IUT DE TOULON

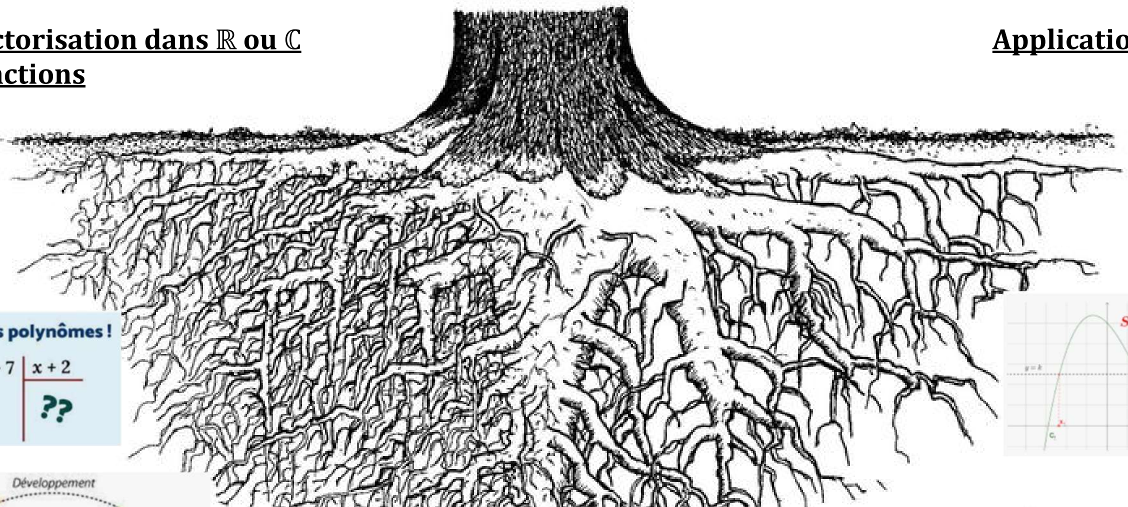
BACHELOR UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE

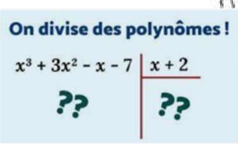
Ressource R2-04 : OUTILS MATHEMATIQUES ET LOGICIELS

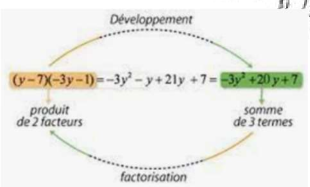
Chapitre 5 : Compléments sur les nombres complexes, Polynômes, Fractions rationnelles.

Factorisation dans ℝ ou ℂ
Fractions

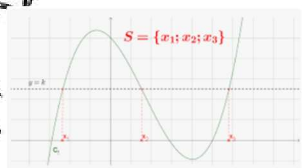
Applications

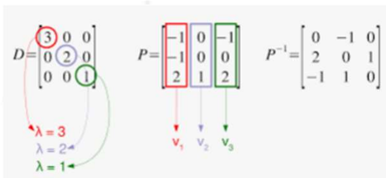


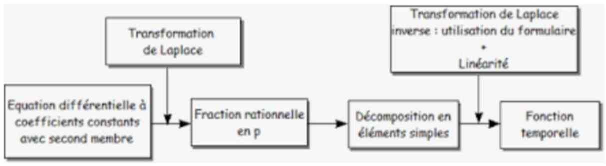




$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{?}{x-1} - \frac{?}{x+1}$$







Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr

UNIVERSITÉ DE TOULON

Table des matières

Partie A : Complément sur les nombres complexes

I. <u>Rappels</u>

$$\underline{Z} = x + j.y \text{ où } x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \text{ et } j^2 = -1$$

x est la partie réelle de $\underline{Z}$
On note : $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$
On note : $y = Im(\underline{Z})$

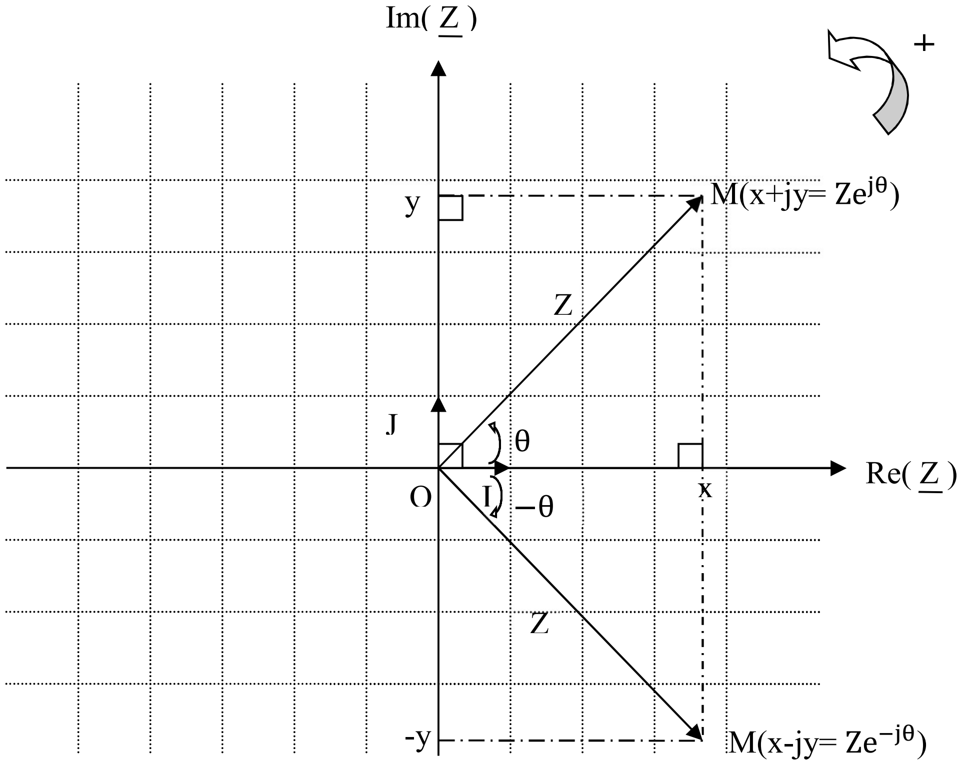
Le <u>module</u> de $\underline{Z}$ est noté Z ou encore $\left|\underline{Z}\right|$, c'est la distance de O à M, donc $\left|\underline{Z}\right| = Z = \sqrt{x^2 + y^2}$

L'<u>argument</u> de $\underline{Z}$ est noté $\arg(\underline{Z})$, c'est la mesure en radians de l'angle de vecteur orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$, déterminée à 2kπ près (k ∈ ℤ). On note $\theta = \arg(\underline{Z})$, on a alors :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{Z} = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{Re(\underline{Z})}{Z} \\[2ex] \sin(\theta) = \dfrac{y}{Z} = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{Im(\underline{Z})}{Z} \end{cases} \quad \text{si } Z \neq 0.$$

Le <u>plan complexe</u> est muni d'un RON $(O\,;\vec{OI},\ \vec{OJ})$ orienté dans le sens direct.
$\underline{Z} = x + j.y$ où $x, y \in \mathbb{R}$

Le point M(x,y) est appelé image de $\underline{Z}$.
$\underline{Z}$ est appelé l'affixe du point M.
$\underline{Z}$ est aussi appelé l'affixe du vecteur $\vec{OM}$.
$\vec{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$



<u>Forme algébrique</u> de $\underline{Z}$: (coordonnées cartésiennes)

$\underline{Z} = x + j.y$

<u>Forme trigonométrique et forme polaire</u> de $\underline{Z}$:

$\underline{Z} = Z.\cos(\theta) + j.Z.\sin(\theta) = Z.(\cos(\theta) + j.\sin(\theta))$ **aussi noté :** $\underline{Z} = [Z, \theta]$

<u>Forme exponentielle, géométrique</u> : Euler a noté $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j.\sin(\theta)$

$\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$

<u>Nombre complexe conjugué</u> de $\underline{Z}$: Soit $\underline{Z} = x + j.y$, on appelle conjugué de $\underline{Z}$, et on note $\underline{Z}^*$, le nombre complexe défini par : $\underline{Z}^* = x - j.y$. Si $\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$, alors $\underline{Z}^* = Z.\,e^{-j\theta}$

Détermination d'un argument à l'aide de la fonction arctangente

Soit $\underline{Z} = a + j.b$ un nombre complexe non nul, tel que $a \neq 0$.

$$\arg(\underline{Z}) = \begin{cases} \operatorname{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \operatorname{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) \pm \pi & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \arg(j.b) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } b < 0 \end{cases}$$

Produit, quotient et puissance

$$\arg(\underline{Z}.\underline{Z'}) = \arg(\underline{Z}) + \arg(\underline{Z}') + 2k\pi \,,\ k \in \mathbb{Z} \,, \text{ et } \left|\underline{Z}.\underline{Z}'\right| = \left|\underline{Z}\right|.\left|\underline{Z}'\right|$$

$$[Z\,,\theta] \times [Z'\,,\theta'] = [ZZ'\,,\theta + \theta']$$

Le module d'un produit de nombres complexes est le produit des modules, l'argument d'un produit de nombres complexes est la somme des arguments (à 2kπ près)

$$\arg\left(\frac{\underline{Z}}{\underline{Z'}}\right) = \arg(\underline{Z}) - \arg(\underline{Z}') + 2k\pi \,,\ k \in \mathbb{Z} \,, \text{ et } \left|\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}'}\right| = \frac{\left|\underline{Z}\right|}{\left|\underline{Z}'\right|}$$

$$\frac{[Z\,,\theta]}{[Z'\,,\theta']} = \left[\frac{Z}{Z'}\,,\theta - \theta'\right]$$

Le module d'un quotient de nombres complexes est le quotient des modules, l'argument d'un quotient de nombres complexes est la soustraction des arguments (à 2kπ près)

$$\arg(\underline{Z}^n) = n \times \arg(\underline{Z}) + 2k\pi \,,\ k \in \mathbb{Z} \,, \text{ et } \left|\underline{Z}^n\right| = \left|\underline{Z}\right|^n$$

$$[Z\,,\theta]^n = [\,Z^n\,,n.\theta]$$

Le module de $\underline{Z}^n$ est le module de $\underline{Z}$ à la puissance n, l'argument de $\underline{Z}^n$ est n fois l'argument de $\underline{Z}$ (à 2kπ près)

<u>Notes</u>

II. Formules d'Euler et de Moivre

1) Opérations sur le conjugué d'un nombre complexe

$$(\underline{Z}+\underline{Z'})^* = \underline{Z}^* + \underline{Z'}^* \qquad (\underline{Z}.\underline{Z'})^* = \underline{Z}^*.\underline{Z'}^* \qquad \left(\frac{\underline{Z}}{\underline{Z'}}\right)^* = \frac{\underline{Z}^*}{\underline{Z'}^*} \qquad (\underline{Z}^n)^* = (\underline{Z}^*)^n$$

2) Formules d'Euler

$$\underline{Z}+\underline{Z}^* = a + jb + a - jb = 2a \ ; \quad \underline{Z}-\underline{Z}^* = a + jb - (a - jb) = 2jb \ ; \quad \underline{Z}.\underline{Z}^* = \mathbf{Z.\,e^{j\theta}\,Z.\,e^{-j\theta} = Z^2}$$

$$\boxed{\mathbf{\underline{Z}+\underline{Z}^* = 2.Re(\underline{Z}) \ ; \quad \underline{Z}-\underline{Z}^* = 2.j.Im(\underline{Z}) \ ; \quad \underline{Z}.\underline{Z}^* = Z^2}}$$

Cas particulier : $\underline{Z} = e^{j\theta}$

$$\underline{Z}+\underline{Z}^* = e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2Re\left(e^{j\theta}\right) = 2\cos\theta \ ; \quad \underline{Z}-\underline{Z}^* = e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2jIm\left(e^{j\theta}\right) = 2j\sin\theta$$

$$\boxed{\textbf{Formules d'Euler : } \cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}}$$

3) Formule de Moivre

$$(\cos(\theta) + j.\sin(\theta))^n = \left(e^{j\theta}\right)^n = e^{jn\theta} = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$$

$$\boxed{\textbf{Formule de Moivre : } (\cos(\theta) + j\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)}$$

4) Applications

- En GEII :

La puissance instantanée dissipée dans un dipôle linéaire, qui est soumis à une tension $v(t) = V_{eff}\sqrt{2}\cos\omega t$ et parcouru par un courant $i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ est définie par la relation : $p(t) = v(t) \cdot i(t)$.

En utilisant les relations d'Euler, montrer que cette puissance instantanée est la somme d'un terme constant et d'un terme sinusoïdal de pulsation double.

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

- Linéarisation et calcul intégral

En appliquant les formules d'Euler, linéariser $\cos^2(\mathrm{t})$ puis calculer l'intégrale :

$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(\mathrm{t})\, dt$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

- Formule de Moivre

En utilisant les formules de Moivre, calculer $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

……………………………………………………………………………………………...

Notes

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

III. Signal cissoïdal $\mathbf{f(t) = a.\cos(\omega t) + b.\sin(\omega t)}$ où a et b sont des réels non nuls.

1) Transformation de $f(t) = a.\cos(\omega t) + b.\sin(\omega t)$

Notons $A = |a - jb|$ et $\varphi = \arg(a - jb)$, alors :

$a - jb =$ ……………………………………………………………………………………

De plus,

$\cos(\omega t) + j.\sin(\omega t) =$……………………………………………………………………..

Ainsi le produit de ces deux nombres complexe est :

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

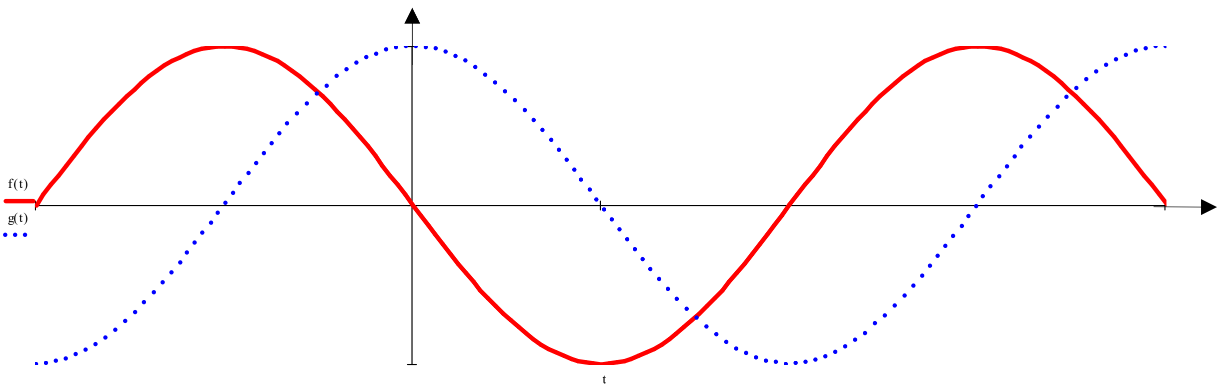
……………………………………………………………………………………………...

On obtient donc le résultat suivant :

$\mathbf{f(t) = a.\cos(\omega t) + b.\sin(\omega t) = A.\cos(\omega t + \varphi)}$ **où** $\mathbf{A = \lvert a - jb \rvert}$ **et** $\mathbf{\varphi = \arg(a - jb)}$ **.**   **f est donc un signal sinusoïdal d'amplitude A, de période** $\frac{2\pi}{\omega}$**, et de déphasage** φ**.**

Représentation graphique :

Soit $f(t) = A.\cos(\omega t + \varphi)$; $g(t) = A.\cos(\omega t)$
Sur le graphe ci-après, indiquer A, T et t_1 , le décalage temporel.
On a alors la formule : $\varphi = \frac{2\pi t_1}{T} = \omega t_1$



Rappel : La période T est en seconde, la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$ en radian par seconde, et la fréquence $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ en Hertz.

2) Exemple

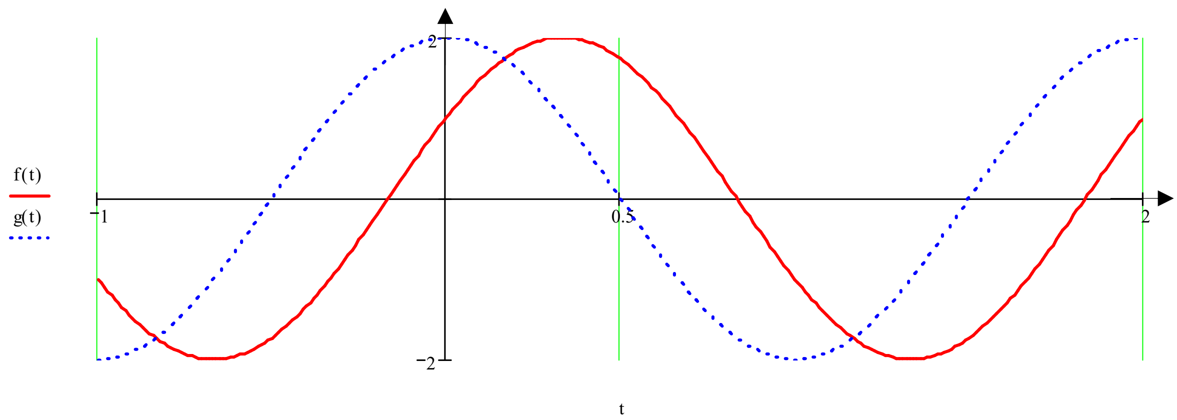
✓ $f(t) = \cos(\pi t) + \sqrt{3}\,\sin(\pi t)$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...



……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

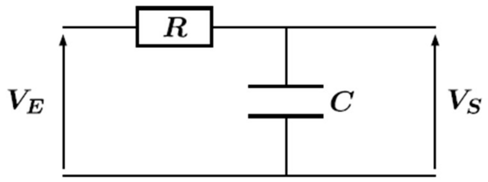
……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Exercices

Exercice 1



Un filtre $\boldsymbol{RC}$ a pour fonction de transfert :

$$\boldsymbol{H(f) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j0.1f}}$$

Calculer le module et l'argument de cette fonction de transfert pour les 5 fréquences suivantes :

f	1 Hz	5 Hz	10 Hz	20 Hz	100 Hz
Module					
Argument					

En déduire le type de filtre.

Exercice 2

Effectuer les différentes opérations proposées (mettre ces résultats sous la forme $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta})$)

1. $\boldsymbol{z = (10, \widehat{-40^o})}$ calculer : $\boldsymbol{z.\overline{z} = |z|^2}$
2. $\boldsymbol{z = (20, -\widehat{53, 1^o})}$ calculer : $\boldsymbol{z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)}$
3. $\boldsymbol{z = 2,5\, e^{-j\pi/4}}$ calculer : $\boldsymbol{z.\overline{z}}$
4. $\boldsymbol{z = 2 + j8}$ calculer : $\boldsymbol{z - \overline{z} = 2j\mathrm{Im}(z)}$
5. $\boldsymbol{z = (r, \widehat{\theta})}$ calculer : $\boldsymbol{z/\overline{z}}$

Exercice 3 Calcul intégral et nombres complexe

1) En utilisant les formules d'Euler, linéariser l'expression : $\sin^3 x$ (on développera d'abord $(a-b)^3$). En déduire la valeur de l'intégrale $\mathrm{I} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3(t)\mathrm{d}t$
2) En utilisant les formules d'Euler, linéariser l'expression : sinx.cos(2x).sin(3x). En déduire la valeur de l'intégrale : $\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(\theta)\cos(2\theta)\sin(3\theta)\,\mathrm{d}\theta$
3) Déterminer la valeur de l'intégrale : $\mathrm{K} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{-t}e^{3jt}\mathrm{d}t$, puis en déduire celle de $Im(\mathrm{K}) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{-t}\sin(3\mathrm{t})\,\mathrm{dt}$

Exercice 4

Exprimer sous la forme $\mathrm{A}.\cos(\omega.\mathrm{t} + \varphi)$ les fonctions suivantes, puis en déduire leurs amplitude, période et déphasage.

$f_1(t) = \cos(t) + \sin(t)$ et $f_2(t) = \cos(t) - \sin(t)$ et $f_3(t) = \cos(\omega t) + \sqrt{3}\sin(\omega t)$

Notes

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Partie B : Les polynômes

I. Généralités

1) Définitions

- Soit z, une variable réelle ou complexe ; n, un entier naturel ; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels ou complexes.
  On appelle polynôme, toute fonction P définie par :
  $$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$$
  On note aussi : $$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$
- a_k est appelé coefficient de z^k
- $a_k z^k$ est appelé monôme de degré k
- On appelle degré du polynôme P et on note deg(P) le plus haut degré des monômes de P. Dans les notations précédentes deg(P)=n.
- Si deg(P)=0, alors $P(z) = a_0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
  P est alors appelé polynôme constant, et deg(P) = 0
- $\boxed{P(z) = 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} = a_n = 0}$. Le polynôme P est alors appelé polynôme nul et on note : $P \equiv 0$, et deg(P) = $-\infty$ par convention.
- Les solutions de l'équation P(z) = 0 sont appelées racines, ou zéros du polynôme P.
- On note $\mathbb{R}$ [X] l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
  On note $\mathbb{C}$ [X] l'ensemble des polynômes à coefficients complexes.

2) Exemple

$$P(x) = x^5 - 3x^8 + x\sqrt{2} - 5 + 3x^7$$

« P est un polynôme à coefficients réels » se note : ……………………………………………

« Le degré de P est ….. », se note : ………………………………………………………..........

Quel est le monôme de degré 7 ? ……………………………………………………………….

Quel est le coefficient de x^2 ? …………………………………………………………………...

Ordonner P suivant les puissances croissantes :

…………………………………………………………………………………………………...

Notes

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

3) Opérations

Soit : $\mathbf{P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k}$ où $P \in \mathbb{C}[X]$. deg(P)=n

et : $\mathbf{Q(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + ... + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k}$ où $Q \in \mathbb{C}[X]$. deg(Q)=m.

- ✓ Egalité

$$\boxed{\mathbf{P \equiv Q \Leftrightarrow P(z) = Q(z)\ \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} deg(P) = deg(Q) = n \\ a_k = b_k\ \ \forall\, 0 \le k \le n \end{cases}.}}$$

- ✓ Addition

$$(P+Q)(z) = P(z) + Q(z) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1).z + (a_2 + b_2).z^2 + ... + (a_k + b_k)z^k + ...$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{(P+Q)(z) = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) z^k} \\ \mathbf{deg(P+Q) = \max(deg(P), deg(Q))} \end{array}}$$

- ✓ Multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{\lambda.P(z) = \sum_{k=0}^{n} \lambda.a_k z^k} \\ \mathbf{deg(\lambda.P) = deg(P)} \end{array}}$$

- ✓ Multiplication par un polynôme

(PQ)(z) = P(z).Q(z)

$$= \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n\right)\left(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + ... + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m\right)$$

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{(PQ)(z) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right).z^k} \\ \mathbf{deg(P.Q) = deg(P) + deg(Q)} \end{array}}$$

4) Exemples

✓ $P(z) = 4.(z-1).(z+1).(z-j)$

Sous quelle forme est écrit le polynôme P ?…………………………………………….

…………………………………………………………………………………………...

$\deg(P) =$ ………………………………………………………………………………

Développer P : $P(z) =$ …………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

Le polynôme P est élément de quel ensemble ? …………………………………...

Quelles sont les racines (ou zéros) de P ? ………………………………………………

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

✓ $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

Déterminer le polynôme Q tel que : $P(x) = (x-1).Q(x)$

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

II. Racines et factorisation d'un polynôme de degré 2

1) Avec une identité remarquable lorsque c'est possible $b \in \mathbb{R}$

Forme développée	**Forme factorisée dans $\mathbb{R}$**	**Forme factorisée dans $\mathbb{C}$**	**Racines de P et multiplicité**
$x^2 + 2bx + b^2$	$(x+b)^2$	$(x+b)^2$	-b est double.
$x^2 - 2bx + b^2$	$(x-b)^2$	$(x-b)^2$	b est double.
$x^2 - b^2$	$(x-b)(x+b)$	$(x-b)(x+b)$	b et -b sont simples.
$x^2 + b^2$	$x^2 + b^2$	$(x-jb)(x+jb)$	jb et -jb sont conjuguées et simples.

2) Avec le discriminant

Les racines du polynôme $P(z) = a.z^2 + b.z + c$ où $a,b,c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$ sont :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a} \\ z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a} \end{cases} \quad \text{où} \quad \delta^2 = b^2 - 4.a.c \text{ est le discriminant}$$

La factorisation de P dans $\mathbb{C}$ est alors : $P(z) = a.(z - z_1)(z - z_2)$

Exemples

- ✓ $Q(x) = x^2 - 2x + 2$; $Q \in \mathbb{R}[X]$

  A l'aide des formules apprises en terminale, déterminer les racines de Q, puis factoriser Q :

  ……………………………………………………………………………………...

  ……………………………………………………………………………………...

  ....

  ……………………………………………………………………………………...

  ....

  ……………………………………………………………………………………...

  ....

  On remarque que les racines de P sont …………………………………………………

En reprenant le deuxième exemple du paragraphe I.4), factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$:

Quelle est la factorisation de P dans $\mathbb{C}$? $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$

P(z) =………………………………………………………………………………………

Quelle est la factorisation de P dans $\mathbb{R}$?

$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2 =$………………………………………………………………

- ✓ Déterminer les racines de P, puis factorisez-le :

$$P(z) = 4.z^2 + 4.z + 1 - 2j \ ; \ P \in \mathbb{C}[X] \backslash \mathbb{R}[X]$$

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

3) <u>Relation entre les coefficients et les racines d'un polynôme de degré 2</u> :

Soit $P(z) = z^2 - s.z + p \in \mathbb{C}[X]$. Soit α et β les racines de P.   **Alors : $s = \alpha + \beta$ et $p = \alpha.\beta$**

- ✓ <u>Démonstration</u>

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

- ✓ <u>Exercice</u> Résoudre le système suivant : $\begin{cases} \alpha + \beta = -5 \\ \alpha.\beta = 5 \end{cases}$.

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

Notes

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

III. Factorisation d'un polynôme de degré >2

1) Division euclidienne de polynômes

Exemple Soit $A(x) = x - 2x^2 + x^3 + 1$ et $B(x) = x^2 + 2$
Effectuer la division euclidienne de A par B, c'est effectuer la division de A par B en ordonnant A et B suivant les puissances décroissantes.

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

Définition / Théorème de la division euclidienne de polynômes

Soit A et B deux polynômes à coefficients complexes tels que : $B \neq 0$ et $\deg(A) \geq \deg(B)$.
Il existe alors un unique couple de polynômes (Q,R) vérifiant : $\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$.
On dit alors que Q et R sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.
La division euclidienne de A par B est aussi appelée division de A par B suivant les puissances décroissantes.

- ✓ Remarque Si R=0, alors A=BQ. On dit alors que le polynôme A est factorisable par B, ou que B divise A, ou encore que A est divisible par B.

4) Factorisation d'un polynôme de degré >2

Soit P, un polynôme de degré quelconque, à coefficients quelconques.

a) α est une racine de P si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par (x- α)

$$P(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists !\, Q \in \mathbb{C}[X] \;\; / \; P(x) = (x-\alpha).Q(x)$$

b) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont des racines de P si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par $(x-\alpha_1).(x-\alpha_2)...(x-\alpha_k)$

$P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = \ldots = P(\alpha_k) = 0 \Leftrightarrow \exists !\, Q \in \mathbb{C}[X] \;\; / \; P(x) = (x-\alpha_1).(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)Q(x)$

c) α est une racine de P et P′ si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par $(x-\alpha)^2$
On dit alors que α est une racine double de P (ou est de multiplicité 2).

$P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ et $P''(\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow \exists !\, Q \in \mathbb{C}[X] \;\; / \; P(x) = (x-\alpha)^2.Q(x)$

d) α est une racine de P, P′ et P″ si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par $(x-\alpha)^3$. On dit alors que α est une racine triple de P (ou est de multiplicité 3).

$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = 0$ et $P^{(3)}(\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow \exists !\, Q \in \mathbb{C}[X] \;\; / \; P(x) = (x-\alpha)^3.Q(x)$

Etc…

- ✓ Exemple 1 Chercher une racine évidente du polynôme P, défini par :
  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$. Puis le factoriser (l'écrire comme produit de polynômes de plus bas degré possible)

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

- ✓ <u>Exemple 2</u> Soit le polynôme : $P(x) = x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 3x + 10$. Chercher au moins deux racines évidentes de P, puis en déduire les autres. Quelle est alors la factorisation de P ?

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

- ✓ <u>Exemple 3</u> Déterminer une racine évidente multiple du polynôme P suivant, puis le factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$: $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$.

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

Notes

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

3) Méthodologie pour factoriser un polynôme de degré>2

✓ Définition

Factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}$ (dans $\mathbb{R}$), c'est l'écrire comme produit de polynômes à coefficients complexes (réels) de plus bas degré possible.

✓ Théorème de D'Alembert

- **Soit P, un polynôme de degré n : $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$.**
  P possède alors n racines dans l'ensemble $\mathbb{C}$: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ distinctes ou non. On peut alors factoriser P dans $\mathbb{C}$: $P(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)...(z - \alpha_n)$
  P est donc factorisable dans $\mathbb{C}$ en n polynômes de degré 1.

- **Soit P, un polynôme de degré n à coefficients réels :**
  $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$.
  P est factorisable dans $\mathbb{R}$ en produit de
  - polynômes de degré 1 à racine réelle : (x-a) avec $a \in \mathbb{R}$
  et de - en polynômes de degré 2 à racines complexes conjuguées.

✓ Méthodes

- Chercher une ou plusieurs racines évidentes parmi : 0 ; 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; j ; -j ;… avec éventuellement leur multiplicité. Puis effectuer une division euclidienne.
- Penser aux identités remarquables.
- Ou bien résoudre P(z)=0, puis factoriser.

✓ Exemple 1 Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme suivant : $P(z) = z^4 - 1$.

....

……………………………………………………………………………………..

Factoriser alors le polynôme P dans $\mathbb{R}$:

....

……………………………………………………………………………………..

✓ Méthode pour factoriser dans $\mathbb{R}$ On factorise d'abord P dans $\mathbb{C}$, puis on multiplie les paires de polynômes de degré 1 à racines complexes conjuguées.

En effet : $P(x) = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) =$ ………………………………………………………

....

- ✓ Exemple 2 Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le polynôme suivant : $P(z) = z^5 - 1$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exercices

Exercice 1

1) Ecrire les identités remarquables de la forme développée à la forme factorisée (produit de polynômes de degré 1).
2) Ecrire sous forme factorisée (factoriser) les polynômes suivants :
   $P(x) = x^2 - 9$; $P(x) = x^2 + 9$; $P(x) = 4x^2 - 25$; $P(x) = 9x^2 - 6x + 1$;
   $P(x) = (x + 1)^2 - 16$; $P(x) = 3(x - 2)^2 + 5$
   $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
3) Factoriser les polynômes suivants :
   $a)\ x^2 + 10x + 21 \quad b)\ 6x^2 + x - 1 \quad c)\ x^3 + x^2 - 6x$
   $d)\ x^3 - x^2 - x + 1 \quad e)\ (x^2 - 1)^2 \quad f)\ x^4 + 3x^2 + 2.$

Exercice 2 Effectuer la division euclidienne de A par B où :
1) $A(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 1$ et $B(x) = x - 2$
2) $A(x) = x^3 + x + 1$ et $B(x) = x^2 + 1$
3) Effectuer les divisions euclidiennes de P par Q :
   $P = x^3 + 2x^2 - 3x + 5, \quad Q = x + 5$
   $P = 3x^5 + 9x^4 - 20x^3 - 13x^2 + 31x + 10, \quad Q = x^2 + 3x - 5$

Exercice 3 Chercher une racine évidente, puis factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le polynôme suivant : $P(x) = x^3 - 6x^2 + x - 6$

Exercice 4 Chercher une racine évidente multiple, puis factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le polynôme suivant : $P(x) = x^4 - 3x^3 - 17x^2 + 39x - 20$

Exercice 5 Factoriser le polynôme : $P(x) = x^3 + 3x - 2j$ (on cherchera d'abord une racine évidente, puis on effectuera une division euclidienne)

Exercice 6 Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ les polynômes suivants :

$P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8$; $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Notes

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………..

Partie C : Application à la Décomposition en somme d'éléments simples d'une fraction rationnelle

I. Décomposition en somme d'éléments simples d'une fraction rationnelle $\frac{A(x)}{B(x)}$ où A et B sont des polynômes, et application au calcul de primitives.

Soit $F(x) = \frac{x^4-x^3-7x^2+2x+5}{x^3+2x^2-x-2}$ une fraction rationnelle, le but de ce problème est de déterminer les primitives de F. Pour cela, il vous faudra la décomposer en somme d'éléments simples en suivant les étapes suivantes :

1) Factoriser le dénominateur B de F.

2) Déterminer si F est réductible, et si c'est le cas la réduire.

> **Une fraction rationnelle $F = \frac{A}{B}$ est dite <u>irréductible</u> lorsque les polynômes A et B n'ont pas de facteurs communs, ou bien lorsque les polynômes A et B n'ont aucune racine commune.**

3) Déterminer si F a une partie entière, et si c'est le cas noter G la fraction restante.

> **Soit $F = \frac{A}{B}$, une fraction irréductible. Deux cas de figure se présentent :**
>
> **- Soit <u>deg(A) ≥deg(B)</u>, on peut alors effectuer la division euclidienne de A par B. On obtient donc les polynômes Q et R tels que :**
> $$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases} \text{ et } F = \frac{A}{B} = \frac{BQ+R}{B} = Q + \frac{R}{B}.$$
> **Q est appelé <u>partie entière</u> de F.**
>
> **- Soit deg(A)<deg(B), on ne peut alors pas effectuer de division euclidienne de A par B, et F ne possède pas de partie entière.**

4) Ecrire la forme de la décomposition en somme d'éléments simples de G, puis calculer les coefficients a_i voir ci-dessous.

> **Soit G, une fraction irréductible, sans partie entière, à pôles simples : $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$**
>
> **On a alors : $G(x) = \frac{P(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)}$ avec $\begin{cases} \deg(P) < n \\ P(\alpha_i) \neq 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq n \end{cases}$**
>
> **Et G se décompose en somme d'éléments simples :**
> **$G(x) = \frac{a_1}{x-\alpha_1} + \frac{a_2}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{a_n}{x-\alpha_n}$ avec $a_i = [(x-\alpha_i)G(x)]_{x=\alpha_i} \ \forall 1 \leq i \leq n.$**

5) A l'aide des résultats des questions 3 et 4, en déduire la décomposition en somme d'éléments simples de F, puis déterminer ses primitives.

Notes

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

II. Décomposition en somme d'éléments simples d'une fraction rationnelle $\frac{A(x)}{B(x)}$ et application à la résolution d'une EDLCC à l'aide de la transformation de Laplace.

1) Formulaire

Définition **Soit f, une fonction causale (i.e. $f(t) = 0 \ \forall t < 0$) , on appelle transformée de Laplace de la fonction f, la fonction F, définie par : F(s)=$\int_0^{+\infty} f(t).e^{-st}.dt$**
On note : T_L[f(t)]= F(s)=$\int_0^{+\infty} f(t).e^{-st}.dt$. Le tableau ci-après :

f, fonction causale	**T_L[f(t)]** ou F(s)
$\delta(t)$	1
U(t) ou 1	$\frac{1}{s}$
$t^n.U(t)$ ou t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\cos(\omega t).U(t)$ ou $\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t).U(t)$ ou $\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}.U(t)$ ou e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Si f est dérivable sur $[0, +\infty[$ f '(t)	s.F(s) - f(o)
Si f est deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ f ''(t)	s^2.F(s) - s.f(o) - f '(0)

2) Résolution d'une équation différentielle à l'aide de la transformation de Laplace

Résoudre l'équation différentielle suivante à l'aide de la transformation de Laplace :

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 2.U(t) \\ y(0) = 1 \ et \ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Indications : On pose Y(s), la transformée de Laplace de y(t) ; on applique la transformation de La place à l'équation complète, on obtient alors une équation algébrique d'inconnue Y(s), que l'on résout. Puis, on décompose Y(s) en somme d'éléments simples, et pour finir, on en déduit y(t) la transformée inverse de Y(s).

Réponse : $y(t) = (1 - e^{-t} + e^{-2t}).U(t)$

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

Notes

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

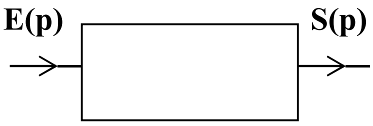
…………………………………………………………………………………………………...

3) <u>Exemple de problème complet</u> **:** Application de la décomposition en somme d'éléments simples et de la transformation de Laplace à l'étude des systèmes

a) <u>Fonction de transfert d'un circuit</u>

Soit S un circuit (RC, RLC…). Dans un tel circuit, un signal d'entrée e(t) (tension) engendre un signal de sortie s(t), appelé aussi <u>réponse du circuit au signal e(t)</u>).

On dit que le circuit <u>S est linéaire</u> lorsque e(t) et s(t) sont liés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Le <u>circuit est dit d'ordre n</u> lorsque l'équation différentielle est d'ordre n **Le circuit est alors caractérisé par le schéma fonctionnel ci-dessous :**



b) <u>Exemple de circuit du premier ordre</u> Etude du filtre passe-haut.

Soit un circuit dans lequel la sortie s(t) et l'entrée e(t) vérifient l'équation différentielle :
$s'(t)+3.s(t) = 2.e'(t) + e(t)$; $s(0) = e(0) = 0$. Soit $S(p) = \mathcal{L}[s(t)]$ et $E(p) = \mathcal{L}[e(t)]$.

- ✓ Calculer la fonction de transfert H(p) de ce circuit : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$
- ✓ On appelle **réponse impulsionnelle** d'un circuit, le signal de sortie s obtenu, lorsque le signal d'entrée e est une impulsion de Dirac. Déterminer la réponse impulsionnelle de ce circuit.
- ✓ On appelle **réponse indicielle** d'un circuit, le signal de sortie obtenu, lorsque le signal d'entrée e est un échelon unité. Déterminer la réponse indicielle de ce circuit.
- ✓ <u>Pour les poursuites d'études</u> : On appelle **réponse harmonique** d'un circuit, le signal de sortie s obtenu, lorsque le signal d'entrée e est un signal sinusoïdal. Déterminer la réponse harmonique de ce circuit avec e(t) =5.cos(3t).
- ✓ Montrer qu'après disparition du régime transitoire, la réponse de ce circuit à $e(t) = 5\cos(3t)$ est de la forme : $s(t) = 5A\cos[3t + \varphi]$ avec :
  $A = |H(3j)|$ et $\varphi = \text{Arg}(H(3j))$.

  Plus généralement, on admet que : Après disparition du régime transitoire, la réponse d'un système linéaire à une entrée sinusoïdale $\mathbf{e(t) = e_0 \cos(\omega t)}$ est de la forme : $\mathbf{s(t) = e_0 A(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]}$ avec :
  $\mathbf{A(\omega) = |H(j\omega)|}$ **et** $\mathbf{\varphi(\omega) = Arg(H(j\omega))}$

  …………………………………………………………………………………………...

  …………………………………………………………………………………………...

Notes

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Partie D : Exercices d'entraînement pour les poursuites d'études longues

Exercice 1

a, b et c sont des nombres complexes : Soit $P(z) = az^2 + bz + c$ avec $a \neq 0$:
pour résoudre P(z) = 0. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ qui est un nombre complexe. On cherche alors les racines carrées de Δ, par définition, ce sont les deux solutions δ_1 et δ_2 de l'équation : $\delta^2 = \Delta$

P possède alors deux racines : $z_1 = \dfrac{-b-\delta_1}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta_2}{2a}$

a) Résoudre l'équation : $z^2 + 2(1+j)z + 4j = 0$
b) Résoudre l'équation : $z^2 + (2-j)z - 2j = 0$
c) Déterminer les racines de P, puis factorisez-le :

$$P(z) = 2.z^2 + z + 1 + 3j \ ; P \in \mathbb{C}[X] \backslash \mathbb{R}[X]$$

d) Démontrer le résultat ci-dessous :

Soit P un polynôme de degré 2, possédant une racine complexe non réelle α.
P est un polynôme à coefficients réels si et seulement si sa deuxième racine β est le conjugué de α. Autrement dit : $P \in \mathbb{R}[X] \Leftrightarrow \beta = \alpha^*$ (ou $\overline{\alpha}$ en notation mathématique)

e) Exercice extrait des banques d'épreuve IUT/BTS session 2000
Le polynôme suivant : $P(z) = z^2 + (3-3i).z + 4i$ a ses racines complexes conjuguées entre elles. Vrai ou Faux ?

Exercice 2 Décomposer en somme d'éléments simples dans $\mathbb{R}$ les fractions ci-dessous en suivant les étapes indiquées ci-après :
Etape 1 : Factoriser le dénominateur dans $\mathbb{C}$; Etape 2 : Déterminer si la fraction est irréductible ; Etape 3 : Calculer la partie entière de la fraction irréductible ;
Etape 4 : Décomposer en sommes d'éléments simples dans $\mathbb{R}$ la fraction (si la fraction a des pôles multiples, voir l'encadré ci-dessous)

$$F(x) = \frac{x^5 + x^2}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \qquad G(x) = \frac{2x^4 + x^2 - x^3 - x}{x^3 - x^2 + x - 1} \qquad H(s) = \frac{1}{s.(\tau s + 1)}$$

$$K(x) = \frac{x+3}{(x-1)^2(x^2+1)} \qquad L(x) = \frac{10x^2}{x^4 + 3x^2 - 4} \qquad N(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{(x^2+x+1)(x-2)}$$

Soit F, une fraction irréductible, sans partie entière. Si F possède un pôle α de multiplicité m, alors :

On a alors : $F(x) = \dfrac{P(x)}{(x-\alpha)^m Q(x)}$.

Et F se décompose en somme d'éléments simples :

$$F(x) = \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{a_m}{(x-\alpha)^m} + \ldots \quad \text{avec} \quad a_m = \left[(x-\alpha)^m F(x)\right]_{x=\alpha_i}.$$

Pour déterminer les autres coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ on remplace x par m-2 valeurs distinctes et on calcule $\lim\limits_{x\to\infty} x.F(x)$, on obtient ainsi un système de m-1 équations linéaires à m-1 inconnues à résoudre.

Exercice 3 Décomposer en somme d'éléments simples la fraction suivante, puis en déduire sa transformée de Laplace inverse .

$$G(s) = \frac{1}{s^2(RCs+1)}$$

Exercice 4 Soit $F(x) = \dfrac{x}{(x-1)^6(2-x)}$

a) Ecrire la forme de la décomposition en éléments simples de F(x), sans calculer les coefficients A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, B.

b) On pose h=x-1, on remplace dans l'expression de F(x) et dans sa décomposition : x-1 par h, on obtient alors G(h).

c) On multiplie G(h) par h^6, effectuer alors une division en puissances croissantes pour obtenir les coefficients A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, B.

Ecrire la décomposition en éléments simples de F(x)

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………...