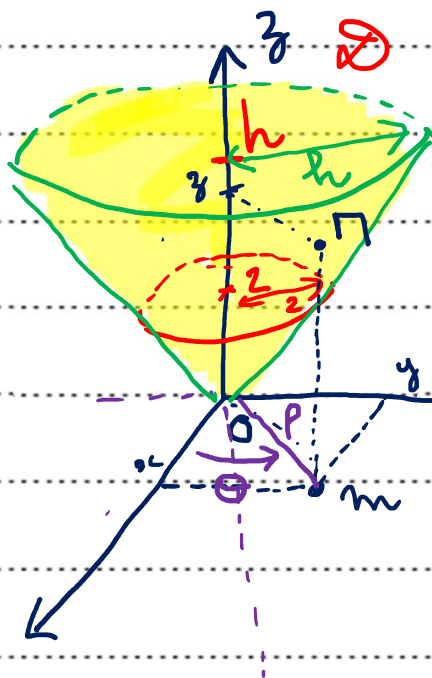
$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} = \rho \geq 0$$

On obtient alors : $\iiint_D f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz$ ♥.

Exemple Calculer le volume d'un cône droit de hauteur h :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq z^2\}$$

$$V = \text{Volume}(D) = \iiint_D 1 dx dy dz = \iiint_{\Delta} 1 \cdot \rho d\rho d\theta dz =$$



$x^2 + y^2 \leq z^2$ est l'équation du disque de centre $(0,0,z)$ et de rayon z

Noter 1 graphique

$$\Delta = \{(p, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq p \leq z; 0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq z \leq h\}$$

Noter 2 : z unique de D.

$$\Delta = \{(p, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq z \leq h; p^2 \leq z^2; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$0 \leq p \leq z$

DM // Calculer au moyen d'un passage en coordonnées cylindriques, les intégrales suivantes :

$$I = \iiint_D z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz \quad \text{où } D = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 \leq R^2; 0 \leq z \leq h\}.$$

$$V = \iiint_{\Delta} 1 \, \rho \, d\rho \, d\theta \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{\frac{R}{2}} \rho \, d\rho \, dz \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^h \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\frac{R}{2}} dz \, d\theta$$

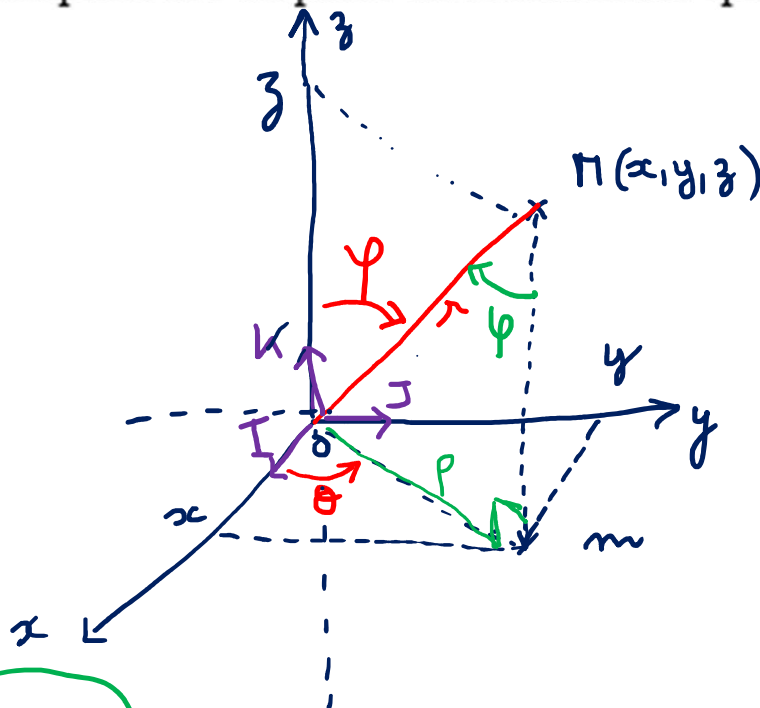
$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{z^2}{2} dz \, d\theta = \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \left[z^3 \right]_0^h d\theta = \frac{h^3}{6} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{h^3}{6} \times 2\pi = \frac{\pi h^3}{3}$$

CAS PART :

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \times \underbrace{\int_0^h \frac{z^2}{2} dz}_{h^3/6}$$

4) Passage en coordonnées sphériques (r, θ, φ)

Lorsque le domaine d'intégration est une sphère ou une portion de sphère, le calcul d'une intégrale triple est simplifié si l'on passe en coordonnées sphériques (r, θ, φ) :



$$\begin{cases} r = OM \geq 0 \\ \theta = \text{mes}(\vec{OI}; \vec{OM}) \in [0; 2\pi[\\ \varphi = \text{mes}(\vec{OH}; \vec{OM}) \in [0; \pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \end{cases}$$

$$\text{OMm} \quad \sin \varphi = \frac{\text{opp}}{\text{Hyp}} = \frac{r}{r} \Rightarrow r = r \sin \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{\text{adj}}{\text{Hyp}} = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r \cos \varphi$$

$$\begin{cases} x(r, \theta, \varphi) = r \cos \theta \sin \varphi \\ y(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \sin \varphi \\ z(r, \theta, \varphi) = r \cos \varphi \end{cases} \text{ avec } r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi[\text{ et } \varphi \in [0, \pi]. \text{ Le jacobien est alors : } //$$

5) Exercices

Page 51 chapitre 1

Exercice 1 Calculer V , le volume d'une sphère de rayon R .

Exercice 2 Soit un réel $a > 0$.

Calculer : $I = \iiint_D \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + a^2)^2}$ où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - ax \leq 0, 0 \leq z \leq a\}$

E.x.1 $V = \iiint_S 1 dx dy dz = \iiint_{[0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]} r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi \stackrel{\text{Cas Particulier}}{=} \int_0^R r^2 dr \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi$

$$= \frac{R^3}{3} \times 2\pi \times [-\cos \varphi]_0^\pi$$

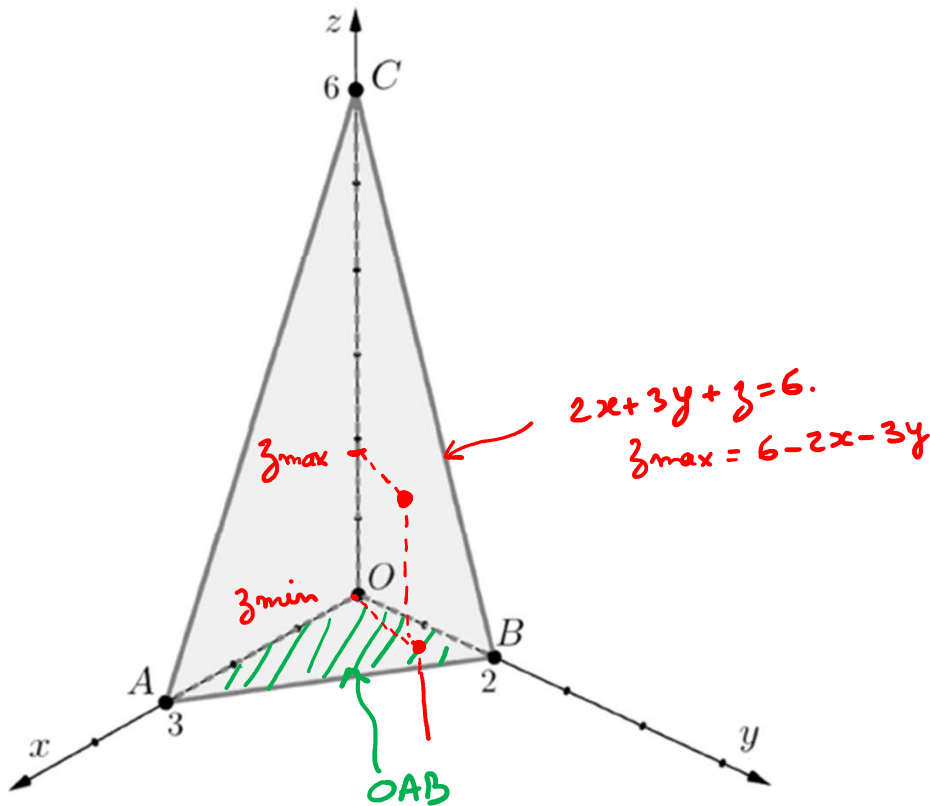
$$= \frac{2\pi R^3}{3} (1+1)$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Exercice 5 ($\simeq 4,5$ points). Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les trois points dont les coordonnées sont les suivantes :

$$A(3;0;0) \quad ; \quad B(0;2;0) \quad ; \quad C(0;0;6).$$

On note Ω la région de l'espace correspondant à l'ensemble des points situés à l'intérieur du tétraèdre de sommets O, A, B, C .



Calculer $M = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$.

Indication. Si besoin, on pourra utiliser (sans avoir à le démontrer) le résultat suivant : une équation du plan (ABC) est $2x + 3y + z = 6$.

Equation du plan

$$(P): ax + by + cz = d$$

$$\begin{cases} 3a = d \\ 2b = d \\ 6c = d \end{cases}$$

$$\frac{d}{3}x + \frac{d}{2}y + \frac{d}{6}z = d$$

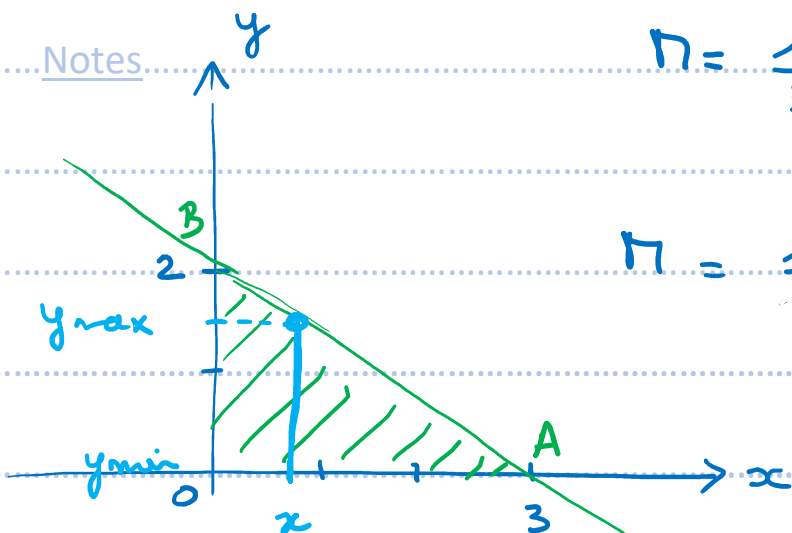
On choisit $d = 6$ et on obtient :

$$2x + 3y + z = 6.$$

$$M = \iint_{OAB} \int_0^{6-2x-3y} z^2 dz dx dy$$

$$M = \iint_{OAB} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{6-2x-3y} dx dy = \frac{1}{3} \iint_{OAB} (6-2x-3y)^3 dx dy$$

Notes



$$M = \frac{1}{3} \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2}{3}x} (6-2x-3y)^3 dy dx$$

$$\int u'_y u^x dy = \frac{u^{x+1}}{x+1} + C$$

$$u = 6-2x-3y$$

$$\Rightarrow u'_y = -3$$

$$M = \frac{1}{3} \int_0^3 -\frac{1}{3} \left[\frac{(6-2x-3y)^4}{4} \right]_0^{2-\frac{2}{3}x} dx$$

$$2x+3y=6 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(6-2x) = 2 - \frac{2}{3}x$$

$$M = -\frac{1}{36} \int_0^3 \left(\underbrace{(6-2x-6+2x)^4}_0 - (6-2x)^4 \right) dx = \frac{1}{36} \times \frac{1}{-2} \left[\frac{(6-2x)^5}{5} \right]_0^3$$

$$\int u' u^x dx = \frac{u^{x+1}}{x+1} + C$$

$$M = -\frac{1}{360} (0 - 6^5) = \frac{6^5}{360} = \frac{2^5 \times 3^5}{3^2 \times 2^3 \times 5} = \frac{2^2 \times 3^3}{5} = \frac{4 \times 27}{5} = \frac{108}{5}$$

$$72 \times 5 = 360 = 9 \times 4 \times 2 \times 5$$