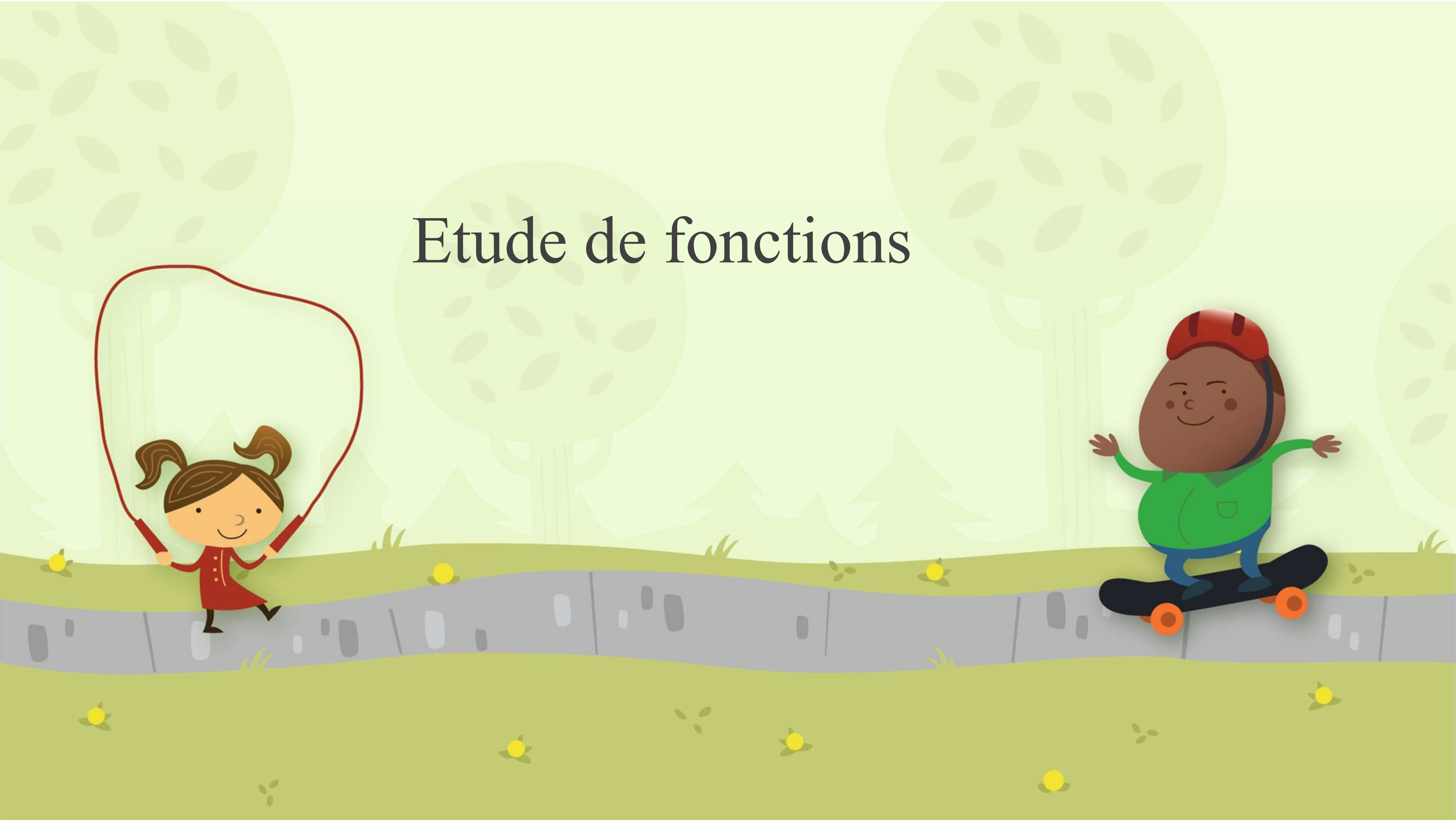
Préparation DS sur les fonctions, les limites et intégrales BUT GEII 1ALT

Etude de fonctions



Q

2’

Soit f, la fonction définie par : $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}-1}$.

Son ensemble de définition est donc :

✓1 1. $D_f = \mathbb{R}^*$

2. $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

3. $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

4. $D_f = \mathbb{R}$

5. Aucune des réponses précédentes n’est juste

1
2
3
4
5

Notes

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}-1}$$

$f(x)$ existe ssi $e^{x^2} - 1 \neq 0$

On résout $e^{x^2} - 1 = 0 \iff e^{x^2} = 1$

$\iff x^2 = 0$

$f(x)$ existe $\iff x = 0$

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*}$$

Soit f, la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{e^{x^2}-1}$.

2'

f est donc :

1. paire — 1
2. impaire — 2
3. ni l'un, ni l'autre — 3

Notes

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2} - 1}$$

$$f(-x) = \frac{e^{(-x)^2}}{e^{(-x)^2} - 1} = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2} - 1} = f(x)$$

f est donc paire sur $\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

On étudie donc f sur $]0;+\infty[= \mathbb{R}^*_+$

Q

2’

On étudie la fonction f, définie par : $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}-1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

L’expression de sa dérivée est alors :

1. $f'(x) = \frac{-e^{x^2}}{\left(e^{x^2}-1\right)^2}$

2. $f'(x) = \frac{e^{x^2}}{\left(e^{x^2}-1\right)^2}$

3. $f'(x) = \frac{2x.e^{x^2}}{\left(e^{x^2}-1\right)^2}$

✓4 4. $f'(x) = \frac{-2x.e^{x^2}}{\left(e^{x^2}-1\right)^2}$

5. Aucune des réponses précédentes n’est juste

1

2

3

4

5

Notes

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2} - 1} \quad \forall\, x > 0$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\left(e^{x^2}\right)' = (x^2)' . e^{x^2}$$

$$\left(e^{x^2}\right)' = 2x . e^{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x . e^{x^2}\left(e^{x^2} - 1\right) - e^{x^2}\left(2x e^{x^2}\right)}{\left(e^{x^2} - 1\right)^2}$$

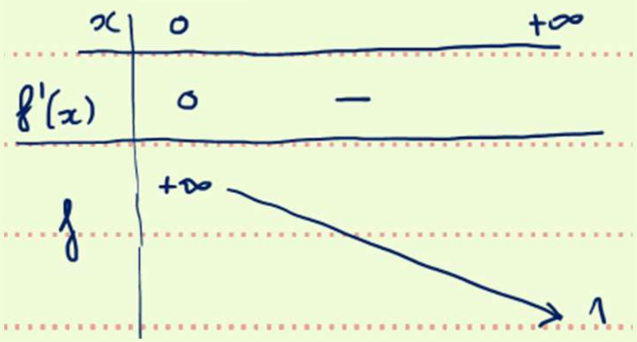
$$= \frac{2x . e^{2x^2} - 2x e^{x^2} - 2x e^{2x^2}}{\left(e^{x^2} - 1\right)^2}$$

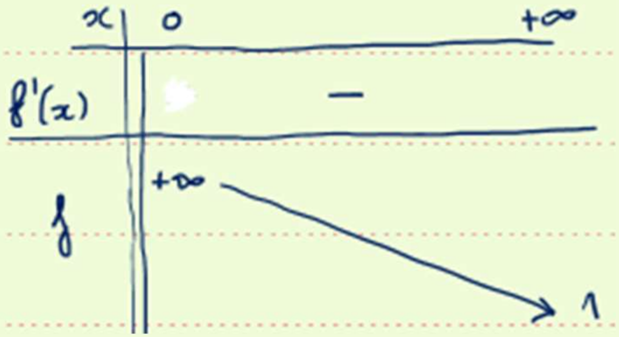
$$\boxed{f'(x) = \frac{-2x e^{x^2}}{\left(e^{x^2} - 1\right)^2}} \quad \forall\, x > 0.$$

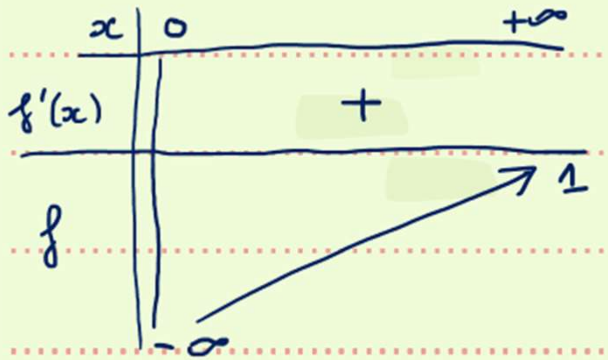
4’

On étudie la fonction f, définie par : $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}-1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

dont la dérivée est : $f'(x) = \frac{-2\ .e^{x^2}}{\left(e^{x^2}-1\right)^2}$. Quel est alors le tableau de variation complet de f ?







1. Le premier tableau est correct
2. Le deuxième tableau est correct
3. Le troisième tableau est correct
4. Aucun des tableaux ci-dessus n’est correct.

1
2
3
4

Notes

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2} - 1} \qquad f'(x) = \frac{-2x\,e^{x^2}}{\left(e^{x^2}-1\right)^2} \quad \forall\, x > 0$$

$f'(x)$ est du signe de $\underbrace{-2x}_{<0}\ \underbrace{e^{x^2}}_{>0} < 0 \quad \forall\, x > 0.$

$\forall x > 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \text{"}\,\frac{1}{0^{+}}\,\text{"} = +\infty$$

$x \to 0^+$

en effet $x > 0$ donc $e^{x^2} > e^0 = 1$

et $e^{x^2} - 1 > 0$

$$L = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \text{"}\,\frac{e^{+\infty}}{e^{+\infty} - 1}\,\text{"} = \text{"}\,\frac{+\infty}{+\infty}\,\text{"} \text{ F.I}$$

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}} = 1 \text{ donc } L = 1$$

Pour tracer la courbe représentant f sur son ensemble de définition, on commence par placer les droites suivantes :

3’

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	1

1. l′asymptote horizontale d′équation $y = 0$,
   et l’asymptote verticale d’équation x=1.

✓2 2. l′asymptote horizontale d′équation $y = 1$,
   et l’asymptote verticale d’équation x=0.

3. les asymptotes horizontales d′équation $y = 1$, et y= -1
   et l’asymptote verticale d’équation x=0.

4. La tangente horizontale en 0,
   l′asymptote horizontale d′équation $y = 1$,
   et l’asymptote verticale d’équation x=0.

1

2

3

4

Notes

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}-1}$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1

* asymptote verticale d'équation $x = 0$

* asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$ d'équation $y = 1$

$$f'(x) = \frac{-2x\,e^{x^2}}{(e^{x^2}-1)^2}$$

ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, il n'y a donc pas de tangente horizontale.

On étudie la bijectivité de la fonction f, définie par : $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}-1}$.

Quelle assertion ci-dessous est juste ?

2'

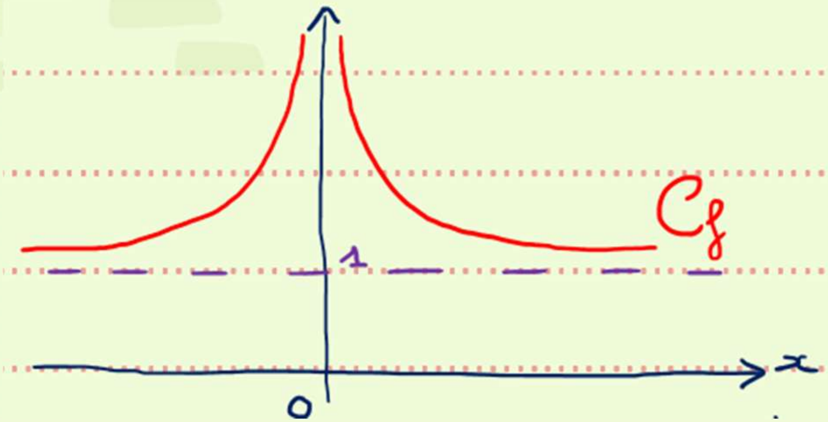
1. $f :]-\infty; 0[\to [1; +\infty[\quad x \mapsto y = f(x)$ est bijective, car elle est strictement monotone et continue

2. $f :]0; +\infty[\to [1; +\infty[\quad x \mapsto y = f(x)$ est bijective, car elle est strictement monotone

3. $f : \mathbb{R}^* \to]1; +\infty[\quad x \mapsto y = f(x)$ est bijective

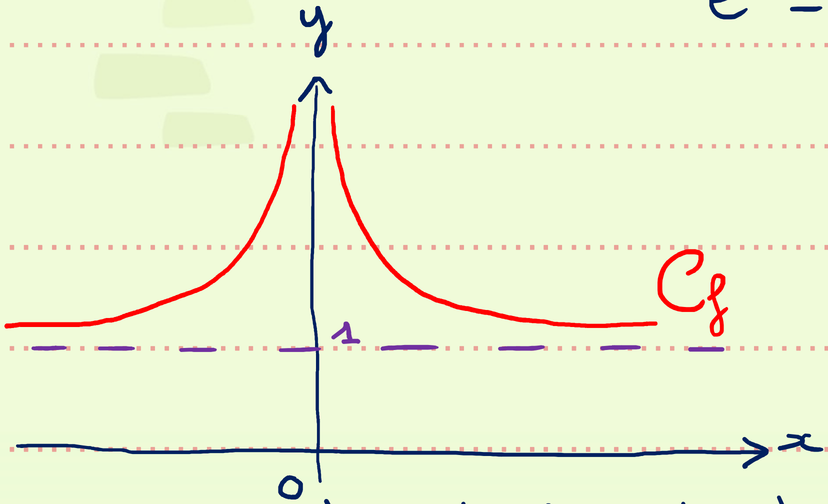
4. Aucune des réponses précédentes n'est juste.

1
2
3
4



Notes

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}-1}$$



* $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow]1;+\infty[$ n'est pas bijective.

$x \longmapsto y = f(x)$ ③ est faux

* $f :]0;+\infty[\longrightarrow]1;+\infty[$ ② est faux

$x \longmapsto y = f(x)$

D'après le th de bijection, f est bijective sur $]0;+\infty[$ car f est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

* $f :]-\infty;0[\longrightarrow]1;+\infty[$ ① est faux

$x \longmapsto y = f(x)$

Idem : f est continue et stt croissante sur $]-\infty;0[$, donc bijective sur $]-\infty;0[$

Q

La fonction $f:]-\infty; 0[\rightarrow]1; +\infty[\quad x \mapsto y = f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}-1}$ étant bijective, elle admet une fonction réciproque f^{-1} telle que :

4’

1. $f^{-1}:]1; +\infty[\rightarrow]-\infty; 0[\quad y \mapsto x = f^{-1}(y) = \sqrt{ln\left(\frac{y}{y-1}\right)}$

2. $f^{-1}:]-\infty; 0[\rightarrow]1; +\infty[\quad y \mapsto x = f^{-1}(y) = \sqrt{ln\left(\frac{y}{y-1}\right)}$

3. $f^{-1}:]-\infty; 0[\rightarrow]1; +\infty[\quad y \mapsto x = f^{-1}(y) = -\sqrt{ln\left(\frac{y}{y-1}\right)}$

✓4

4. $f^{-1}:]1; +\infty[\rightarrow]-\infty; 0[\quad y \mapsto x = f^{-1}(y) = -\sqrt{ln\left(\frac{y}{y-1}\right)}$

5. Aucune des réponses précédentes n’est juste.

1

2

3

4

5

Notes

$$f(x)=\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}-1}$$

$f :]-\infty;0[\longrightarrow]1;+\infty[$ est bijective.
$x \longmapsto y=f(x)$

* f admet donc une fonction réciproque $\boxed{\begin{array}{l} f^{-1} :]1;+\infty[\longrightarrow]-\infty;0[\\ y \longmapsto x=f^{-1}(y) \end{array}}$

* On résout $y=\dfrac{e^{x^2}}{e^{x^2}-1}$ avec $x<0$ et $y>1$.

$$\Longleftrightarrow y(e^{x^2}-1)=e^{x^2} \Longleftrightarrow ye^{x^2}-y=e^{x^2} \Longleftrightarrow ye^{x^2}-e^{x^2}=y$$

$$\Longleftrightarrow e^{x^2}(y-1)=y \Longleftrightarrow e^{x^2}=\frac{y}{y-1} \Longleftrightarrow x^2=\ln\left(\frac{y}{y-1}\right)$$

$\Longleftrightarrow x=\pm\sqrt{\ln\left(\frac{y}{y-1}\right)}$. Comme $x<0$ alors

$$\boxed{x=f^{-1}(y)=-\sqrt{\ln\left(\frac{y}{y-1}\right)}}$$

Calcul de limites

Soit f, *la fonction définie par* : $f(x) = \dfrac{\left(-5x^2 - x + 2\right)^3}{\left(2x^3 + x + 1\right)^2}$ *alors* :

2'

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{-5}{2}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{5}{2}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{12}{4}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{-125}{4}$ ✓4
5. Aucune des réponses précédentes n'est juste.

1
2
3
4
5

Notes $L = \lim_{x \to +\infty} \frac{(-5x^2 - x + 2)^3}{(2x^3 + x + 1)^2} = \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}$

$$\frac{(-5x^2 - x + 2)^3}{(2x^3 + x + 1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-5x^2)^3}{(2x^3)^2} = \frac{-125x^6}{4x^6} = -\frac{125}{4}$$

donc $L = -\frac{125}{4}$

Soit f, une fonction dérivable en 0. On obtient un équivalent de f en 0 à l'aide de la formule suivante :

1'

1. $f(x) \sim_0 f(0) + x.f'(0)$
2. $f(x) \sim_0 f'(0) + x.f(0)$
3. Aucun des résultats ci – dessus n'est juste

1
2
3

Notes

Rappel : $f(x) \underset{a}{\simeq} f(a) + (x-a).f'(a)$

Si $a=0$, alors :

$$\boxed{f(x) \underset{0}{\simeq} f(0) + x\,f'(0)}$$

3’

Soit f, la fonction définie par : $g(t) = \dfrac{e^{3t}-1}{4t\sqrt{t}+5t}$ alors :

1 1. $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = \dfrac{3}{5}$

2. $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = \dfrac{3}{4}$

3. $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = \dfrac{1}{5}$

4. $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = \dfrac{1}{4}$

5. Aucune des réponses précédentes n’est juste.

1
2
3
4
5

Notes

$$g(t) = \frac{e^{3t} - 1}{4t\sqrt{t} + 5t}$$

$$L = \lim_{t \to 0} g(t) = \text{“} \frac{0}{0} \text{”} \quad \text{FI}$$

$$g(t) \underset{0}{\sim} \frac{?}{5t}$$

$$e^{3t} \underset{0}{\sim} 1 + 3t \qquad \text{car } 3t = x \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

car $e^x \underset{0}{\sim} 1 + x$, en effet $f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1$

et $f(x) \underset{0}{\sim} f(0) + x f'(0)$

Donc $g(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1 + 3t - 1}{5t} = \dfrac{3t}{5t} = \dfrac{3}{5}$ et $\boxed{L = \frac{3}{5}}$

Soit f, *la fonction définie par* : $h(t) = \dfrac{\ln(1+\sqrt{t})}{4\sqrt{t}+5t}$ *alors* :

3'

1. $\lim\limits_{t \to 0} h(t) = \dfrac{2}{5}$

2. $\lim\limits_{t \to 0} h(t) = 0$

3. $\lim\limits_{t \to 0} h(t) = \dfrac{1}{5}$

✓4 4. $\lim\limits_{t \to 0} h(t) = \dfrac{1}{4}$

5. Aucune des réponses précédentes n'est juste.

1
2
3
4
5

Notes

$$h(t) = \frac{\ln(1+\sqrt{t})}{4\sqrt{t}+5t}$$

$$\lim_{t\to 0} h(t) = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \quad \text{FI}$$

$$g(t) \underset{0}{\sim} \frac{?}{4\sqrt{t}}$$

Comme $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

(en effet : $f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f(0) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$

et $f(x) \underset{0}{\sim} f(0) + x f'(0)$)

en posant $x = \sqrt{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$, on obtient :

$$\ln(1+\sqrt{t}) \underset{0}{\sim} \sqrt{t}$$

et $g(t) \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{t}}{4\sqrt{t}} = \frac{1}{4}$ donc $\boxed{L = \frac{1}{4}}$

Soit f, $la\ fonction\ définie\ par : f(t) = \sqrt{2t+1} - \sqrt{2t+3}\ alors$

3'

1. $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = -\infty$

2. $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$

✓3

3. $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$

4. Aucune des réponses précédentes n'est juste.

1
2
3
4

Notes

$$f(t) = \sqrt{2t+1} - \sqrt{2t+3}$$

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \text{"} +\infty - \infty \text{"} \quad \text{FI}$$

⚠ si $\begin{cases} h_1(t) \underset{t_0}{\sim} h_2(t) \\ k_1(t) \underset{t_0}{\sim} k_2(t) \end{cases}$ alors on ne peut pas écrire : $h_1(t) + k_1(t) \underset{t_0}{\sim} h_2(t) + k_2(t)$

exple : $h_1(t) = 3t^2 - t + 1 \underset{+\infty}{\sim} 3t^2 = h_2(t)$

$k_1(t) = -3t^2 + t + 3 \underset{+\infty}{\sim} -3t^2 = k_2(t)$

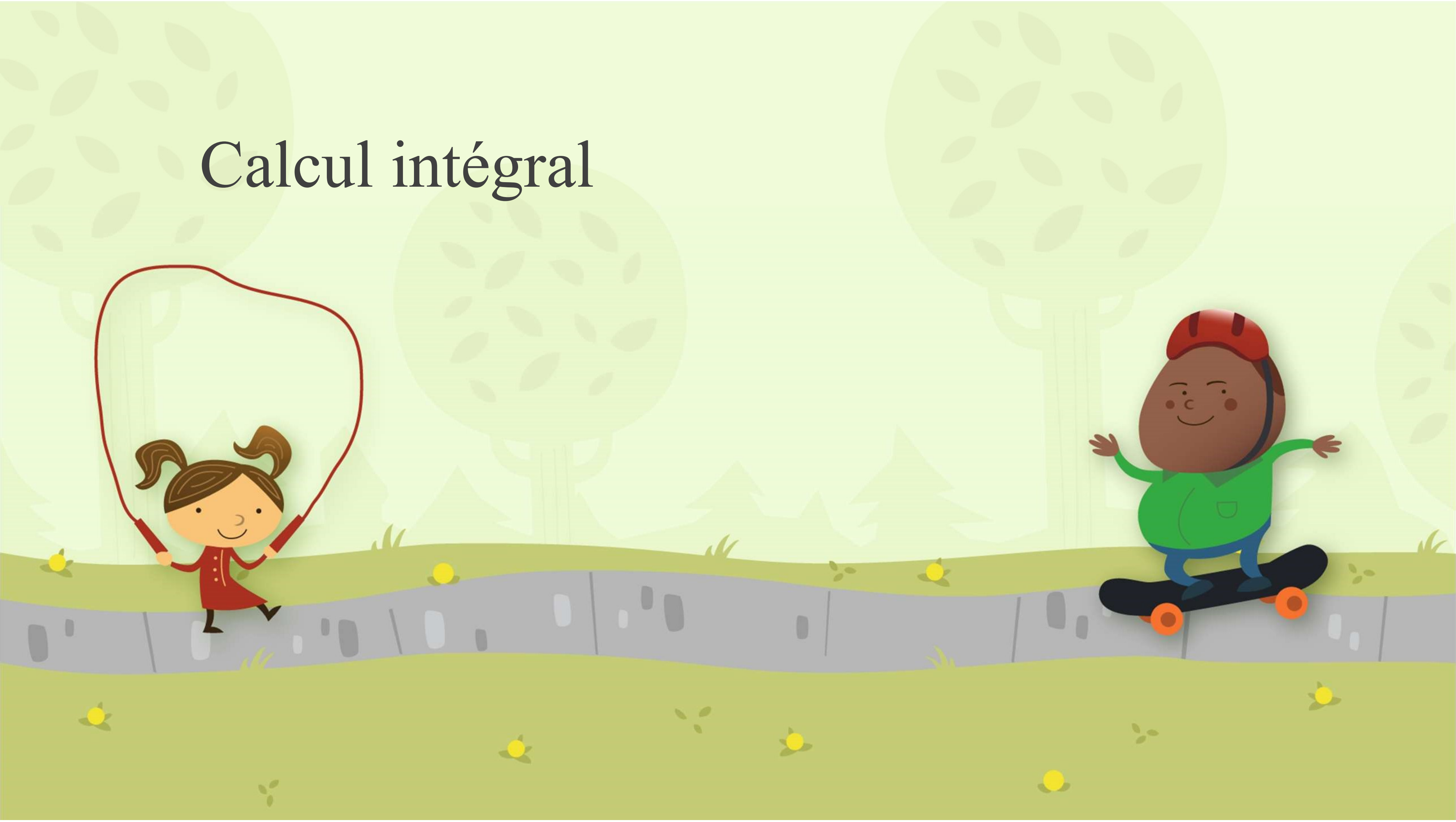
$h_1(t) + k_1(t) = 4 \underset{+\infty}{\sim} 0$ c'est faux !

Expression conjuguée :

$$f(t) = \underbrace{\left(\sqrt{2t+1} - \sqrt{2t+3}\right)}_{(A - B)} \times \frac{\overbrace{\sqrt{2t+1} + \sqrt{2t+3}}^{(A + B)}}{\sqrt{2t+1} + \sqrt{2t+3}} =$$

$$f(t) = \frac{\overbrace{2t+1 - (2t+3)}^{A^2 - B^2}}{\sqrt{2t+1} + \sqrt{2t+3}} = \frac{-2}{\sqrt{2t+1} + \sqrt{2t+3}} \text{ donc } \boxed{\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0}$$

Calcul intégral



3’

L’intégrale $I = \int_{-2}^{2}(3x^2 + 4)dx$ est égale à :

✓1

1. $I = 2.\int_{0}^{2}(3x^2 + 4)dx = 32$

2. $I = 0$

3. $I = 16$

4. $Aucun\ des\ résultats\ ci - dessus\ n'est\ juste$

1
2
3
4

Notes

$$I = \int_{-2}^{2} (3x^2+4)\,dx$$

$[-2;2]$ est centré en 0.

Méthode 1

Rappel : Si f est paire sur $[-a;a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \times \int_{0}^{a} f(x)\,dx$

Si f est impaire sur $[-a;a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Ici $f(x) = 3x^2+4$ $\quad f(-x) = 3(-x)^2+4 = 3x^2+4 = f(x)$, donc f est paire et

$$I = 2\times\int_0^2 (3x^2+4)\,dx = 2\times\left[x^3+4x\right]_0^2 = 2\left(8+8-0\right) = 2\times 16 = 32$$

Méthode 2

$$I = \int_{-2}^{2}(3x^2+4)\,dx = \left[x^3+4x\right]_{-2}^{2} = \underbrace{8+8}_{16} - \left(\underbrace{-8-8}_{-16}\right) = 32.$$

Soit $x \neq -\frac{1}{2}$.

Les primitives de la fonction $f(x) = 3e^{5x} - \frac{1}{2x+1} + x^3.\sin(x^4)$ $sont$:

3’

1. $F(x) = 15e^{5x} + \frac{2}{(2x+1)^2} + 3x^2.\sin(x^4) + 4x^6.\cos(x^4) + cte$

2. $F(x) = 3e^{5x} - \ln|2x+1| - \frac{x^4}{4}.\cos(x^4) + cte$

3. $F(x) = 3e^{5x} - \ln|2x+1| + \frac{x^4}{4}.\cos(x^4) + cte$

✓4 4. $F(x) = \frac{3}{5}e^{5x} - \frac{1}{2}\ln|2x+1| - \frac{1}{4}.\cos(x^4) + cte$

5. $F(x) = \frac{3}{5}e^{5x} - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + \frac{1}{4}.\cos(x^4) + cte$

1

2

3

4

5

Notes $x \neq -\frac{1}{2}$ $\quad f(x) = 3e^{5x} - \frac{1}{2x+1} + x^3 \cdot \sin(x^4)$

$$F(x) = \int f(x)\,dx = 3\int e^{5x}\,dx - \int \frac{1}{2x+1}\,dx + \int x^3 \sin(x^4)\,dx$$

$\int u' e^{u}\,dx = e^{u} + cte$ | $\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C$ | $\int u' \cdot \sin u\,dx = -\cos u + cte$

ici $u = 5x \Rightarrow u' = 5$ | ici $u = 2x+1 \Rightarrow u' = 2$ | ici $u = x^4 \Rightarrow u' = 4x^3$

$$= \frac{3}{5}\int 5e^{5x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1 \times 2}{2x+1}\,dx + \frac{1}{4}\int 4x^3 \sin(x^4)\,dx$$

$\forall x \neq -\frac{1}{2}$ $\quad F(x) = \frac{3}{5} e^{5x} - \frac{1}{2} \cdot \ln|2x+1| - \frac{1}{4}\cos(x^4) + cte$

L'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin(3t)dt$ est égale à :

1. $\mathrm{I} = 2/3$

✓2 2. $\mathrm{I} = 0$

3. $\mathrm{I} = -2/3$

4. *Aucun des résultats ci – dessus n'est juste*

Notes

$$I = \int_0^{2\pi/3} \sin(3t)\,dt$$

Méthode 1

Rappel 1 : Si f est T-périodique, alors $\int_0^T f(t)\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$

Rappel 2 : $A\cos(\omega t+\varphi)$ et $A\sin(\omega t+\varphi)$

ont pour période : $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Ici $f(t) = \sin(3t)$ alors $\omega = 3$ et $T = \frac{2\pi}{3}$.

et $I = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \underbrace{\sin(3t)}_{\text{impaire}}\,dt = 0$

Méthode 2

$$I = \int_0^{2\pi/3} \sin(3t)\,dt = \left[-\frac{\cos(3t)}{3}\right]_0^{2\pi/3} = -\frac{1}{3}\left(\underbrace{\cos 2\pi}_{1} - \underbrace{\cos 0}_{1}\right)$$

$$\boxed{I = 0}$$

Soit $f(\omega) = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+1}} + L.\omega(\omega^2+1)^2 - \frac{C}{\omega^2+1}$ *alors* $\int f(\omega).d\omega$ *est égal* à :

3'

1. $2\sqrt{\omega^2+1} + \frac{L}{6}.\omega^2(\omega^2+1)^3 + \frac{C}{(\omega^2+1)^2} + cte$
2. $\sqrt{\omega^2+1} + \frac{L}{6}.\omega^2(\omega^2+1)^3 + C.\arctan(\omega) + cte$
3. $\sqrt{\omega^2+1} + \frac{L}{3}.(\omega^2+1)^3 + C.ln(\omega^2+1) + cte$
4. $\sqrt{\omega^2+1} + \frac{L}{3}.(\omega^2+1)^3 + \frac{C}{(\omega^2+1)^2} + cte$
5. Aucune des réponses ci-dessus n'est juste

✓5

1
2
3
4
5

Notes $f(w) = \frac{w}{\sqrt{w^2+1}} + Lw(w^2+1)^2 - \frac{c}{w^2+1}$

$$\int f(w)\,dw = \int \frac{w}{\sqrt{w^2+1}}\,dw + L.\int w(w^2+1)^2\,dw - c.\int \frac{1}{w^2+1}\,dw$$

$\int \frac{U'}{2\sqrt{U}}\,dw = \sqrt{U} + cte$ ici $U = w^2+1 \Rightarrow U' = 2w$

$\int U'.U^2\,dw = \frac{U^3}{3} + cte$ ici $U = w^2+1 \Rightarrow U' = 2w$

$\cancel{\int \frac{U'}{U}\,dw = \ln|U| + cte}$ ici $U = w^2+1 \Rightarrow U' = 2w$

$\int \frac{U'}{U^2+1}\,dw = \arctan(w) + cte$ $U = w \Rightarrow U' = 1$

$$= \int \frac{2w}{2\sqrt{w^2+1}}\,dw + \frac{L}{2}.\int 2w(w^2+1)^2\,dw - c.\int \frac{1}{w^2+1}\,dw$$

$$\boxed{\int f(w)\,dw = \sqrt{w^2+1} + \frac{L}{2}\frac{(w^2+1)^3}{3} - c.\arctan(w) + cte}$$